This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

600045830Q

1. d. 1-4

265. d. 1-4

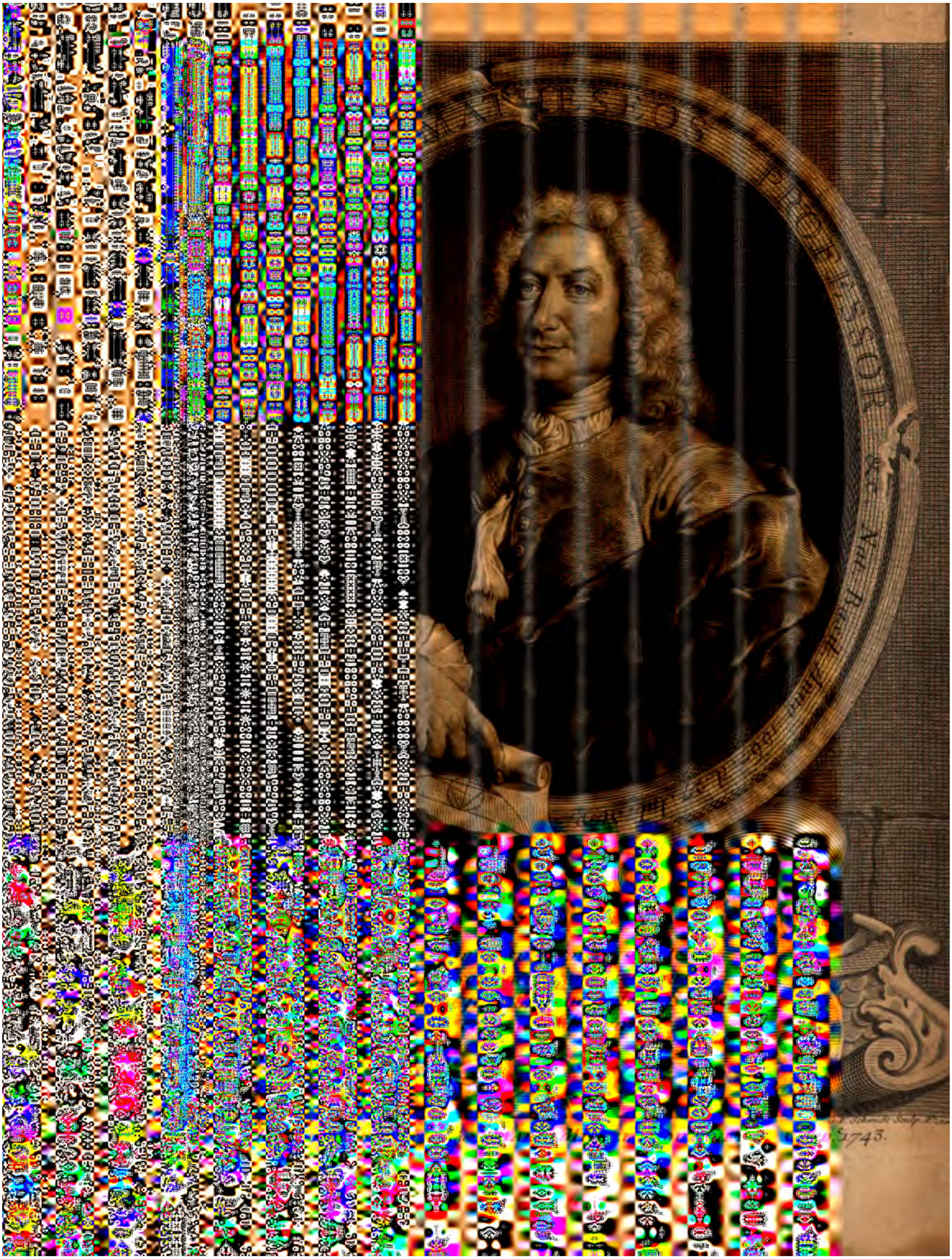
PRESS
SHELF
No 1

PRESENTED
BY
The Royal Society of London
TO
The Radcliffe Library.

1875 d. 286/1

1875 d. 304/1

Math. K. 21.


PROFESSOR
1743.

[illegible] NNIS

[illegible] ULLI,

[illegible] *PROFESSORIS*,

[illegible] ISIENSIS, LONDI-

[illegible] POLITANÆ,

[illegible] S, *Socii* &c.

[illegible] OMNIA,

[illegible] ARSIM EDITA,

[illegible] inedita.

[illegible] RIMUS,

[illegible] *ntur ea*

[illegible] NNUM 1713 prodierunt.



[illegible]

Se[illegible] Fund.

LO

RICO,

SSIMO

ORUM

TISSIME,

bere Philoſophis

ebant Tractatus

tores amant hodierni. Nobis feliciori-bus Indulgentia conceſſum eſt Tua, ut magni Geometræ ac Philoſophi Johannis Bernoulli *Opera liceat offerre Regi Philoſopho, qui quantum Dignitate ſupra vulgus hominum poſitus es, tantum excellis ingenii animique magnitudine, & virtutibus omnibus quæ Regiam Majeſtatem ornant. Nam cum mature intellexiſſes animum humanum nulla re propius ad illud, unde ſuam traxit originem, Divinitatis exemplar accedere, quam veritate cognita & da-*

ta

ita hominibus ſalute, ita ſemper Vitam inſtituiſti Tuam, ut perpetuo ad eos fines omnia retuliſſe, nec unquam mentis aciem ab eis deflexiſſe conſtet. Itaque, cum ingentem & præclaram illam animam, quam Sceptro Solioque deſtinaverat DEUS, *difficilibus temporibus ac negotiis exercere decreviſſet; unus, in illo ætatis flore, grave onus imperii ſic ſuſcepiſti, ut Regnum Clementia ipſa & Conſilium gubernaſſe, bellum indixiſſe Juſtitia & Moderatio, geſſiſſe Prudentia & Virtus, pacem denique Fides ac*

Temperantia feciſſe videantur. Quibus artibus, vere Regiis, id conſecutus es; ut dum Europa bellorum miſeriis vexatur fere tota, fortunatos illos Populos, Tutelæ Tuæ commiſſos, credamus armorum incommoda tuliſſe, tantum ut pacis dulcedine magis capiantur. Fruere Tua Gloria, REX MAXIME, *quæ non continebitur propiorum temporum regionumque finibus, ſed, Solis inſtar, ſimul ut exortus eſt, omnia luce ſua complentis, & ipſo progreſſu vires ac ſplendorem acquirentis, ad extremas*

mas penetravit gentes, ad ultima ſecula permanabit. Poſteris nunciabit Hiſtoria Regem viſu & auditu juxta venerabilem, amabilem, comem in ſocios ſubditoſque, manſuetum in hoſtes, invictum bello, pacis amantem, generis humani bono natum, ævi noſtri decus & delicias. Nec te ſilebunt Muſæ; ſed ſive Principibus perlegenda ſcribentem, ſive ſcribenda facientem ultro canent, tam amæniores illæ, quam iſtæ ſeveriores, quarum omnium Cultor eſſe non dedignaris, cum ingenio locoque

Pa-

Patronus ſis atque Præſidium: Litteratos enim, & quos Tibi Tua Terra tulit, & quos ad Tuam Aulam undique accerſis, eo excipis vultu, eo proſequeris favore, ut eſſe Tibi in deliciis Alumni Muſarum videantur. Honorifica autem illa invitatio, qua, non ſine Orbis eruditi plauſu, Bernoullium *noſtrum, una cum doctiſſimis Filiis, ad Te vocaviſti, non ſinebat ut aliud quam Tuæ Majeſtatis Patrocinium ambirent Viri commendatiſſimi ſcripta, facitque ut nec Tanto Rege prorſus indignum, nec*

nec Tibi diſpliciturum confidamus munuſculum. Quod ut benigne aſpicias, & eo accipias animo, quo ſoles conatus bonorum, precibus humillimis ſupplicamus,

MAJESTATIS TUÆ

Deditiſſimi Devotiſſimi Servi
MARCUS-MICHAEL BOUSQUET
& SOCII.

PRIVILE-

…EGIUM,

…Æ *MAJESTATIS.*

…LUS SEPTIMUS

… FAVENTE CLEMENTIA
…manorum Imperator Semper Au-
… Germaniæ & Bohemiæ Rex, utriuſ-
… & Superioris Palatinatus Dux ,
…atinus Rheni , Archidux Auſtriæ,
…us Leuchtenbergæ , &c. Agnoſci-
… otum facimus tenore præſentium
… quòd , cùm Nobis *Marcus Mi-*
…*quet*, ejuſque Socii humillimè ex-
…*annis Bernoulli Opera omnia tam*
… [illegible] … *quatuor* … [illegible]

indemnitati Privilegió Noſtró Cæſareo ſuccurrere clementiſſimè dignaremur, Nos ſubmiſſæ pariter & æquæ eorum petitioni annuendum cenſuerimus, ac proinde authoritate Noſtra Cæſarea omnibus & ſingulis Bibliopolis, Bibliopegis, Typographis & aliis quibuſcumque rem Librariam ſeu negotiationem exercentibus firmiter inhibemus, vetamus ac interdicimus, nè quis ſupranominata *Joannis Bernoulli Opera* ſub hoc aliòve Titulo nec in toto nec in parte, per Decem Annorum ſpatium, ab hodierno die computandum, intra Sacri Romani Imperii & Ditionum Noſtrarum hæreditariarum fines recudere, vel aliis recudenda dare, aliorſùmve impreſſa apportare, vel diſtrahere, citra præfatorum Impetrantium, hæredùmque ac Succeſſorum voluntatem & aſſenſum in ſcriptis obtentum auſit vel præſumat. Si quis verò ſecus faciendo Privilegium hoc Noſtrum ſeu Interdictum violare contemnereque præſumpſerit, eum non ſolùm ejuſmodi exemplaribus ubicunque locorum repertis, perperam quippe recuſis ſeu apportatis (quæ dictus *Marcus Michael Bouſquet*, ejuſque Socii ſive propria authoritate ſive Magiſtratus illius loci auxilio ſibi vindicare poterunt) de facto privandum, ſed & Decem marcarum auri puri pœnâ Ærario ſeu Fiſco Noſtro Cæſareo & parti læſæ ex æquo pendendâ, omni ſpe veniæ ſublata, mulctandum decernimus, dummodò tenor hujus Noſtri Privilegii in fronte Libri impreſſus reperiatur, & conſueta quinque Exemplaria Conſilio Noſtro Imperiali Aulico exhibeantur. Mandamus itaque omnibus & Singulis Noſtris & Sacri Romani Imperii Dominiorùmque Noſtrorum hæreditariorum ſubditis & fidelibus dilectis tam Eccleſiaſticis quàm Secularibus, cujuſcunque ſtatûs, gradûs, dignitatis aut ordinis exſtiterint, præſertim verò iis, qui in Magiſtratu conſtituti vel ſuo vel Superiorum ſuorum loco aut nomine jus juſtitiàmque adminiſtrant, ne quempiam Privilegium hoc Noſtrum Cæſareum impunè violare, ſpernere aut tranſgredi patiantur, ſed ſi quos contumaces compererint, conſtituta à Nobis mulctâ eos puniri, & quibuſcunque modis idoneis coërceri curent, quàtenus & ipſi graviſſimam Noſtram indignationem & prædictam pœnam evitare voluerint. Harum teſtimonió literarum, Manu Noſtra ſubſcriptarum & Sigilli Noſtri Cæſarei appreſſione munitarum, quæ dabantur Francofurti ad Mœnum die duodecima Junii Anno

Anno milleſimo ſeptingenteſimo quadrageſimo Secundo, Regnorum Noſtrorum Romani & Bohemici primo.

CAROLUS.

(L. S.)

Vt. JOANNES GEORGIUS Comes
à Königsfeld.

Ad Mandatum Sac. Cæſ.
Majeſtatis proprium.

J. J. HAYECK *de Waldſtätten.*

[illegible]IVILEGIUM,

[illegible]SS. POLONIÆ REGIS ELECT. SAXON.

[illegible]ER ALLERDURCHLÄUCHTIGSTE, GROSSmächtigſte Fürſt und Herr, Herr FRIEDRICH AUGUST, König in Pohlen, des Heiligen Römiſchen Reichs Erz-Marſchall und Churfürſt zu Sachſen; auch Burgraf zu Magdeburg, &c. hat auf beſchehenes unterthänigſtes Anſuchen Marci Michael Bouſquet und Compagnie, Buchhändlere zu Lauſanne und Genf, gnädigſt [illegible] Johannis Bernoulli, Matheſeos Profeſſoris, Opera [illegible] inedita [illegible] Tomos [illegible]er [illegible] und [illegible] erge- [illegible] rirten [illegible] Lan-

Landen und Stifftern kein Buchhändler noch Drucker oberwehntes Buch in denen nächſten von untengeſezten dato an, zehen Jahren, bey Verlurſt aller nachgedruckten Exemplaria, *und ein hundert Rheiniſchen Gold-Gulden Strafe, weder nachdrucken, noch auch, da daſſelbe an andern Orthen gedrucket wäre, darinnen erkauffen und verhandlen, wogegen ſie gemeltes Buch fleiſſig corrigiren, aufs zierlichſte drucken, und gut weiß Papier darzu nehmen zu laſſen, auch ſo offt es aufgeleget wird, von jedem Druck und* Format *zwanzig* Exemplaria *in Sr. Königl. Majeſt. und Churfürſtl. Durchl. Ober-*Conſiſtorium *ehe es verkaufft* wird, *auf ihre Koſten einzuſchicken ſchuldig, und dieß* Privilegium *niemanden, ohne Höchſtgedachter Sr. Königl. Majeſt. und Churfürſtl. Durchl. Vorwiſſen und Einwilligung zu cediren befugt ſeyn ſoll; Geſtalt er bey ſolchem* Privilegio *auf die bewilligten zehen Jahr geſchüzet und gehandhabet, auch, da dieſem jemand zu* wiederhandlen, *und ſie um* Execution *deſſelben anſuchen* würden, *ſolche ins Werck gerichtet, und die geſezte Strafe eingebracht* werden *ſoll. Jedoch daß ſie längſtens binnen fünff Jahren, und zwar bey Verlurſt des* Privilegii, *den Druck zu Stande bringen und die gewöhnlichen* Exemplaria *würcklich lieferen.*

Inmittelſt, und zu uhrkund deſſen, iſt dieſer Schein, bis das Original-Privilegium *ausgefertiget* werden *kan, und ſtatt deſſelben in Sr. Königl. Majeſt. und Churfürſtl. Durchl. Kirchen-Rath- und Ober-*Conſiſtorio *unterſchrieben und beſiegelt, ausgeſtellet* worden, welchen *ſie durch den beſtellten Bücher-Inſpectorn Johann Zacharias Treſur denen Buchhändleren zu inſinuiren, widrigenfalls die Inſinuation vor null und nichtig erkannt* werden *ſoll; ſo geſchehen zu Dreſden, am* 13. *Julii* 1742.

(L. S.)

L. G. von Holzendorff.

Christian Friedrich Teucher.

LETTRE

Ecrite par l'Auteur Monſieur JEAN BERNOULLI, au Libraire & Imprimeur *Marc Michel Bouſquet.*

V*Ous voilà enfin,* Monſieur*, preſque au bout de l'impreſſion de mes petits Ouvrages, puiſque je viens de recevoir une bonne portion des feuilles du* IVme. *& dernier Tome. Je ne puis que vous marquer mon contentement & vous remercier de tous les ſoins, de la diligence, de l'exactitude & des grandes dépenſes que vous employés à l'impreſſion de ce Livre; je trouve que vous lui faites plus d'honneur qu'il ne merite, & je ſouhaite que vous n'ayés jamais lieu de vous en repentir, car vous ſavés* Monſieur*, que je n'ai d'autre part à l'edition de ce Recueil, que celle d'y avoir conſenti, non ſans peine à la verité, ni ſans avoir long tems reſiſté à vos preſſantes ſollicitations & à celle des perſonnes que vous avés miſes en œuvre pour cela.*

En

En effet Monſieur, *du grand nombre de Piéces Anecdotes qui y entrent, j'en aurois ſuprimé pluſieurs, & laiſſé paſſer peu que je n'euſſe au moins retouchées, ſi j'avois été l'editeur de ce Recueil; parce que quantité ont été compoſées dans ma jeuneſſe, & beaucoup d'autres que je n'ai fait qu'écrire fort à la hâte, ſur les premieres feuilles volantes qui ſe trouvoient ſous ma main, ſimplement pour mon uſage, & ſans m'imaginer qu'elles duſſent jamais voir le jour, comme le Public le remarquera ſans peine: c'eſt donc pour être à l'abri de toute critique, que je déclare, que la publication de ces Piéces informes, ne doit être attribuée qu'à vôtre empreſſement. Ainſi ne trouvés pas mauvais que, perſiſtant dans la reſolution que j'ai priſe de ne point paroitre là dedans, je refuſe la Préface que vous me demandés. Si vous croyés qu'il en faille abſolument une, je vous conſeille de vous adreſſer au ſavant Profeſſeur qui a eu la bonté de ſe charger de la direction, & avec tant d'exactitude.*

En revanche, & puiſque j'ai tant fait que de conſentir à l'impreſſion du Recueil de mes écrits, je vous accorde la déclaration autentique que vous ſouhaités de ce conſentement; je vais plus loin encore, je déclare que je n'avouerai jamais aucune edition

tion que quelqu'un d'autre que vous pourroit en ſaire dans la ſuite.

Je ſuis

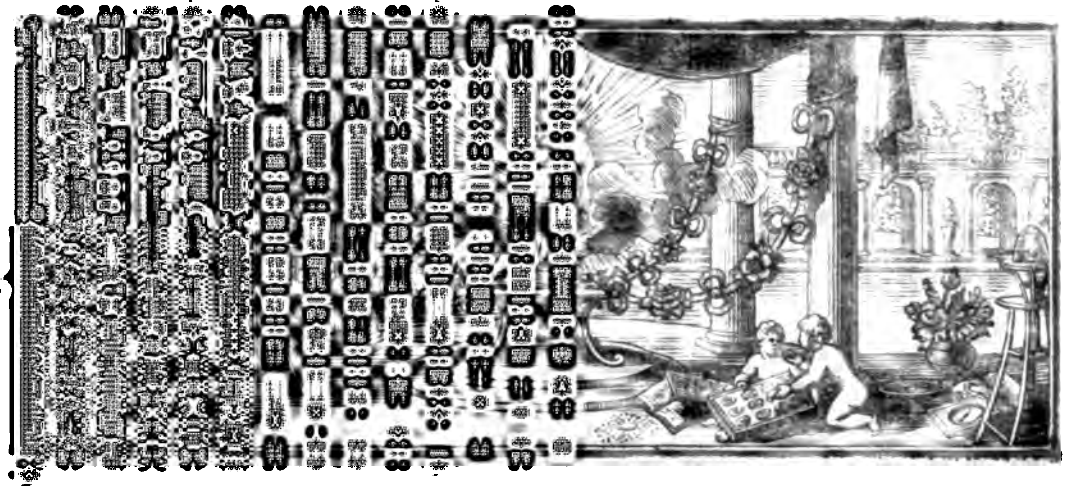
Monſieur,

à Basle le 9. Janvier 1743.

Vôtre très humble & très obëiſſant Serviteur,

JEAN BERNOULLI
Prof. des Mathem.

EDITOR



[illegible]TOR [illegible]ORI

[illegible]tinebo te multis verbis. [illegible] enim aut Tua, Lector [illegible]le, poſtulare videtur uti- [illegible] aut meum ingenium fert, [illegible] exequar quod fere ſolent [illegible] qui in aliorum Scriptis [illegible]is curam aliquam & ope- [illegible]

loſophicam merita, & notum omnibus eſt, & abunde declarat iſte, quem in manibus habes, Theſaurus: Ea eſt inſuper Viri modeſtia, ut a juſtiſſimis refugiat elogiis: neque ego vellem laudes illius deterere quem vix ſatis digne laudarent diſertiſſimi.

Omiſiſſem itaque libenter Te vel verbulo longius a lectione Operis abſtrahere, niſi me flagitaſſet Vir de litteris bene meritus *Marcus-Michaël Bouſquet*, ut quæ ad hujus Editionis finem modumque pertinent exponerem. Hæc paucis habe.

Cum intellexiſſet honeſtiſſimus Bibliopola Celeberrimi BERNOULLII Opera, manu diurna nocturnaque Mathematicis verſanda, a multis valde deſiderari; &, impetrata prius Auctoris venia, omnium ſimul emendate ac nitide edendorum conſilium cepiſſet: me rogavit, ut iſtud propoſitum ſuum, non ſine multis curis magniſque ſumptibus perficiendum, ſed quod Matheſeos Studioſis utiliſſimum confitebar, ſaltem conſiliis juvarem: ego vero, *Bernoulliani* nominis amantiſſimus, operam, qualem pro modulo meo conferre poſſum, denegare non ſuſtinui.

Primum igitur nobis curæ fuit omnia Viri clariſſimi Scripta prius edita colligere; quæ res, vere dicam, ali-

aliquid laboris requirebat & diligentiæ, uſque adeo diſperſa fuſe lateque jacebant. Partem ex *Actis Eruditorum Lipſienſibus*, partem ex *Pariſienſi Diario Eruditorum* extraximus: multa deprompſimus ex *Hiſtoria & Actis Academiæ Regiæ Scientiarum*, nonnulla ex *Miſcellaneis Berolinenſibus*, quædam ex *Commentariis Academiæ Petropolitanæ*, alia aliunde elicuimus. Unde ſingula excerpta ſint docet uniuſcujuſque Diſſertationis margini adfixa inſcriptio.

His autem omnibus, quæ jam Tua dici poterant, quanquam non ſatis eſſent tua antequam in unum cogerentur, duo accedunt Tibi, quiſquis es qui ſtudio mathematico delectaris, gratiſſima futura. Primum, Lectiones de Calculo integralium, Pariſiis olim in uſum Nob. *Marchionis* HOSPITALII conſcriptæ, quæ quidem in manibus nonnullorum verſabantur & quaſi cuſtodiebantur, necdum tamen in vulgus exierant: alterum Schediaſmata multa varii argumenti, nunc primum e Noſtri ſcriniis educta, quæ quanti ſint pretii malumus Te, Lector, ex eorum lectione judicare, quam ex Auctoris plus æquo ſuas opes extenuantis verecundia. Sint quædam, ut ipſe vocat, juvenilia; at in his BERNOULLII juventutem agnoſces: Et quæ tanquam in chartam curſim conjecta

elevat, multis aliorum Scriptis perpolitis fructuoſiora invenies.

Utinam modo hæc ’ανέκδοτα in manus noſtras aliquanto citius veniſſent, ut ſuo quodque ordine collocari & ad alias agnataſque Diſſertationes referri potuiſſet. Etenim, quæ collegeramus Numeris diſtinguenda, atque ordine diſponenda fuerunt: In ea vero diſpoſitione, vel rerum ordo, vel temporum ſervandus videbatur. Et erant ſane rationes quæ iſtam, erant quæ illam diſtributionem ſuaderent. Omnibus tandem diu perpenſis, Numeros noſtros ſecundum tempora, quibus in publicum emiſſi ſunt, digerere ſatius viſum eſt: ſive quod ſic poſiti hiſtoricam veluti Tabellam Geometriæ recentioris exhibeant; & hac ratione melius inventionum fontes atque gradus indicentur, ſæpiuſque appareat qua data occaſione, qua cogitationum ſerie, quo ratiociniorum contextu, quibus aliarum propoſitionum auxiliis nova veritas detecta ſit; id quod ad Artem inveniendi promovendam permagni momenti eſt: ſive quod aliter Opuſcula non pauca, quæ diverſa ſæpe capita complectuntur, in partes ſecanda & quaſi lanianda fuiſſent; id autem nefas duximus. Quo tamen, ſervata ratione temporum, & ipſæ res, quantum fieri poſſet, nexu quo-

quodam colligarentur, ad calcem plerorumque Numerorum notam adjecimus indicem Numeri alterius qui præcedentis veluti continuatio eſt. Sic fit ut, his notis monitoribus aut ducibus, nullo negotio poſſis Diſſertationes, quarum eadem materia eſt, ex ordine ſingulas evolvere.

Bernoullianis Operibus, ut inter ſe cohærerent aptius & melius intelligerentur, eſſe intermiſcenda Schediaſmata quædam aliunde ſupmta cenſuerunt amici quidam noſtri rerum harum peritiſſimi. Controverſias enim, aiebant, quæ multæ Auctori cum doctis interceſſerunt, quomodo cognoſces penitus, niſi quicquid in utramque partem dictum eſt audiveris? Et animadverſiones in Scriptum aliquod legere quid attinet, niſi Scriptum ipſum habeas ante oculos? Paruimus amicorum monitis, hiſque auctoribus non dubitavimus id cum BERNOULLIO conſociare ſine quo BERNOULLIUS non ſatis perfecte intelligeretur: Eoque libentius hoc amplexi ſumus conſilium, quod aliter Te, Benevole Lector, ad libros rariores & magno pretio comparandos amandare non ſemel neceſſe fuiſſet. Titulum tamen Operis nunquam obliti ſumus, ac veriti ut in nimiam molem excreſcerent

hæc volumina, aliorum Scripta *Bernoullianis*, niſi parce & reſtricte, non adjunximus; quæ longiora fuiſſent, vel decurtata dedimus, vel omnino rejecimus; neve cum propriis aliena confunderentur, iſta minoribus litteris imprimi voluimus.

Doctus ſermones utriuſque linguæ, Noſter Latine Galliceque ſcripſit. Ambiguum habuimus, utrum ea, ex quibus iſte liber conflatus eſt, Opuſcula ſua, qua conſcriptum eſt unumquodque, lingua edere, an exhibere Latine omnia vel omnia Gallice præſtaret. Sunt enim quibus placuiſſet magis conſenſus quidam & veluti ſermonis unitas. Vicit tamen aliorum ſententia, vetantium ne pro Scriptis *Bernoullianis* daremus verſiones ab Auctoris mente forſan aberrantes. Sane nonnulla ſunt, quæ minus commode Latinis propriiſque vocabulis redderentur, qualia quæ ad Manuariam nauticam pertinent; & quæcunque Latine ſcripta ſunt Gallice vertere minus aptum videbatur. Quoniam vero ex eruditarum ac prope univerſalium linguarum numero jam ſunt & Gallica & Latina, [nam inter Eruditos qui non intelligant utramque paucos eſſe arbitramur;] credidimus, in tanta rerum copia & argumentorum diſſimilitudine, futu-

futurum ut aures vel delicatiſſimæ ſermonis varietate non offenderentur.

Monendus es præterea, Lector Amice, in uſu characterum ſignorumque algebraïcorum, ſecutos eſſe nos fere ſemper *Leibnitianum* morem, qui typothetis commodior minuit errandi periculum; quam ob rem a plurimis nunc uſurpatur. Itaque multiplicatio uno, diviſio duobus punctis interpoſitis notatur; proportio, hæc enim rationum æqualitas eſt, æqualitatis ſigno indicatur; pro vinculis tam radicum, quam productorum aut quotorum, quæ olim incertis linearum ſuper litteras ductibus exprimebantur, rectius unci, aut parentheſes adhibentur: quod ulterius exponere, cum pervulgata ſint & jam uſitatiſſima, nihil neceſſe eſt.

Cæterum, ut emendate prodiret Opus, quanta abſentes potuimus diligentia providimus: maculas non paucas quibus adſperſæ ſunt editiones priores, delevimus; quæ oculorum aciem fugerunt, vel Operariorum incuria inter excudendum admiſſa ſunt menda, ea ut ipſe tollas rogamus: Indices, tam Opuſculorum ſingulorum quam rerum in toto Opere præcipue notandarum, ut adjicerentur curavimus.

Tu,

[illegible] *ITOR LECTORI.*

[illegible] ſtudio Tua cauſa labor iſte ſuſceptus [illegible]ta fructum ejus humanitate accipe, [illegible]ſcunque conatus proba. Vale. Dabam [illegible]. Mart. 1743.

N°. I.

DISSERTATIO

DE

EFFERVESCENTIA

ET

FERMENTATIONE

Nova Hypotheſi fundata,

Quam

Publice diſcutiendam exhibuit

JOANNES BERNOULLI, BASIL.

AUCTOR.

D. 19 Septembr. Ann. cIↄIↄcxc.

Edita primum BASILEÆ 1690. iterum VENETIIS 1721. tertium, NEAPOLI 1734.

[illegible] TIO.

[illegible] mihi videor videre [illegible] Delicatulos appoſi- [illegible] anc crambem toties, [illegible] bis, coctam adeo fa- [illegible] es, ut, ne in faciem [illegible] it, verear; fateor meis [illegible] faucibus non arriſiſſe, [illegible] viſſe;

[illegible] ſine fine petitæ.

[illegible] liſſima quoque edulia, [illegible]

præſentem mihi præ aliis ſelegi materiam, utut ſatis tritam, nec a novitate multum commendabilem; tot enim extant libri, tot Phyſici, tot Chymici Auctores reperiuntur ea de re diſceptantes, ut Lector quo ſe vertat neſciat; an hunc, vel illum, huic, vel iſti anteponat dubitet, quemque prius legat hæreat ſuſpenſus: verbo ab uno latere in alterum tam diu fluctuet, ut, cum tandem omnes evolverit, oleum & operam perdidiſſe ſe pœniteat. Hîc enim videas, qui rem ſuam rationibus & argumentis neſcio quibus defendere ſatagunt; alios, qui contrarium docent auctoritatibus; alios, qui ab utraque parte diſcedentes, merces ſuas, nitido verborum mangonio obductas divendere conantur; paucis dicam, omnes fere diſſentiunt, nec conveniunt niſi in hoc, quod pleraque eorum (ne dicam omnium) principia & hypotheſes adeo ſint obſcura, confuſa, & imperceptibiles, ut iis ſuperſtructa ratiocinia Chimæram repræſentare videantur. Sed quid ita commoveor? quid alios increpo? agant alii quid velint, quid ad me? Jam audio oggannientes: Tune ſolus

lus

lus omnibus numeris perfectus es? Tu rem nobis trades inculpabilem? Ecquis eſt iſte, cujus

---- ---- ---- longe vicit ſapientia cunctos?

Eſt ſane rara avis in terris, fateor, ſilentium modo! ſilentium! compeſcite ſtrepitum, quid ita vehementer in me efferveſcitis? Dicam quid ſentiam; dari quidem Viros eruditos & ſumma celebritate conſpicuos, quos abſit ut comprehendam ſub numero modo memoratorum & de quibus non niſi debito honoris & venerationis cultu mihi ſermo erit; interim tamen materiam hanc, quam pro ingenii modulo explanandam ſuſcepi, ideo ab illis imperfecte nobis traditam & inſufficienter in ejus cauſam inveſtigatum eſſe credo, non quod eorum captum excederet, ſed potiſſimum quod ſua ingenia, nunquam non gravioribus negotiis diſtrahi ſolita, ad magis ardua applicarent. Cum itaque Viri docti eam nobis mancam & mutilam reliquerint; Pſeudo-phyſicorum vero & Pſeudo-Chymicorum ſententias ſatis confuſas omnes corrigere & examinare velle, difficilius foret, quam Augiæ ſtabulum

[illegible] *re : liceat ergo & mihi ſententiam meam* [illegible] *ferre, quæ, an nova ſit, neſcio; hoc* [illegible] *nullum hactenus in manus incidiſſe* [illegible] *m in totum amplectentem. Si forte, Be-* [illegible] *, novum hoc condimentum crambes hu-* [illegible] *o placuerit, bene eſt; ſin minus, placeat* [illegible] *s. Vale.*

[illegible] S R-

… ATIO

… RMENTATIONE.

… SCENTIA, Ebullitio, … *endo, ebulliendo* Græcis di- … μα vel βρασμός, a verbo … *veo, bullio.* Fermentatio … ur etiam nomen profectum …, Græce ζέσις hinc Fer- … n Sacra Scriptura appella- … vel ζύμωμα quaſi a ζέω, … em ferveo ſignificat; prop- … ationem potus ex hordeo … llamus, Græcis dicebatur …

I I.

Peracta nominis deſcriptione, tranſeundum eſt ad definitionem rei. Per efferveſcentiam itaque hic non intelligitur, animi ſubitanea illa paſſio, quæ vulgo *ira* vel *excandeſcentia* vocatur; ſic enim *iraſcentes* dicuntur *exaſtuare*, *efferveſcere*, quorum quaſi mens exæſtuat, hinc Virgilius paſſim hominem valde iratum nominat *fervore furentem*, & alibi *tumida qui fervet ab ira*: forſan ideo irati *efferveſcere* dicuntur, quia eorum ſanguis præter modum per totum corpus citatior currit, incaleſcit, ebullit, intumeſcit & ſic veram efferveſcentiam ſubit; unde facies intenſe rubet, venæ turgent, oculi ſcintillant, vultus eorum eſt torvus & minax, dentibus frendent, ore ſpumant, calcant humum &c. Omnes hæ actiones, quæ oriuntur ab efferveſcentia totius corporis, primario agnoſcunt pro cauſa paſſionem animi; ut itaque improprie loquendo, & ſumendo cauſam pro effectu, animus ab ira *efferveſcere* & quaſi ebullire dicatur.

I I I.

Miſſa autem hac efferveſcentia, progrediendum eſt ad propoſitum. Vera itaque Efferveſcentia phyſica & Fermentatio ita definiri poteſt; quod nempe ſit *irregularis & inteſtinus partium corporis miſti motus, ſolito intenſior, nonnunquam cum, nonnunquam ſine caloris ſenſu perceptibilis.* Quod ſi motus iſte peragatur cum concitatiſſima ebullitione & ſtridore, ſubitoque incipiat & cito pereat, vocatur *Efferveſcentia.* Si vero lente tantum incipiens, ſenſim ſtadium ſuum abſolvat, nec notabiliter ebulliat, quamvis bullulas emittendo diutius perſeveret, vocatur *Fermentatio.* Non ſine ratione autem in definitione requiſitum eſt, ut corpus, quod Efferveſcentiam vel Fermentationem ſubire debet, ſit mixtum ad minimum ex duobus aliis; corpus enim ſimplex (per *corpus ſimplex* hic intelligo, non quod per totum ex particulis homogeneis eſt conflatum, ſed quodli-

bet corpus quod per ſe ſemper manet in eo ſtatu in quo eſt) nunquam efferveſcet vel fermentabitur; quippe omne quod movetur, movetur ab alio; eſt ergo neceſſe, ut, ſi corporis ſimplicis particulæ ſolito rapidiores moveri debeant, accedat aliquid novi, quod hunc motum ipſis imprimat; hocce itaque modo non amplius ſimplex corpus, ſed mixtum dicendum erit. Quandocunque igitur Efferveſcentia vel Fermentatio excitanda eſt, ſemper duo corpora ſunt conjungenda; quodlibet enim ſeorſim poſitum manebit, & ſervabit ſtatum eum quem habet; nulla enim ratio apparet, cur nunc potius & non prius motum hunc inſolitum adeptum fuerit. Nec nos moratur, quod, poſt vindemias, muſtum ex uvis expreſſum, ſine ullo additamento, fermentari videatur, ac ſi motum a ſe ipſo acquiſiviſſet; ad hoc autem inferius ſufficienter reſpondebitur.

IV.

Ex his patere arbitror, in quonam conſiſtat Efferveſcentiæ & Fermentationis differentia, ſi unquam talis ſit dicenda; aliter enim haud differunt quam gradu, vel, ut loqui ſolemus, ſecundum magis & minus. Efferveſcentia namque nihil aliud eſt quam intenſior Fermentatio; debilior vero & remiſſior Efferveſcentia eſt Fermentatio dicenda. Sunt quidem aliqui, qui longe majorem differentiam inter illas conſtituunt; verum hoc nihil impedit; illorum quippe hypotheſes & principia cum a meis ſint aliena, fieri non potuit, quin in diverſas quoque abierint opiniones; quanquam illos non redarguam, ſed permittam cuique ſuum pulchrum eſſe; præſertim cum judicium ſit penes Lectorem: interim tamen aliam differentiam inter Efferveſcentiam & Fermentationem non agnoſco, quam modo memoratam. Anne cauſa deflagrationis repentinæ pulveris pyrii ſicci, ex aliis fundamentis petenda eſt, quam ejuſdem humectati & in maſſam ſubacti, deflagrationis ſucceſſivæ? Vix credo; pulvis enim pyrius ſiccus ob eandem cauſam accenditur, ob quam humectatus; quamvis ille, ob ſiccitatem, ſubito flammam concipiat & ſu-

[illegible] ſcat, hic vero, ab humiditate impediatur ne tota [illegible] comburatur; unde hic ignis per aliquod tempus du- [illegible] rgo dicendum, duas has deflagrationes ſolo gradu [illegible] llam videlicet eſſe ſubitaneam & violentam, hanc au- [illegible] ſivam & debilem. Non aliter & Effervescentiam a [illegible] ione differre puto: Si etenim duo corpora, quæ hanc [illegible] excitare ſolent, ſint ſubtilia & facile permiſcibilia; [illegible] congreſſa fuerint, efficient Effervescentiam; quia a [illegible] ione & retroactione non impediuntur, ob facilem per- [illegible] corporum; hinc motus, quem excitant, cito fit & [illegible] Si vero corpora congredientia ſint impura, craſſa [illegible] ile penetrabilia; Fermentatio ſolummodo generabi- [illegible] actionem ſuam non primo impetu & ſimul exerere [illegible] ſed cum ſenſim tantum ſibi invicem permiſceantur, o- [illegible] rnus ille & debilis motus; qui nobis ſub Fermenta- [illegible] mine venit.

V.

[illegible] um ita ſe habeant, & viderimus Effervescentiam a [illegible] ione parum, aut nihil, differre; Lectorem Benevo- [illegible] monefactum volo, ut, ſi quid generale, vel utrique [illegible], in poſterum, brevitatis ergo, de uno ſolo dicatur, [illegible] de altero intelligat. Ideoque, ut in orbitam redea- [illegible] endum quomodo Effervescentia fieri poſſit. Fit au- [illegible] vel ex *duorum liquidorum*, vel ex *liquidi & ſolidi*, vel [illegible] *ſolidorum* permixtione; omnes enim ad hæc tria ge- [illegible] ri poſſunt: ubi notandum, quod priora duo ſint vul- [illegible] ſolo permiſcendorum congreſſu, nullo agente extrin- [illegible] Effervescentiam parere poſſint: ultimum vero genus non [illegible] s plane [illegible] poſſit, [illegible] m con- [illegible] habe- [illegible] Effer- [illegible] veſcen-

veſcentia, ſicuti in liquidis quæ proprio motu inteſtino gaudent; ideoque, ad illam promovendam, opus eſt motore externo, ut ex ſubſequentibus fuſius patebit.

V I.

Verum enimvero, antequam in triplicis hujus Effervescentiæ cauſas inquiramus, neceſſe eſt, ut ejus totum proceſſum & hiſtoriam præliminemus. Quod ergo attinet ad Effervescentiam primi generis, illa ſic peragitur: nimirum cum duo liquores effervescendo idonei invicem commiſcentur, ſubito oritur innumerabilium bullularum ſuperiora petentium congeries, cum vehementi ſtridore, ac ſi ſuper rapidiſſimo igne coquerentur, nonnunquam intenſus quoque ſentitur calor, cum vapore & fumo attollente ſe in auras: interdum vero vix, ac ne vix quidem, incaleſcunt: poſtquam iterum deferbuerunt, (quod cito fiet) tum interdum in fundo conſpicitur ſedimentum ſimile materiæ cuidam terreſtri, quod *præcipitatum* a Chymicis vocatur; interdum vero plane nihil videtur, adeo ut liquor mixtus, poſt effervescentiam, tam purus, tam pellucidus exiſtat, ut ante, quinimo ne veſtigium quidem ebullitionis præteritæ appareat. Effervescentia ſecundi generis, quæ oritur ex conjunctione liquidi & ſolidi, hoc modo fit: in ipſo congreſſus momento, incipit ebullitio cum ſpuma, ſtrepitu, & nonnunquam cum inſigni calore & fumo aſcendente; ſolidum, ſi non adeo compactum & grave ſit, ſtatim diſſolvitur, ejuſque fragmenta huc illuc diſperguntur; alterum aſcendit magno cum impetu, alterum ad fundum præceps ruit; unum alteri reluctatur, tendente hoc dextrorſum, altero ſiniſtrorſum; liquor, qui modo pellucidus erat, induit pallidum colorem & turbulentus evadit; jucundum hocce ſpectaculum aliquanto diutius durat quam præcedens effervescentia, donec tandem omnia labore (ut ſic dixerim) feſſa quieſcant; tum demum, ſolida materia in pulverem diſſoluta diſperſim in fundo conſpicitur, & liquor priſtinam pelluciditatem acquirit; ubi tamen notandum, quod

nonnunquam ſolidum illud, ſi verbi gratia, ſit metallum quoddam, adeo minutim diſſolvatur, ut liquori per totum immiſceatur, ſine notabili pelluciditatis diſpendio, ut quis putaret metallum durante ebullitione in auras avolaſſe, aut liquidi naturam induiſſe, cum tamen liquori formaliter adhuc inſit, quemadmodum ex præcipitatione patet. Quod ad tertii generis Effervesſcentiam attinet, quia unico tantum experimento ea ad oculum demonſtrari poteſt, differemus ejus hiſtoriam, donec ad experimenti ipſius explicationem perveniamus.

VII.

His ita recenſitis, procedamus ad cauſam mirabilis hujus Efferveſcentiæ inquirendam: quod ut eo felicius præſtemus, ante omnia neceſſe erit, ut præmittamus principia naturalia ſatis intelligibilia, & ab omnibus facile concedenda; ex quibus dein, more mathematico, rite demonſtrentur quæ demonſtranda ſunt, & ad leges mechanicas revocentur ſingula totius operationis phænomena. Quæ enim naturaliter peraguntur, quid opus eſt ut ipſis præternaturale quid attribuatur? ſicuti, ad Efferveſcentiam commode explicandam, quidam fecere, qui qualitates occultas neſcio quas conſtituerunt, ex quibus indiſcriminatim omnium rerum cauſas deduxerunt; generale ſane principium, & compendioſa philoſophandi methodus, ad quam addiſcendam triennium non requireretur. Sunt & aliqui, qui rem acu tetigiſſe putant, cum dicunt; dari certam quandam & innatam antipathiam inter corpora ad efferveſcendum opportuna; quæ cum conjunguntur, ob perpetuam inimicitiam unum alterum ſupprimere conari; hinc oriri

Iſta repentino ſurgentia prælia motu.

Sed, quæſo, quis corporibus illis poteſtatem præliandi indidit? quis claſſicum cecinit? annon vincendi deſiderium, pugnæ cupiditas, & odium inexpiabile, quo ſe mutuo proſequuntur, ſunt paſſiones animi? corpora ergo inanimata unde acquirunt illas?

illas? Jam ſcio; reſident, abſque omni dubio, in uno corpore, homunculi illi Pygmæi dicti, quos Plinius olim in extremis oris Indiæ quæſierat: hi cum gruibus congredientes, quæ nunc certo certius in altero latitabunt corpore, ſævum hunc & martialem conflictum excitant; non ſecus ac hodie fieri videmus, cum agmen Gallorum cuidam Germanorum turmæ occurrit, unde forte cruenta hæc oriatur effervefcentia: ſed ridicula hæc ſunt commenta, aniculis digniora, quam ut in foro Philoſophico circumferantur.

VIII.

Interim linquamus has Veterum nugas, & diſpiciamus, quid ea de re Recentiores Chimici ſenſerint: Quorum plerique, uti jam in præfatione innui, rem adeo obſcure explicarunt, ut vix credibile ſit illos, quid ipſi dixerint, ſciviſſe; eorum quippe principia, quæ captu difficiliora ſunt quam corpora quæ ex iis conſtant, adeo ſunt confuſa, ut ſi interrogentur quid ſint, clare definire non poſſint. Tantum abeſt, ut de illis claram & diſtinctam ideam habeant, ut primis etiam viis, cum ratiocinari incipiunt, hæreant atque idem per idem (ut dici ſolet) explicare fruſtra conentur. Quæras enim ex quodam quid ſit Effervefcentia? Reſpondebit: *Eſt motus ille præternaturalis, ortus ex congreſſu alcali & acidi.* Sed quid eſt alcali? *quod cum acido efferveſcit.* Quid ergo acidum? *quod cum alcali efferveſcit:* hem! quam ſolide. Vides ex illis, quam firmo fundamento Chymicorum principia inſiſtant, & quid de cæteris judicandum; quid de particulis ſalinis, quid de ſulphureis, quid de mercurialibus, quid de nitroſis; quid & de mixtis, ut de alcalicis-lixivialibus, de acido-ſulphureis, de nitro-aëreis, & quid de infinitis aliis: quæ omnia, ſi unquam in rerum natura exiſtant, mente tamen nec concipiunt, nec aliis quid ſint patefacere poſſunt. Dolendum ſane eſt, quod, cum Chymia ſit una ex præſtantiſſimis artibus & ſcientiis, Naturæ indagatores illam non in meliorem formam redegerint magiſque excoluerint. Scio

 qui-

quidem ſola horrenda & monſtroſa nomina quoſdam abſterruiſſe, ut ex iis, tanquam ex ungue leonem, arduum hujus ſcientiæ aditum patere crediderint: optandum itaque eſſet, ut barbaræ hæ voces eliminarentur, vel ſaltem recte definiretur quid per illas ſit intelligendum; &, cum omnia ordine peragantur, nova quoque principia phyſica conſtituerentur: quo facto, dubium non eſſet, longe mirabiliora ex naturæ inexhauſto myſteriorum fonte erui poſſe. Hoc mecum perpendens, vires meas experiar, annon & præſens negotium mechanicæ legibus explicare poſſim; ad quam normam, aliarum operationum Chymicarum cauſas perveſtigare mihi difficile non eſſet. Neſcio quidem quid ſit alcali, neſcio quid ſit acidum, vel alia Chymicorum nomina: pono primo nihil ejuſmodi exiſtere, ſed demum, an, & quid, iſta ſint omnia, ex poſitionibus naturalibus, & nunquam non facile concedendis, deducere conabor.

I X.

In hunc finem poſtulabo ſequentia, tum per ſe ſatis nota, tum deinceps demonſtranda: 1°. Aërem eſſe corpus valde fluidum & vi elaſtica præditum. 2°. Aërem compreſſum, & ſui juris factum, qua data porta erumpere, ſeque in majus ſpatium extendere. 3°. Aërem ſub liquore quovis contentum, nulloque alio obſtaculo impeditum, ſub forma bullæ ſurſum premi ad ſummitatem uſque liquoris. 4°. In quovis corpore, & in qualibet ejus particula, contineri aliquid aëris & quidem compreſſi; hoc verum eſſe infra demonſtrabo. 5°. Motum particularum concitatiorem excitare calorem. Præter has autem hypotheſes generales, ſuppono & hæc ſpecialia. 6°. Quod duo corpora, quæ invicem commixta efferveſcentiam producere debent, ſint ex certis particulis ab aliis figura diſtinctis conflata; ideoque 7°. quod particulæ unius corporis ſint tetraëdra, quæ nempe conſtant ex quatuor triangulis iſopleuris; Et hoc corpus voco *agens*. [*Fig.* 1.] 8°. Quod particulæ alterius corporis ſint ex tetraëdris

TAB. I. *Fig.* 1. 2.

drìs baſes ſibi mutuo obvertentibus compoſitæ; Et hoc corpus voco *patiens*. [*Fig*. 2.]

X.

His præſuppoſitis, difficile non erit veram, ſeu ſaltem probabilem, cauſam Effervefcentiæ inquirere. Si enim duo corpora ad effervefcendum opportuna, quorum unum *agens*, alterum *patiens* nuncupavi, congrediuntur, & eorum particulæ invicem intime miſcentur; fit, ut quælibet particulæ corporis *agentis*, quas in hyp. 7. tetraëdricas poſui, in quaslibet particulas *patientis*, figuram in hyp. 8. deſcriptam habentes, impingantur, & quia illarum particularum anguli prominentes, in harum ſinuoſos & concavos, cum impetu, cuneorum inſtar, infiguntur [*Fig*. 3.] aliter fieri nequit, quam ut particulæ corporis *patientis*, tantam vim ſuſtinere non valentes, per medium diffindantur [*Fig*.4.]; quo facto, aëri compreſſo, in ea, per hyp. 4. contento, exitus paratur, & tunc a carcere vinculiſque ſuis liberatus, magno ſtrepitu, per hyp. 2. erumpit, majuſque ſpatium occupat, tandemque, per hyp. 3. ſub forma infinitarum bullularum, ac ſi ab aqua ebulliente erumperet ad ſuperficiem uſque liquoris (ſi alterutrum ad effervefcendum aptorum, vel utrumque, ſit corpus liquidum) aſcendit, ubi ſpumam, qualem in aqua ſaponis particulis ſaturata vehementerque quaſſata conſpicimus, excitat; hinc mirum non eſt, quod ob aërem ſubito ſe expandentem, & e particulis exeundo has ad invicem allidentem, intenſus nonnunquam producatur calor, per hyp. 5. TAB. I. *Fig*. 3. 4.

XI.

Et hæc generalia phænomena communia ſunt fere omnibus Effervefcentiis, quorum cauſas ex his hypotheſibus breviter &, ni fallor, ſatis perſpicue me explicaſſe confido: interim obiter advertendum, quod Chymicorum acidum nihil aliud ſit, quam id quod ego voco corpus *agens*; illorumque alcali mihi ſub corporis

poris *patientis* nomine veniat : ſimulque apparet, cur poſt efferveſcentiam, ſi acidum & alcali, quæ nunc conjuncta ſunt, rurſus ope ignis, aut alia aliqua re ſeparentur, acidum illud cum alio alcali, quod nondum efferveſcentiam paſſum eſt, iterum quidem efferveſcere poſſit, alcali vero, quod ſemel efferbuit, cum alio acido nunquam amplius efferveſcat : evidens namque eſt ex hypotheſibus meis, acidi (liceat illas in poſterum ſic vocare) ſeu, quod idem eſt mihi, corporis *agentis* particulas efferveſcendo non mutari, ſicuti alcali vel corporis *patientis* particulæ mutantur ; ſiquidem illæ, poſtquam has diffregerint, integræ manent, ideoque ad ulterius efferveſcendum adhuc idoneæ ; hæ vero, quia ab illis diffringuntur, & aër intra contentus excluditur, mirum non eſt, ſi, poſt unam efferveſcentiam, nullam amplius efficere queant : verum nihilominus tamen eſt, quod nonnunquam (quamvis raro) acidum, æque ac alcali, poſt efferveſcentiam inidoneum reddatur ; illud autem inde fit, quando particulæ alcali ſunt nimis duræ, vel contra particulæ acidi ſunt nimis molles & debiles, ut efferveſcendo, & impingendo, anguli ejus abradantur, vel ſaltem obtundantur ; ex quo ſequitur, omnem ſimul etiam ejus vim efferveſcendi in poſterum obtundi. Perperam itaque Cl. BONTEKOE, *in ſuo Tract. de motu*, ſtatuit, non ſolum acidum, ſed & alcali, poſtquam efferbuerunt, ſi rurſus ſeparentur, vim ſuam efferveſcendi retinere ; cum hîc de ſolo acido id oſtenſum ſit : idcirco Cl. Vir ex hoc non recte argumentatur ; *magnam intercedere differentiam inter efferveſcentiam & fermentationem*, propter hanc rationem, *quia acidum & alcali poſt efferveſcentiam ſeparata iterum efferveſcant, quod vero inter particulas ex fermentatione ſuperſtites fieri nequeat*. Sed, tanti Viri pace ; nam præter hoc quod jam oſtendi, alcali poſt primam efferveſcentiam amplius non efferveſcere (niſi forſan ejus particulæ non omnes, a particulis acidi, in prima efferveſcentia, ſint diffractæ, quæ deinde ſecunda diffringi, & de novo efferveſcentiam generare poſſunt ; ſed hæc altera primam non ſpectat, quia ſaltem illæ particulæ, quæ in prima efferbuerunt, in ſecunda id amplius non

faciunt)

faciunt) addi poteſt & hoc, quod ideo, poſt quaſdam fermentationes, particulæ ſuperſtites amplius fermentari nequeant; nempe, ob eandem rationem, ob quam alcali particulæ, poſt effervefcentiam, ulterius non effervefcunt: nam iſta corpora, quæ ſine additamento, fermentari videntur, ut, ex. gr. vinum muſtum, hordeum in aqua maceratum, & alia ejuſmodi generis, ſolas alcali, ſeu ut ſupra nominavi, corporis patientis particulas in ſe habent; ideoque, ad fermentationem producendam, opus eſt ut acidi, ſeu corporis agentis particulæ, extrinſecus adveniant, quæ illas diffringant, & fermentationem excitent: has autem merito ex aëre externo & ambiente derivamus; ſiquidem variis experimentis conſtat, illum multis acidi particulis refertum eſſe: hinc, cum muſtum vel aliud fermenteſcibile aëri exponitur, ſenſim ejus particulæ acidæ ſeſe in poros muſti inſinuant, & cum hujus particulis alcalicis conjunguntur, illaſque modo ſupra commemorato divellunt, ut aëri incluſo exitum præbeant; quo fit, ut putemus muſtum per ſe ſolum, ſine additione alterius, fermenteſcere: hinc etiam evenit, ut, poſt fermentationem primam, ulterius non fermentetur, quia acidi nullas, ſed tantum alcali particulas, in ſe continet; jam ſupra autem demonſtravi alcali particulas non effervefcere poſtquam ſemel efferbuerint.

XII.

Hæc & multa alia, quæ in effervefcentia obſervantur, ex his hypotheſibus commode explicari poſſunt: ſolummodo itaque reſtat, ut videamus, an illæ quoque rationi & veritati conveniant, & quibus argumentis id probari queat. Quod ergo attinet ad duas ultimas hypotheſes ſpeciales, quibus nempe particulis acidi & alcali, hanc, & non aliam, figuram aſcripſi; fatendum quidem eſt, nullo experimento id poſſe demonſtrari, ob exiguitatem particularum, quæ omnem aciem oculorum effugiunt & adminiculum microſcopiorum eludunt: ſufficit itaque mihi, ſi talem ipſis attribui figuram, quæ maxime convenit ad naturam effer-

veſcentiæ explicandam, dummodo nec rationi, nec experientiæ repugnet: nam ſicut Aſtronomi illam hypotheſin Syſtematis Mundi pro vera amplectuntur, quæ phænomenis cœleſtibus, & ſiderum motui explicando, optime conducit; quamvis certis & invictis argumentis veritatem illius demonſtrare non poſſint; ſed tam diu illam retinent, donec alia probabilior & commodior in lucem prodeat: liceat ſic etiam, & hîc ponere, quæ experientia quidem probari non poſſunt, illi tamen nec etiam adverſantur. Interim rationes non deſunt, ob quas poſui particulas illas ſic, & non aliter, figuratas eſſe. Particulæ enim acidi debent primo eſſe anguloſæ, quia hoc patet ex guſtu; nam ſi eſſent læves, vel teretes, linguam non ita vellicarent & quaſi pungerent: deinde; ab omni parte æqualiter angulis debent eſſe inſtructæ; nam, ſi alicubi eſſent læves, ſicuti conus, poſſet fieri ut, acido cum alcali congrediente, nulla efferveſcentia excitaretur; poſſent enim acidi particularum facies non anguloſæ impingere in particulas alcali, & ſic has non diffringerent, nullamque conſequenter effervefcentiam parerent: quod autem poſuerim illas eſſe tetraëdra, & non cubos, vel octaëdra, vel alia corpora regularia, quæ etiam undiquaque æqualiter angulis ſuis ſunt munita; hoc ideo factum eſt, quia tetraëdrum, inter corpora regularia, acutiſſimos habet angulos, & ſic ad diffringendum aptiſſimos: nec etiam commodè poſſunt eſſe corpora irregularia, ut ex. gr. pyramides; nam quo anguli verticales in pyramide acutiores ſunt, eo anguli ad baſim ſunt obtuſiores; & ſic poſſet accidere, ut anguli obtuſi impingerentur in alcali particulas; quo rurſus effervefcentia plane non, aut ſaltem difficulter, perageretur: manet ergo, quod particulæ acidi, vel corporis *agentis*, ſint tetraëdra. Quod autem particulæ alcali, vel corporis *patientis*, ſint ut ſupra hyp 3. poſui (concedendum quidem eſt, quod non neceſſe ſit, ut exacte conſtent ex tetraëdris baſes ſibi mutuo obvertentibus; nam loco tetraëdrorum ponere poſſem quaslibet pyramides rectas triangulares, dummodo forment angulos ſinuoſos, qui commode excipere poſſint angulos prominentes particularum acidi) eodem

eodem fere modo demonſtrari poteſt : nam ſicuti particulæ acidi undiquaque debent habere angulos prominentes, ſic particulæ alcali circumcirca angulis ſinuoſis debent eſſe inſtructæ ; ut, quocunque acidi particula impingatur in particulam alcali, inveniat locum, a quo, ceu in ſinum, recipiatur, & facilius eam diffringere poſſit.

XIII.

Omnia hactenus poſita rem, ſi non omnino certam, ſaltem probabilem reddunt : interim quod ad priores hypotheſes generales attinet, illæ, procul dubio, prolixa demonſtratione non indigent; ſiquidem ab omnibus pro veris recipiuntur; ſola quarta excepta, quæ ſcrupulum movere poteſt : *quod* nempe *in corporibus & eorum particulis contineatur aliquid aëris, & quidem compreſſi.* Huic tamen, ſi rem attentius conſideremus, & ratio & experientia ſuffragatur : nam cum quodlibet corpus ſuos poros habeat, neceſſe eſt, ut pori illi aëre jam ſint repleti, vel non; ſi prius, habeo quod volo; ſi poſterius, aër ſe demum in poros inſinuabit, ſi nondum inſit : quare? quia aër ubicunque ab alio aëre nullum obſtaculum inveniens, in eum locum, ope ſui elaterii irruit, & quod ab aëre vacuum eſt omnino replet, ſicuti videmus in vaſe (ut BOYLE vocat) recipiente evacuato, cui ſi minimum foramen infligatur, dito citius aër externus perrumpet, ſpatiumque totum recipientis mole ſua occupabit. Dantur quidem corpora (quod negandum non eſt) quæ poros adeo ſubtiles habent, ut ne unica particula aërea penetrare poſſit, qualia ſunt vitra, lapides, gemmæ, metalla, & alia duriora corpora : nihilominus tamen in his aër jam ineſt; nam, cum nullum corpus tam perfecte incipiat generari, ut jam eſt in ſtatu perfectionis; dici poteſt, quod ejuſmodi corpora, in principio generationis, ſint admodum mollia, laxa, & rara, & eorum pori ſatis patuli, & ampli, ut aërem externum recipere poſſint; quo fit ut, in continuatione generationis, etiamſi pori exteriores anguſtentur,

aër nihilominus in cellulis internis maneat, & proinde, durante generatione, aër intrinſecus condenſetur; quia, ſi pori interiores incipiunt coarctari, & aër inſitus, ob poros externos jam valde anguſtatos, amplius exire nequit; neceſſe eſt, ut & aër ipſe interior in minus ſpatium cogatur, ideoque externo denſior evadat; non ſecus, atque aër naturalis fluiditatis in veſica contentus, ipſius veſicæ compreſſione, fit denſior, ſeu ad minus volumen redigitur. Hinc itaque contingit, ut hæc corpora, cum ſunt in ſtatu ſuo perfectionis, etiamſi ſumme dura ſint, nihilominus aërem compreſſum contineant.

X I V.

Verum, præter has rationes, ſuppetunt etiam experimenta; quibus exiſtentia aëris in corporibus probari poteſt. Videmus enim, ſi aqua, vel alius liquor, ſuper igne coquatur, bullulas excitari; manifeſto certe aëris intra latentis indicio, qui ope ignis dilatatur, omniaque vincula, quibus retinebatur, ſolvit, &, ob levitatem, ad ſuperficiem uſque fertur, ubi tales bullulas format: hinc fit, ut piſces in aqua quæ ſemel ebulliit, vivere non poſſint, ob defectum nempe aëris, qui in ebullitione omnis exhalavit; aërem enim & piſces haurire æque neceſſe eſt, ac cætera animalia; in hunc finem eorum branchiæ conditæ ſunt, ut, illarum ope, aërem, qui ad vitam ſuſtentandam neceſſarius eſt, ab aqua ſecernant, uti de hac re recte ſenſit Cl. MAJOWIUS. Similiter liquoribus aërem ineſſe experimenta Boyliana confirmant: ſi enim in vaſe recipiente (ſic apellat R. BOYLE) liquor aliquis includatur, ex quo deinde, ope antliæ pneumaticæ, aër extrahatur; ſtatim videbimus innumeras bullulas aëreas (ſicuti in aquæ ebullitione) ex liquore prorumpere: nimirum, cum aëris externi preſſio ſublata eſt, particulæ aëreæ, in liquore hinc inde diſperſæ, ob vim ſuam elaſticam ſe extendunt, &, cum antea inconſpicuæ eſſent, nunc in bullulas viſibiles intumeſcunt,

ac,

ac, ob modo allegatam rationem, ſummum petunt. Tale experimentum etiam inſtitui poteſt in corporibus ſolidis; ſumatur enim corpus quoddam, ſed non adeo durum, (quale ſunt lutum, creta, ceruſſa & aliæ materiæ terreſtres,) hocque indatur recipienti, &, ut bullulæ exeuntes eo melius conſpiciantur, affundatur aqua; poſtmodum, eodem ut ſupra modo, aër ex recipiente exantletur; quo facto, non ſolum ex aqua affuſa, ſed etiam ex illo corpore bullulas aëreas prodire obſervabitur: ex quo liquido conſtat, multum quoque aëris corporibus ſolidis ineſſe. Hinc etiam ratio petenda eſt, cur corpora duriora, ut ſunt lapis, vitrum, & alia, ſi in ignem injiciantur, diſſiliant & diſrumpantur: item, cur medio æſtatis fervore terra noſtra, aliquibus in locis, rimis & hiatibus quaſi fatiſcat. Hæc omnia, inquam, proveniunt ab aëre, qui in iſtis corporibus latet; nam, cum aër hic interior a calore externo agitatur, diſtenditur & explicatur; tunc, ſibi exitum quærendo, latera pororum magna vi & niſu divellit, & impetuoſe diffringit; ut hac ratione, totum corpus diſrumpatur; vel, ſi non adeo durum & compactum ſit, per rimas ſaltem & fiſſuras, aër interior ita agitatus libertatem ſuam quærat.

XV.

Allata experimenta ſatis, ni fallor, oſtendunt exiſtentiam aëris in corporibus; ſed & alterum nobis oſtendendum eſt, nimirum, quod aër iſte ſit aëre naturalis conſiſtentiæ denſior: hoc autem ſequenti experimento demonſtratur. Sumatur vaſculum, TAB. I. *Fig. 5.* liquore quodam acido ſemiplenum, ut ACDB; & tubus aliquis vitreus EF, altera parte E clauſus, altera vero F apertus, impleatur eodem liquore; hujus vero orificio F indatur globulus G de luto, vel creta, in quibus nempe multæ particulæ alcali inſunt, confectus; ſtatimque indice ſuper orificium F poſito, invertatur tubus, & liquori in vaſculo contento immergatur orificium F; amoto digito, mox obſervabitur magnam efferveſcentiam excitari, quæ per aliquot horas du-

 rabit,

rabit, donec omnis aër intra particulas alcali contentus, ſolutis vinculis quibus coarctabatur, ad ſuperiora aſcenderit, & materia terreſtris ſubſederit; tum demum animadvertetur, aërem hunc, poſtquam deſpumaverit, in ſuprema parte, depreſſo liquore, magnum ſpatium E H occupare: quandoquidem autem ſuperficies H liquoris in tubo altior eſt ſuperficie liquoris in vaſculo, erit aër, in ſpatio E H contentus, aliquantulum rarior aëre externo; proinde, ut fiat ejuſdem conſiſtentiæ, opus eſt, ut aut tubus altius immergatur, aut plus liquoris affundatur, donec interiori ſuperficie interna coincidat cum ſuperficie exteriori; quo facto, erit quidem ſpatium E H priori paululum contractius, & aër in eo contentus naturalis conſiſtentiæ; nihilominus tamen adhuc majus erit duplo, triplo, quadruplo (pro diverſitate materiæ terreſtris ex qua globulus conficitur, quæ ſcilicet plus vel minus particularum alcali in ſe continet) quam quod tota moles globuli G occupat; quod certum indicium eſt, aërem iſtum, cum omnis adhuc in globulo continebatur, multo denſiorem fuiſſe, quam aër externus eſt: poſito enim globulum conſtare ex una parte materiæ terreſtris, & ex una parte pororum, quibus nempe aër condenſatus ineſt; vel, quod eodem recidit, ſpatium, quod materia terreſtris occupat, eſſe æquale ſpatio, quod aër in poris contentus replet; ſi nunc ſpatium E H ſit duplum ſpatii globuli totius; ſequitur, aërem in globulo contentum quadruplo denſiorem eſſe quam eſt aër externus; ſi triplum, ſextuplo; ſi quadruplum, octuplo; & ſic porro in ſubdupla ratione: ſi vero ponatur ſpatium materiæ terreſtris non eſſe æquale ſpatio pororum, ſed in alia ratione majoris vel minoris inæqualitatis, denſitates aëris in globulo æque facile ad calculum revocari poſſunt; hæc autem hujus loci non ſunt.

XVI.

Huic haud multum abſimile experimentum inſtituit Cl. MAJOWIUS, ſed in longe alium finem; ut nempe experiretur,

utrum aër de novo generari poſſit; poſt varia namque experimenta quæ fecit, concludit tandem, hunc aërem, ſpatium EH occupantem, revera non aërem eſſe, ſed ſolummodo auram quandam & halitum, qui ex globulo G ab æſtu excitatus in tubo aſcendit; & ſic putavit, ipſam ſubſtantiam globuli in hanc auram mutari, ſicuti aqua a calore in vaporem mutatur. Aſt videmus, quod vapor, ſi colligatur, iterum in aquam convertatur, ejuſque naturam induat: aura autem hæc manebit aura, nec amplius in materiam globuli degenerabit: quid ergo dicendum? nihil aliud, quam quod ſit aër, condenſatus, in poris globuli jam præexiſtens, nec de novo generatus: habet quippe vim ſuam elaſticam, ut aër naturalis; quod & ipſe Cl. Vir non ſolum fatetur, ſed etiam experimento quodam comprobat: anne autem datur aliud corpus fluidum & vi elaſtica præditum, præter aërem? vix puto. Affert quidem rationem, cur auræ huic naturam aëris denegaverit; quod videlicet experientia edoctus ſit, auram prædictam vitæ ſuſtinendæ non eſſe idoneam: quaſi vero, quia vitam non ſuſtentat, iccirco aër non eſſet: videmus & ipſum athmoſphæricum noſtrum aërem, tempore peſtis, non ſolum vitæ ſuſtinendæ non idoneum eſſe, ſed prorſus noxium; anne iccirco tum deſiit eſſe aër? abſurdum foret hoc dicere. Non negandum quidem eſt, in ſpatio EH multas alias particulas, præter aërem, hoſpitari; quæ forſan, ob impetuoſum efferveſcentiæ motum, ab ipſo liquore acido, vel a globulo, abreptæ &, una cum aëre, ſurſum evectæ fuerunt: hinc mirum non eſt, ſi talis aër, iſtis miaſmatibus refertus, & ab animalibus hauſtus, ipſis vitam conſervare non valeat; præſertim cum pateat, & ſpiritum nitri, & globulum ferreum (quibus Cl. Vir utebatur) multis particulis impuris, & quaſi venenatis, ſcatere, quæ, ſi per reſpirationem intro aſſumantur, maſſam ſanguinis inquinare, mortemque inducere, facile queant: ſi forte, loco ſpiritus nitri, adhibuiſſet alium liquorem acidum benigniorem, ex. gr. ſpiritum vitrioli, &, loco globuli ferrei, ſumſiſſet terreſtrem, ut in noſtro experimento; procul dubio animalculum ab iſto aëre non interiiſſet,

aut

aut ſaltem vitam diutiùs protraxiſſet; adeo ut inde colligere liceat, aërem, per ſe, animalculum non interfeciſſe, ſed tantummodo per accidens, quatenus nempe copioſis particulis diverſi generis, & ad vitam conſervandam ineptis, ſcateat.

XVII.

Verum ut noſtræ rei certiores ſimus, videlicet ipſam ſubſtantiam globuli in aërem ab æſtu non commutatam eſſe, ſed aërem revera jam in globulo præextitiſſe, ideoque non de novo generatum, inſtitui poteſt ſequens experimentum. Globuli terreſtris bene exiccati pondus, ante efferveſcentiam, accuratiſſime ad lancem examinetur; deinde, poſt efferveſcentiam, cum omnes particulæ globuli ad fundum ſubſederint, tota globuli maſſa, quæ nunc diſſoluta jacet, ſollicite ex liquore recolligatur, & (ut prius) bene exiccetur, tandem exiccatæ materiæ pondus iterum ope bilancis inquiratur; hoc facto, videbimus ſubſtantiam globuli nihil ponderis perdidiſſe, vel ſaltem vix centeſimam partem, quod forſan, durante efferveſcentia, cum aëre exhalavit: at ſecundum D. MAJOWIUM longe majorem partem ponderis amittere debuiſſet; ſiquidem ex ejus hypotheſi ſequitur, totam molem aëream, tubi ſupremam partem occupantem, ex ſubſtantia globuli fuiſſe abſumptam; ſicque pondus ejus notabiliter fore diminutum, quod tamen eſt contra experientiam. Obiter hîc liceat perpendere Cel. *Alphonſi* BORELLI opinionem circa efferveſcentiam quæ † etiam experimento ſupra allato non admodùm congruit; exiſtimat enim in congreſſu acidi & alcali, cum ebullitio excitatur, ipſius acidi vel alcali particulas celerius moveri, & in gyrum motas aſcendentes has bullulas formare, *particulæ*, inquit *mobiliſſimæ, ſphærice ſe dilatando, ampullas bullularum efformant, non omnino denſas & plenas, ſed valde raras, nempe vacuitatibus grandiuſculis interceptis; Unde fit, ut facile concidant, & ad priſtinum ſpatium anguſtum redigi momento poſſint*: ex quibus clare apparet, Cel. Auctorem cauſam ebullitionis non ab aëre, in particulis alcali

† *Vid. Libr.* de Motu Animalium *Part. II. Prop.* 29.

alcali condenſato, deduxiſſe; cum crediderit, ipſas acidi & alcali particulas, ſaltem quæ admodum ſunt ſubtiles & mobiles, ſe ſphærice dilatare, & in gyrum moveri, ſicque amplius ſpatium acquirere; unde tales oriri bullulas, ac ſi eſſent ab aëre productæ, quamvis non ſint; proinde conſequi putabat, ut, poſtquam motus iſte particularum violentus ceſſaverit, bullulæ hæ iterum concidant, & particulæ, quæ in circulum gyrando illas formabant, rurſus conjungantur cum acido, vel alcali, a quo prius abripiebantur. Sed hoc non adeo veritati conſonum eſſe, liquet ex ſuperiori experimento; ſequeretur enim ex hypotheſi Auctoris, totum ſpatium EH, poſtquam effervescentia peracta ſit, omniſque motus & calor ceſſaverit, a liquore repletum iri; uti hoc ex ejus ſententia quilibet conjicere poteſt: experimur autem contrarium; nam etiamſi per annum in eo ſitu perſiſteret, nunquam tamen ſpatium EH liquore plenum obſervaretur: neceſſario itaque ſequitur, ut ſpatium illud ſit aëre naturali repletum, &, cum aliunde advenire nequeat (nam eum ex ſubſtantia acidi vel alcali generatum eſſe jam rejecimus) in ipſius globuli poris prius inſederit: quod, procul dubio, jam ſatis ſuperque, tum ratione, tum experientia, oſtenſum eſt.

XVIII.

Hac occaſione, mihi temperare non poſſum, quin moneam, quam commode corporum vis elaſtica ex noſtra hypotheſi explicari poſſit; poſito nempe (quod modo demonſtratum eſt) *quod in cujuslibet corporis poris ſit aër incluſus, & quod aër iſte ſit vi elaſtica præditus.* Omnia autem corpora, vel ſunt perfecte elaſtica, id eſt, qua celeritate inciderunt, ea celeritate reſiliunt; vel plane non ſunt elaſtica, id eſt, poſt ictum non repercutiuntur amplius; vel denique imperfecte ſunt elaſtica, id eſt, poſtquam inciderunt, reſiliunt quidem, ſed non ea celeritate qua impacta ſunt. Ad hoc itaque explicandum, intel-

ligatur multarum veſicularum, aëre quam denſiſſime repletarum, congeries communi quodam velamento, undique perforato, ſtricte involvi, adeo ut videatur unum continuum corpus eſſe; facile nunc intellectu eſt, ſi hæc moles veſiculoſa cum impetu verſus terram, vel aliud durum corpus, projiciatur, eadem vi, qua advenerat, reſilire neceſſe ſit, ſi modo membranæ veſicularum impetum ſuſtinere valeant; ſi vero quædam ob infirmitatem diſrumpantur, evidens eſt, totam molem tanta vi, qua inſiliit, non reſilire; ſic, ſi omnes veſiculæ diffringerentur, plane non repercuteretur: quis autem non videt, cauſam hujus reſilitionis, vel non reſilitionis, deducendam eſſe a ſolo elaterio aëris in veſiculis incluſi? ratione enim & experientia conſtat, aërem, qua vi comprimitur, eadem omnino ſeſe reſtituere niti, ideoque, ſi ope percuſſionis veſiculæ coarctantur, neceſſe eſt, ut aër in illis contentus magis etiam condenſetur; proinde, cum quælibet veſicula, eadem vi, qua comprimebatur, ſeſe reſtituere conetur, fit ut tota compages veſicularum ſimul, tanta celeritate, quanta alliſa eſt, reſiliat: ſi vero forte contingat ut, in percuſſione, aliquæ vel plures rumpantur, tanta celeritate tota moles non repercutietur; nam illæ veſiculæ, quæ ruptæ ſunt, & ex quibus aër incluſus, per poroſum involucrum, expreſſus eſt, nullam vim prorſus habent ſeſe extendendi; ideoque ſola vis ſuperſtitum, quæ integræ ictum ſuſtinuerunt, tanta non eſt, ut totum corpus, priſtina celeritate, repellant; ſi itaque accideret, ut, per ictum, omnes veſiculæ rumperentur, tota moles veſicularum plane non repelleretur; quia tum nulla vis repellendi ſupereſſet, ſiquidem aër, qui illam in veſiculis unice cauſabatur, jam totus per velamentum poroſum expulſus eſſet. Ut hoc nunc ad præſens negotium applicetur: quodlibet corpus huic moli veſiculoſæ comparari poteſt; ſicuti enim hæc tota ex pluribus veſiculis aëre repletis eſt compoſita, ſic illud pariter ſuos innumerabiles poros denſo aëre refertos habet; ſciendum itaque, quod in uno corpore parietes pororum ſint quidem flexiles, ſed ſimul tenaces, adeo ut poſſint coarctari, ob flexibilitatem, ſed non rumpi, ob tenaci-

ſtacitatem; hinc, ſi cum impetu, verſus aliud corpus, quod etiamſi non habeat vim elaſticam, ictui tamen non cedat, pellatur, eodem impetu iterum (ob aërem in poris æquali vi, qua per ictum compreſſus eſt, ſeſe extendentem) retropelletur; & hoc corpus eſt, quod ſupra perfecte elaſticum nuncupavi, qualia ſunt ſilices, vitra, cryſtalla, gemmæ &c. omnia videlicet duriora, quæ malleo nequaquam molliuntur: corpora vero plane non elaſtica, ut ſunt plumbum, ſtannum, & ſi qua ſunt ejuſmodi alia, poros ita habent diſpoſitos, ut, ſi a quacunque vi minima comprimantur, aër, in illis incluſus, novam hanc preſſionem non patiens, latera pororum mollia perrumpat, & in auram apertam exeat; hinc fit, ut hæc corpora poſt ictum non reſiliant, nec priſtinam figuram recuperent, ut videre eſt ex nota ab ictu ipſis inflicta: dantur inſuper corpora imperfecte elaſtica, ut ferrum, argentum, aurum, & omnia fere metalla, quæ quidem reſiliunt, ſed celeritate diminuta; hoc autem inde evenit, quia, poſt ictum, aliqui pori, ob infirmitatem laterum, diſrumpuntur, aliqui vero, ob firmiorem nexum, integri ſervantur; omnia itaque, quæ ſupra de mole veſiculoſa dicta ſunt, ea pariter & de his intelligi queunt. Quod ad cæteras corporum elaſticitates attinet, quæ videlicet oriuntur ex contorſione, inflexione, tenſione &c. omnes eæ ab eadem cauſa proveniunt; quia, in omnibus his actionibus, corporum pori anguſtantur, ideoque & aër incluſus comprimitur; unde illa in priſtinum ſtatum ſeſe reſtituendi vis oritur; de quibus itaque plura verba facere hîc lubenter ſuperſedeo. Interim jam prævideo objectionem: quod nempe, cum corporum elaſticitatem explicare voluerim, ipſius aëris vis elaſticæ cauſam tanquam cognitam poſuerim; quod cuipiam videretur, *hoc eſſe idem per idem explicare*, vel, ut loqui conſuevimus, *id ſupponere quod eſt in quæſtione*: verum quidem eſt, ex his cauſam elaterii aëris cognoſci non poſſe; longe enim alius eſt loci, quam ut hic eam ex intimis naturæ penetralibus prolixe deducam: attamen, cum in jucundam hanc ſpeculationem obiter inciderim, oſtendere volui, quo pacto vis elaſtica omnium corporum

originem ſuam ſoli debeat aëri elaſtico; adeo ut non opus ſit, ad ſingulas, & novas elaſticitatis ſpecies; nova quoque excogitare fundamenta.

XIX.

Si cui hæc minus perfecte explicata, aut ſuæ phantaſiæ non ad amuſſim ſatisfacere videantur, is ipſe, ut ſibi videbitur, corrigat, addat, vel demat, per me licet; interim revertamur ad propoſitum. Jam ſupra vidimus, quomodo, & ex quibus cauſis, effervefcentia ex mixtione duorum liquidorum, quam primi generis, & ex mixtione liquidi & ſolidi, quam ſecundi generis effervefcentiam nuncupavimus, peragatur; nunc ſequitur, ut videamus an, & unde, effervefcentia ex mixtione duorum ſolidorum, quæ tertium genus conſtituit, oriatur. Patet autem ex iiſquæ ſupra dicta ſunt; primo, quod corpora, quæ effervefcentiam excitare debent, id eſt, acidum & alcali, intime ſibi invicem miſceri neceſſe ſit; deinde, quod acidum & alcali, vel alterutrum ſaltem, debeat habere motum, ut particulæ acidi poſſint alcali particulas diffringere; quieſcendo enim hoc non efficient: duo itaque liquores effervefcibiles, vel liquidum & ſolidum, ex ſola mutua combinatione, per ſe, ſine actione externa, effervefcunt; liquidum enim, cum ſit in minutiſſimas particulas diviſum, facile cum altero liquido, vel ſolido, quoad omnes partes, in illius poros ſe inſinuando, in hujus penetrando, miſceri poteſt, & poſtquam eſt mixtum, liquidi particulæ, cum ſint in continuo motu, alterius liquidi, vel ſolidi, particulas haud difficulter diffringere valent. At neutrum horum requiſitorum in duobus ſolidis reperitur; ſolidorum enim particulæ, cum ſibi invicem ſint contiguæ, permiſceri nequeunt cum alterius ſolidi particulis; eſt ergo neceſſe, ut, ſi miſceri debeant, contiguitas illa ſolvatur, redigendo nempe ſolida in minutiſſimum pulverem, quo fiet, ut una particula unius ſolidi alteram alterius contingere poſſit; hoc enim eſt vera mixtio, cum quælibet particula unius cuilibet alterius juxta ponatur. Requiritur

ritur itaque ut duo ſolida efferveſcibilia, ſi efferveſcere debeant, conterantur primo in tenuiſſimum pulverem; deinde bene invicem miſceantur, ut minima minimis conjungantur: ſed hoc nondum ſufficit; neceſſe inſuper eſt, ut hæ particulæ miſtæ habeant quendam motum, quo particulæ acidi, ſeu corporis *agentis*, poſſint agere in particulas alcali, ſeu corporis *patientis*, eaſque diffringere: verumenimvero particulæ hæ ſolidorum mixtæ motum inteſtinum non habent, quemadmodum liquidorum: (pulverem enim ſubtiliſſimum in hoc duntaxat a liquido differre concipio, quod illius particulæ juxta ſe invicem quieſcant, hujus vero ſint in continuo motu:) ideoque motus extrinſecus ipſis tribuendus eſt, totam nimirum maſſam pulveriſatam concutiendo, agitando, comprimendo, vel quocumque alio modo; cætera ſi rite ſe habeant, non dubito, quin efferveſcentia, ex combinatione duorum ſolidorum, iiſdem effectibus æque ac duorum liquidorum, vel liquidi & ſolidi, produci poſſit. Hoc tamen monendum, quod hujuſmodi efferveſcentiæ hactenus fuerint inſolitæ; forſan ideo, quia modus operandi, & ſolida ad efferveſcendum opportuna præparandi, non innoteſcebat; vel etiamſi innotuiſſet, res tamen raro ex voto ſucceſſiſſet; quia pleraque ſolida efferveſcibilia, cum in pulverem rediguntur, vim efferveſcendi amittunt: nam, quamvis multas particulas acidi & alcali in ſe contineant, contingere tamen poteſt, ut in contritione vel contuſione ſolidorum, acidi particularum anguli abradantur, vel alcali particulæ contundantur; adeo ut utrovis modo ad efferveſcendum ineptæ evadant: eſt itaque unum ex raris contingentibus, ſi duo ſolida ad efferveſcendum idonea reperiantur, quorum particulæ acidi & alcali, conterendo in pulverem, integræ & incorruptæ perſtiterint. Hinc TH. BARTHOLINUS † raris ſuis obſervationibus annumerat experimentum, quo oſtendit regulum antimonii cum mercurio ſublimato, ſi pulveriſati bene miſceantur, efferveſcere poſſe; totamque operationem tradit, quæ ſententiam meam egregie confirmat; conſtat enim mercurium ſublimatum

D 3 multis

† Act. Medic. *Part. II. Obſ.* 70.

multis acidi particulis ſcatere, ob vim ejus corroſivam, quæ, quia mercurius ſublimatus levi contritione in pollinem redigi poteſt, integræ manent; ſic etiam alcali particulæ, quibus regulus antimonii refertus eſt, poſt contritionem figuram ſuam immutatam retinere potuerunt, forſan ob earum duritiem & firmitatem: hi itaque duo pulveres, etiamſi probe miſceantur, *nullus tamen adhuc calor, nulla fumi graveolentis veſtigia* (ut verbis Auctoris utar) ſentientur, ob ſolum motus inteſtini defectum: quid igitur agendum? haud dubie ſuccurrendum ipſis eſt motu externo; ideoque (quod apprime hypotheſin noſtram illuſtrat) jubet Auctor, ut *pulveres permiſti vitro ſtrictioris orificii immittantur, immiſſique bacilli extremitate latiori continuo & valide comprimantur, ita ut ſuperficies pulveris ubique preſſa in arctum cogatur. Diu adhucdum quieſcit pulvis frigeſcitque, licet ad quadrantem horæ undique anguſtetur: ſed inſiſtatur, premendo ad quadrantem adhuc unum; & notabitur denique bacillum, qui ante ſuperficiem tantum lambebat, alte mox ſubire maſſam, & ad fundum uſque ſibi viam facere; quo viſo, dictum factum, craſſi fumi cooriuntur, vitrum incaleſcit, materia, quæ vitro continetur, extra oras ejus ſeſe evolvit, ſpumat, efferveſcit, funditur & totum cubiculum gravi vapore confundit*: ex quibus clare apparet, ſolam preſſionem talia præſtitiſſe; nimirum hac preſſione particulæ acidi, quæ alcali particulas jam contingunt, ulterius propelluntur, illarumque anguli in harum ſinus arctius inſiguntur; ut tandem alcali particulas diffringant, exitumque præbeant aëri incluſo, qui tales effectus modo recenſitos facit. En totum proceſſum habes hujus efferveſcentiæ tertii generis, ejuſque veram cauſam; nobis namque non opus fuit, ut cum Auctore recurreremus ad particulas primi Elementi in pulvere dicto (dic potius in mente CARTESII) diſperſas.

X X.

Tranſeamus nunc ad alia Efferveſcentiæ & Fermentationis phænomena. Experimur, in aëre ſumme frigido, nonnunquam fer-

fermentationem non peragi; cujus ratio hæc eſt, quia, tempeſtate valde frigida, aër, ceu notum eſt ex thermometris, plus ſolito condenſatur, proinde majorem vim elaſticam acquirit; poſſibile itaque eſt, ut hæc major ſit, vel ſaltem æque valens, ac elaterium aëris contenti intra particulas alcali, adeo ut, etiamſi hæ a particulis acidi diffringantur, attamen aër incluſus, ob reſiſtentiam præpollentem, vel æquipollentem, elaterii aëris ambientis, ſeſe extendere nequeat, ſicque tota fermentatio impediatur: hinc ſolent Piſtores & Matres familias maſſam panis fermentandam calidiori loco exponere, ut hac ope vis elaſtica aëris ambientis debilitetur, & aër maſſæ incluſus eo facilius ſe poſſit expandere. Ex ſupra dictis quoque conſtat, cur maſſa panis fermentata in furno attollatur, non vero fermentata, inſtar placentæ, depreſſa maneat: fermenti enim auxilio, particulæ alcali divelluntur; quo fit, ut condenſatus aër, in ipſis incluſus, ſeſe dilatet, totamque maſſam attollat: aër quippe iſte dilatatus, ob viſciditatem maſſæ, intra manere cogitur, nec, ſicut in fermentationibus liquorum, ſurſum fertur, inque auras avolat; ideoque, ſi furno calefacto indatur, adhuc magis aër iſte a calore extenditur, & ſic oportet, ut panis in tantam molem intumeſcat: ſi vero, maſſæ farinaceæ nullum fermentum addatur, a quo particulæ, in quibus aër condenſatus includitur, diffringi queant; mirum non eſt, quod panis in furno non attollatur; quia tum nulla adeſt vis extenſiva; ſiquidem aër, adhuc carcere ſuo detentus, vinculiſque non ſolutus, neque a calore, neque propria vi elaſtica ſe explicare valet. Hinc, ſi panis rite fermentatus per medium diſſecetur, tota ſubſtantia poroſa & laxa videbitur, in qua innumeræ conſpicientur caveæ & foramina, quibus nempe aër, ſui juris factus, inſidebat, ſeque extendendo ſinus iſtos formabat; cum contra, ſubſtantia panis non fermentati ſit admodum craſſa, compacta, & omnibus poris conſpicuis deſtituta, adinſtar caſei; quod certum indicium eſt aëris in alcali particulis adhuc latentis, vinculiſque coerciti, quominus vim ſuam extenſivam exercere potuerit. Neceſſe itaque eſt, quemadmodum patet ex dictis,

ctis, ut, ſi oporteat fermentationem debito modo perfici, materia fermentanda non ſit in loco valde frigido, vel ſaltem non in aëre denſiore, quam eſt aër in particulis alcali incluſus; ſecus enim fermentatio nunquam efficietur.

XXI.

Pariter obſervamus, in loco clauſo nihil effervеſcere, nihilque fermentari poſſe, ob eandem fere rationem, quam ſupra attulimus; jam enim oſtendi, quod, præter diſciſſionem particularum, requiratur etiam ſpatium, ut aër expulſus ex illis ſeſe dilatare queat: ſi itaque duo liquores effervеſcendo idonei in vaſe quodam communi permiſceantur; vas autem illud, hoc modo plenum, firmiter obſtruatur; nulla prorſus excitabitur effervеſcentia: nam quamvis acidi particulæ diffringant particulas alcali, tamen aër in his contentus non poterit ſe expandere, quia omnia jam ſunt plena; expanſio quippe requirit ſpatium majus quam ante fuit; hocce itaque modo aër a particulis non ſecernetur, nullaque proin effervеſcentia generabitur. Hinc commode ratio reddi poteſt, cur, ſi quis vinum muſtum diutius dulce ſervare, & a fermentatione præcavere velit, ſoleat dolium, vel vas, quo continetur, accurate & firmiter undiquaque obturare; nimirum, ope hujus obturationis, primo præſcinditur omnis communicatio aëris externi cum muſto, quem præcipuam cauſam fermentationis muſti eſſe, ſupra innui; deinde, hac obſtructione, omnis locus adimitur, quem aër erumpens e particulis ſolutis occupare poſſet; ſicque cogitur intra terminos ſuos manere: cum autem quævis effervеſcentia, vel fermentatio, in hoc potiſſimum conſiſtat, ut aër a particulis continentibus ſecernatur, ſicut antea dixi; ſequitur, ut, cum talis ſecretio in dolio fieri nequeat, vinum defæcari nunquam poſſit, ſed in eo ſtatu, in quo eſt, ſemper maneat neceſſe eſt: ſi vero, vel minima rimula, ſeu apertura, in dolio exiſtat, aër iſte, intra corpuſcula coactus, omnem laborem eludens, ope vis ſuæ elaſticæ, data hac porta, cum violentia erumpet; imo interdum, niſi dolium fortiter com-

compactum ſit, aër hicce, ſibi exitum quærens, latera dolii cum impetu & fragore diſrumpit, ſicque vini herus oleum, vel potius vinum, & operam perdit; en tantum aëris illa ipſa vis elaſtica valet! nam poſtquam particulæ alcali ſunt ſolutæ, nulla quidem adhuc ſentietur fermentatio; ſummus tamen niſus fermentandi adeſt, quem ſola latera dolii coercere debent: magna ideoque requiritur firmitas, ne dolium diſſiliat; quod melius oſtendi poteſt hoc experimento. Sumatur ampulla vitrea ſtrictioris orificii, impleaturque liquore quodam acido, & indatur globulus, qualem ſupra adhibuimus; dein illico ampullæ orificium hermetice, vel alio cæmento habili, claudatur: quo peracto, poſtquam incarceratus aër beneficio liquoris particulas globuli divellentis libertatem ſuam recuperaverit, hic effervefcentiam parere nitens, vi ſua elaſtica tantam virtutem extenſivam exercebit in parietes ampullæ, ut, cum non amplius pares ſint tantæ vi reſiſtere, non ſine impetu diſſilire obſerventur: ſi vero forte contingeret, ut ampulla hunc conatum compeſcere ſatis valeat; plane nulla efferveſcentia animadvertetur, quamdiu ampulla eſt obſtructa; ſed ſtatim ac orificium aperitur, *efferveſcentia* confeſtim & ſubito ſe prodit: hujus ratio ex ſupra dictis oppido liquet; quam itaque ad nauſeam uſque hîc non repetemus.

XXII.

Lectori ſpero haud ingratum fore, ſi, præſente occaſione, oſtendam quam longe & late hypotheſes meæ ſe diffundant, ad alia naturæ myſteria detegenda. Nullus unquam, quantum ſcio, accenſionem pulveris pyrii, ejuſque violentiam, per modum efferveſcentiæ, explicuit; quam commode autem, ex principiis meis, ad Efferveſcentiam, & quidem ad genus ſecundum, referri poſſit breviter patefaciam. Siquidem ignis cum ſit corpus liquidiſſimum, cujus particulæ in motu rapidiſſimo ſunt conſtitutæ, quæ inſtar cuneolorum, quotieſcunque in alterius corporis particulas, ſinus illis congruentes, & ad recipiendum

 aptos

aptos habentes, impingunt, has eaſdem divellunt & diſcindunt: reſpiciendo itaque ad hanc ignis actionem, quatenus nempe ignis habet vim diſſolvendi & particulas diffringendi, haud incongrue dici poteſt ignem eſſe acidum; pulvis pyrius vero, quia maxima ex parte conficitur ex nitro, dubium non eſt, quin copioſis particulis alcali conſtet: hoc poſito, difficile non erit veram cauſam violentiæ accenſi pulveris pyrii aſſignare, ſi modo attendatur ad ea quæ §. XXI. dicta ſunt, ubi oſtenſum eſt, quam ingentem vim impedita effervescentia exerceat in parietes vaſis clauſi: eadem & hic applicari poſſunt; ſi enim pulveri pyrio ignis admoveatur, idem eſt, ac ſi alcali & acidum miſceantur invicem; nam ſtatim ac ignis pulverem pyrium attigerit, illius particulæ acidæ, ob motum velociſſimum, ſubito & quaſi momento irruunt in hujus particulas alcali, eaſque diffringendo, aëri incluſo, qui arctiſſime compreſſus eſt, exitum parant; quo fit, ut aër iſte ex ſingulis particulis ſimul collectus, unitis viribus, ope vis ſuæ elaſticæ (ſiquidem mirum in modum condenſatus eſt, ut mox patebit) & a motu ignis adhuc magis agitatus, uno ictu, quæque impedimenta ſemoveat, & fortiſſima quoque obſtacula perrumpat. Quis autem hoc miretur? cum quotidie videamus, quantum aëris vis elaſtica polleat; ceu Frater nupero experimento publice oſtendit, aëris gravitatem, vel potius vim elaſticam (quia experimentum, tam in conclavi clauſo, quam ſub dio, ſuccedit) tantam eſſe, ut plus quam undecim centipondia non potuerint divellere bina hemiſphæria cuprea, quorum diameter vix pedis dodrantem adæquat, poſtquam ex illis, ſibi invicem adaptatis, ope antliæ pneumaticæ, aërem extraxiſſet: en tantum præſtitit aëris naturalis conſiſtentiæ vis elaſtica: nihil dicam ergo de ſclopetis iſtis pneumaticis recenter inventis, quæ ope ſolius aëris condenſati, globulum per aſſerem ſatis craſſum trajiciunt. Si itaque tantus eſt effectus aëris vix decies denſioris aëre naturali, quid non efficiet aër, ultra quam centies denſior, qui in alcali particulis pulveris pyrii includitur? Tanta denſitas, ad quam aër hactenus nullo artificio redigi potuit, omnem fidem ſuperaret; niſi veritas poſ-

ſet

ſet demonſtrari hoc experimento, quod non ita pridem cum Fratre meo feliciter inſtitui. Sumpſimus nempe tubum recurvum ABC, (*Fig. 6.*) cujus unum crus AF ſatis longum, diametri circiter ſemipollicis, a parte A apertum; alterum vero brevius crus inſtructum erat ampulla C; in quam per orificium A, inverſo tubo, immiſimus quatuor granula pulveris pyrii; deinde crus AF implevimus aqua, uſque ad B, illudque immerſimus in vaſculum oblongum HG itidem aqua plenum; hoc facto, totam machinam in locum temperatum per ſemihorium ſepoſuimus, ut ſecuri redderemur, aërem in ſpatio CFB contentum, interea temporis, ad naturalem conſiſtentiam redactum eſſe, ſi forte a calore manuum, inter palpandum, rarefactus fuiſſet: hujus itaque rei certiores, tubum AFC ita conſtituimus, ut ſuperficies aquæ in eo contentæ B, congrueret cum ſuperficie aquæ externæ ambientis, quod tunc nobis indicium fuit, aërem in ſpatio CFB contentum plane ejuſdem conſiſtentiæ eſſe cum aëre externo; poſtmodum ſumpſimus machinam, ita paratam, de loco ſuo temperato, radiiſque ſolaribus expoſuimus, quibus ope ſpeculi cauſtici E, accendimus pulverem *pyrium* ampullæ C immiſſum; quod cum ſubito fieret, aqua in tubo ſubjecta BA, ob impetum, multum ultra limites deprimebatur (adeo ut nonnunquam, niſi portio tubi BA ſit ſatis longa, per orificium A, non ſolum omnis aqua, ſed aër; expelli poſſit) nobis autem non ad orificium uſque pertigit ſuperficies interna B; proinde res ex voto ſucceſſit; ideoque machinam immutatam in priorem locum temperatum tranſtulimus, ubi aquam in tubo ſenſim rurſum aſcendere obſervavimus, nimirum ob duplicem cauſam, tum ob translationem ex loco calidiori in frigidiorem, tum ob ſubito incenſum ignem iterum extinctum; tam diu, inquam, aſcendit aqua; donec tota machina refriguiſſet, & priſtinum ſtatum, quem ante accenſionem habebat, induiſſet; tum demum amplius non aſcendit, ſed quievit, etiam per tres vel quatuor horas, quandiu in iſto ſtatu permittebamus; ſic itaque advertimus, non ad priorem terminum B uſque aſcendiſſe, ſed notabiliter infra B, limitem D poſuiſſe; TAB. I. *Fig. 6.*

E 2 proin-

proinde termino B prius notato, tubum parumper ſuſtulimus; donec ſuperficies aquæ interna D cum ſuperficie externa coincideret, adeo ut, hoc modo, aër in ſpatio CFD contentus iterum eſſet naturalis conſiſtentiæ; ideoque, quia aër voluminis CFB auctus fuerat volumine BD, concluſimus ex his, tantum aëris, quantum caperet ſpatium BD, neceſſario in quatuor iſtis granis pulveris pyrii antea inextitiſſe, ſiquidem aliunde provenire non potuiſſet; ſed prout judicavimus, ducenta granula pulveris pyrii vix adimpleviſſent ſpatium BD; poſito itaque unum granulum conſtare ex una parte materiæ terreſtris; quæ videlicet eſt continens aëris condenſati, & ex una parte ipſius aëris condenſati (quamvis credam hunc ab illa multum ſuperari) ſequitur exinde aërem, qui totum ſpatium BD occupabat, cum adhuc in granulis hæreret, centies atque amplius denſiorem fuiſſe aëre naturali. Hoc experimentum quam egregie hypotheſin meam confirmet, nemo non videt; illorum vero ſententiam uno ictu, quaſi deſtruit, qui putant tantam violentiam pulveris pyrii ab eo duntaxat provenire, quod pulvis pyrius ſubito flammam concipiat, & aër ambiens ab iſta valde agitatus in majus ſpatium ſe extendere nitatur; hinc quælibet obvia magno niſu diffringere, ſibique exitum parare autumant. Sed hanc non eſſe ſufficientem cauſam, experimentum noſtrum abunde comprobat; ſequeretur enim, illorum juxta ſententiam, ut, poſtquam motus iſte inteſtinus, quem ſubitanea flamma cauſabatur, ceſſaverit, totaque machina refriguerit, aqua ad priſtinam altitudinem B aſcendere deberet; nam nulla ratio apparet, cur nunc plus aëris quam prius tubo ineſſet. Eſt inſuper & aliud, quod per hanc ſententiam explicare nequeunt; cur nempe, ſi pulvis pyrius in pollinem conteratur, multum de violentia ſua amittat; hac enim contritione, non ſolum non impeditur, quo minus commode flammam concipere poſſit, ſed potius conceptio facilior redditur, quippe ignis melius, & celerius, pulverem pyrium contritum, quam eundem granulatum, penetrare poteſt; & ſic comminutio vim ejus potius augeret, quam diminueret; quod eſt contra experientiam: per noſtram

vero

vero hypotheſin, rem clare & paucis explicare poſſumus; nimirum, cum pulvis pyrius conteritur, fieri nequit, quin, hac contritione, multæ particulæ, quibus aër condenſatus ineſt, ſimul diffringantur, & aër inſitus in auram apertam abeat; quocirca, mirum non eſt, quod pulvis pyrius contritus tantum effectum non præſtet, ſiquidem multum aëris condenſati (quem præcipuam cauſam eſſe violentiæ ſupra oſtendimus) ante accenſionem, conterendo, diſparuerit, & proinde conatus ejus redditus fuerit irritus.

XXIII.

Ne quid ſupereſſe videatur, quod per noſtra principia non explicari poſſit; paucis hîc de eo motu, qui a Chymicis *Præcipitatio* dicitur, diſſeram: integram autem hujus doctrinam huc non afferam, tum quod hujus loci non ſit, tum quod nimis prolixum foret; poteſt enim præcipitatio contingere etſi effervescentia non præcedat; hanc vero, ob rationem modo memoratam non tractabo, ſed illam duntaxat, quæ poſt effervescentiam plerumque ſequitur; plerumque dico, quia non in omnibus effervescentiis, ſed in pluribus ſaltem, aliquid, inſtar materiæ terreſtris, ad fundum (ut Chymiæ Magiſtri loquuntur,) præcipitatur; quid itaque illud ſit, & unde veniat, (ſiquidem in limpidiſſimis quoque liquoribus id accidere obſervamus) curque, in aliquibus effervescentiis, nulla præcipitatio ſuccedat, breviter & ni fallor, ſatis perſpicue ex hypotheſi noſtra oſtendi poterit; quæ, ut eo facilius intelligantur, præmittam experimentum quoddam, ad cujus comparationem præſens negotium dein accommodabo. Sumatur vaſculum quoddam AB [*Fig.* 7.] aqua fere plenum, & ampullæ cujuſdam vitreæ, ut C, primo aëre tantum repletæ, orificium colli obturetur, hæcque immergatur in aquam ipſomet vaſculo contentam; ſi vero forte levior ſit aqua, adeo ut ſurſum prematur & ſuperficiem aquæ petat, tunc orificium ampullæ aperiatur, eique tantum aquæ immittatur, quantum ſufficit ad æqualem gra-

vitatem conſtituendam inter aquam externam & ampullam; quo facto, obſtruatur ampulla, & in aquam denuo immergatur, ex. gr. uſque ad D; tum ampulla ob æqualitatem ponderis inter ſemetipſam, aqua aëreque repletam, & inter ejuſdem molis aquam, æquilibrium ſervabit ubicunque ponatur, id eſt, neque ſurſum, neque deorſum, premetur, ſed in ea altitudine, in qua eſt, hucuſque ſemper manebit; ſi itaque, a vi quadam externa, diſrumpatur ampulla, evidens eſt, in quiete non amplius manſuram, ſed aërem, qui continebatur in ampulla, quique aqua ſpecifice levior eſt, ſub forma bullularum ſurſum aſcenſurum; fragmenta vero ampullæ vitreæ E, F, quia aqua ſpecifice ſunt graviora, ad fundum ferentur. Hæc ſi attentius conſiderentur, ſtatim apparet, quid conferant ad præcipitationis poſt effervescentiam ortæ explicationem; ex his enim concludimus, materiam illam terreſtrem, quæ, poſt effervescentiam, in fundo conſpicitur, nihil aliud eſſe quam particulas alcali diffractas; nam ante effervescentiam, dum aëre adhuc ſunt repletæ, in liquore hinc inde diſperſim natando, nec ſurſum, nec fundum petunt, ob eandem particularum cum liquore gravitatem ſpecificam; ſi vero huic liquori affundatur alius liquor, qui particulis acidi ſcateat, hæ particulas alcali diffringunt, & ſic idem, quod in ampulla vitrea accidit, eveniet; nimirum aër, qui in particulis alcali continetur, ob levitatem ſurſum feretur, fragmenta vero particularum alcali, ob præpollentem gravitatem, ad fundum ruent, & hoc eſt quod Chymici *Præcipitationem* vocant. Dantur quidem Effervescentiæ, quæ nihil præcipitati poſt ſe relinquunt; illud autem non fit, niſi liquores ad effervescendum apti ſint ſumme depurati, quorum nempe particulæ valde ſunt ſubtiles & exiguæ; ideoque quod nulla præcipitatio ſubſequatur, ratio hæc eſt; quia, ſi particulæ alcali, quæ admodum ſunt parvæ, a particulis acidi diſrumpuntur, aër quidem intrinſecus ſeſe extendens, ſurſum fertur; ſed fragmenta particularum, quamvis liquore ſpecifice ſint graviora, tamen, ob ſummam exilitatem, ad fundum ſubſidere nequeunt; exiguitas enim iſta efficit, ut

vis exceſſus ſpecificæ gravitatis unius fragmenti ſit minor, quam ut poſſit ſuperare reſiſtentiam frictionis, vel villorum, quibus particulæ mutuo implicantur : ſic, ob eandem rationem, granula plumbea, in acervo milii diſperſa, non ſubſiderent, quamvis plumbi ſpecifica gravitas multo major ſit quam milii ; ſcabrities enim partium, quibus grana ſe mutuo contingunt, longe major eſt, quam ut ſuperetur ab exceſſu gravitatis : ſic particulæ aëreæ minutiſſimæ, ſolo contactu, ſub aqua detinentur : ſic contra nonnunquam exiles guttulæ aqueæ in aëre diſperſæ ſunt, quæ non decidunt ; unde aërem humidum eſſe dicimus : ſic mercurius, & alia metalla, a liquoribus corroſivis adeo minutim diſſolvuntur, ut, etſi multo graviora ſint quam liquores, penitus tamen cum illis miſceantur, adeo ut ne veſtigium quidem metalli appareat : ſic videmus duos diverſos liquores, etiamſi non ſint ejuſdem omnino ſpecificæ gravitatis, invicem miſceri poſſe : quorum omnium eadem eſt cauſa, quam prius aſſignavi, cur, poſt aliquas efferveſcentias, nullum ſedimentum ad fundum ruat.

XXIV.

Naturam itaque præcipitationis, quæ efferveſcentiæ ſupervenit, quid nempe ſit, & in quo conſiſtat, ex hypotheſi mea ſatis me explicaſſe confido ; & ſi liceret falcem in alienam meſſem immittere, ſine ullo fere labore poſſemus hîc inſerere cauſam præcipitationis illius, quæ, ſine efferveſcentia, ex ſola permixtione duorum liquorum peragitur : attendatur enim ad experimentum modo allatum ; ubi ſtatim apparet, ſi aquæ in vaſculo AB contentæ, & in qua ampulla D æquilibrata eſt demerſa, affundatur alius liquor aqua ſpecifice levior, ita ut aqua & liquor invicem miſceantur ; apparet, inquam, ampullam D, ferri ad fundum non tamen frangi ; cujus ratio alia non eſt, quam quod, ope affuſionis novi liquoris, aqua levior reddatur, ideoque ampulla D, quæ antea ejuſdem gravitatis erat atque aqua, nunc eadem gravior evadat ; proinde uti ex Hydroſtaticis pa-

tet,

tet, ut ad fundum ruat, neceſſe eſt. Ita etiam, ſi duo liquores diverſæ gravitatis, ex quibus præcipitari quid oportet, invicem miſcentur; tunc omnes grandiuſculæ maſſulæ, quæ graviori prius liquori æquilibratæ innatabant, nunc gravitate præpollentes ad fundum deſcendent, & ſic, ſine prægreſſa efferveſcentia, præciptiatio orietur.

XXV.

Hactenus memorata præcipua ſunt, quæ circa Efferveſcentias & Fermentationes obſervantur; reliqua, aut ſponte ex principiis noſtris fluunt, aut ſaltem longa diſquiſitione opus non habent; colorum v. gr. mutatio, quæ ſæpiſſime poſt efferveſcentiam vel fermentationem contingit, rem arduam non reddit; conſtat enim, diverſitatem coloris maxime conſiſtere in diverſo ſitu & figuratione particularum; quid ergo mirum, quod corpora efferveſcentiam paſſa alium ſubinde colorem induant? ſiquidem, efferveſcendo, & ſitus, & figura particularum mutetur, ut patet ex ſupra dictis; his igitur diutius non immoremur. Multa quidem explicanda reſtarent, quæ, in hac, vel illa, efferveſcentia, aut fermentatione, ſpecialiter occurrunt; hæc autem potius ab aliis circumſtantiis dependent, quam reapſe differunt a phænomenis generalibus: proinde iſta (ſiquidem facile hypotheſibus meis accommodari poſſe nullus dubito) aliis, quibus plus vacat, intacta relinquam: omnes enim ſpeciales caſus huc afferre velle, non paucas hujus Diſſertationis pagellas, ſed ingens volumen requireret: ſufficit mihi, quod res eo redacta ſit, ut nil particulare occurrat, quod principia noſtra generalia ſubterfugiat, aut per illa, probabiliter ſaltem explicari non poſſit: hic ergo pedem figo. Faxit Deus O. M. ut hæc unice vergant in Nominis ſui gloriam.

APPEN-

APPENDIX.

VIxdum Diſſertationi huic colophonem impoſui, cum mihi præcipationis, & ſecretionis particularum naturam, ultimis pagellis breviter explicatam, ſedulo contemplanti, ex hujus occaſione, fortuito ſeſe obtulit modus conſtruendi, ope cujuſdam liquoris continuo fluentis, decantatum illud & ab omni ævo deſideratum Mobile Perpetuum pure artificiale; quem proinde hic, coronidis loco, ob materiæ affinitatem, Eruditis examinandum proponam. Neminem profecto latet, quam avide jam a longo tempore a Celeberrimis quoque Viris Motus iſte Perpetuus ſit quæſitus, quam ardenter efflagitatus: quid enim non excogitarunt? quot ſumptus non impenderunt? quantaſque non extruxerunt machinas? ſed omnia in caſſum,

Πάντα γέλως, καὶ πάντα κόνις, καὶ πάντα τὸ μηδέν.

Vexat etiamnum & torquet continuo multos cœca Perpetui hujus Mobilis cupido, eorumque ingenia adeo incitat, ut auribus animiſque Hominum Eruditorum abſurda de hac re etiam proferri videamus: quæ tamen hodie plerique Viri docti rejiciunt; unanimiter aſſeverantes, Motum Perpetuum, nec dari, nec inveniri poſſe: quæ opinio eouſque apud hos invaluit, ut ſatis temere pronuncient, ne audiendos quidem eſſe, qui tale quid ſe reperiſſe gloriarentur; quorum tamen rationes (ut fatear) ad me convincendum non ſufficiunt; quin potius aſſerere non erubeſcam Motum Perpetuum, non ſolum inventu poſſibilem, ſed prorſus inventum jam eſſe, ut quivis fatebitur, qui has legerit lineolas; & quid multis opus eſt? annon ipſa Natura (quæ nunquam non juxta leges mechanicas operari dicitur) poſſibile eſſe Mobile Perpetuum indicat? quid (ut

hoc ſolum memorem) perennis fluminum & aquarum fluxus aliud eſt, quam Motus Perpetuus? annon omnia mechanice peraguntur? ergo, fateris, quod limites legum mechanicarum non excedit, illud impoſſibile non eſt; quid proinde impedit, quo minus præeuntem Naturam hac in re, utut non tam perfecte imitari poſſimus? ut autem tandem finiam, poſſibilitasque Motus Perpetui artificialis ſalvetur, modum, quo conciliari poſſit, tibi oſtendam, de quo ne in ſiniſtram partem temere judicium feras, vel pro Titanico conatu interpreteris, hunc ut prius acriter perpendas, vel, ſi lubet, rei veritatem ipſe experiaris rogo.

Ante omnia præponenda ſunt ſequentia.

TAB. I. *Fig.* 8. I. Si ſint duo liquores diverſæ gravitatis, quorum gravitates ſint in ratione G ad L; erunt, viceverſa, altitudines cylindrorum æquiponderantium, & ſuper æquali baſi exiſtentium, in ratione L ad G.

II. Ideoque ſi altitudo A C (*Fig.* 8) liquoris unius in vaſculo A D contenti, ſit ad altitudinem E F liquoris alterius in tubo utrinque aperto exiſtentis, ut L ad G; liquores ita poſiti quieſcent.

III. Proinde ſi A C ad E F ſit in majori ratione quam L ad G; liquor in tubo aſcendet; vel ſi tubus ſufficienter longus non ſit, liquor per orificium E prolabetur.

(Hæc ex Hydroſtaticis probantur)

IV. Poſſunt haberi duo diverſæ gravitatis liquores, qui conjuncti invicem miſcentur.

V. Poteſt haberi filtrum, colatorium, vel aliud ſecretorium, ope cujus liquor levior graviori immiſtus ab eodem iterum poteſt ſecerni.

CONSTRUCTIO.

His præſuppoſitis, Mobile Perpetuum ſic conſtruo. Sumantur in quacunque quantitate, ſi vis, in æquali, duo diverſæ gravitatis liquores invicem miſcibiles (qui per hyp. 4. poſſunt haberi) illorumque ratio gravitatis prius exploretur, quæ ſit ut G ad

G ad L gravioris ad leviorem, deinde illis permixtis impleatur vaſculum A D uſque ad A. Hoc facto ſumatur tubus utrinque apertus E F, ejus longitudinis, ut ſit A C : E F > 2 L : G + L; hujus vero tubi orificium inferius F obſtruatur, vel potius obducatur, filtro, vel alia materia quadam, ſecernente liquorem leviorem a graviori (quæ per hyp. 5. etiam poteſt haberi;) tandem tubus hoc modo paratus liquori immergatur uſque ad fundum vaſculi C D; dico, liquorem continuo per tubi orificium F aſcenſurum, & per orificium E in ſubjectum liquorem prolapſurum.

DEMONSTRATIO.

Quia tubi orificium F obductum eſt filtro (per conſtr.) quod liquorem leviorem a graviori ſecernit; ſequitur, ut, ſi tubus immergatur ad fundum vaſculi, liquor ſolummodo levior, qui graviori eſt immiſtus, per filtrum in tubum aſcendere debeat, & quidem eouſque ultra ſuperficiem ambientis liquoris (per hyp. 2.) aſcenderet, ut eſſet A C : E F = 2 L : G + L: quia vero (per conſtr) A C : E F > 2 L : G + L, neceſſe eſt (per hyp. 3.) ut liquor levior, per orificium E, ſeſe exoneret in vaſculum ſubjectum, ibique denuo cum graviori conjungatur, & (per hyp. 4.) miſceatur de novo; qui dein, penetrando filtrum, in tubum rurſus aſcendat, iterumque per ſuperius orificium expellatur. Sic itaque fluxus continuabitur in perpetuum. *Q. E. D.*

COROLL.

Hinc commode reddi poteſt ratio, cur aqua, ex mari profundo ad ſumma uſque cacumina montium jugiter aſcendendo, ex iis ſaltuatim prorumpat & refluendo ſub forma fluminum, ſe refundat in Oceanum, ſicque Natura nobis Perpetuum ſiſtat Mobile. Hoc, inquam, non bene explicant illi, qui dicunt, eandem ob cauſam aquam ex mari in ſublimius ferri per terræ

quam liquor in tubulis peranguſtis aſcendat ultra liquoris tubulos ambientis: nam, ſi ita res expli-, nunquam demonſtrare poſſent, cur eadem aqua, evata, e terræ gremio prolabatur; videmus enim, iſtis tubulis, licēt tantillum ſupra liquorem ambient, nunquam tamen extra eorum ora ſeſe evolvere, rem ſubſtratum decidere. Commodius itaque ſic notum eſt, aquam, in qua multum ſalis eſt diſ- graviorem eſſe eadem dulci; verum aqua marina, ſapore, multas particulas ſalinas in ſe continet; pro- ravior quam aqua fontana vel fluvialis: credibile ita- od cum terra vicem gerat filtri, per cujus poros aqua is tranſire poteſt, relictis ſalinis particulis, quæ gra- quæ augent; aqua dulcis per terram longe altius debeat, ob immenſam Oceani profunditatem, ita ut a quoque montium faſtigia, per preſſionem aquæ rotrudatur; ex quibus dein, cum ultra aſcendere ne- ulorum inſtar emanet.

FINIS.

N°. II.

NOVUM THEOREMA PRO DOCTRINA SECTIONUM CONICARUM PER J. B. †

Mirum eſt, in materia veteribus ac recentioribus adeo trita, relictum eſſe aliquid, quod eorum induſtriam adhuc effugerit: præſertim proprietatem adeo generalem, cujuſmodi eſt hæc, quæ ſequitur. *Acta Eruditorum 1689. Novemb. pag. 586.*

Si in Triangulo per Axem Coni ACD, *demittatur a vertice in baſin perpendicularis* AI; *& ex ea abſcindatur* AN *æqualis perpendiculari* AB, *ex eodem vertice* A *in diametrum Coni-Sectionis* HO *demiſſæ; ac per* N *agatur* FE, *parallela baſi, ſecans crura Trianguli per axem in* F *&* E: *erit* FE *latus rectum Coni-Sectionis.*

. . . .

. . . .

Cum Fratri hæc aperuiſſem, mox eadem ſuis quoque demonſtrationibus munivit; quas, quia non inconcinnæ mihi viſæ ſunt, hic ſubjungam: quod in novo Theoremate facile merebitur veniam.

[Dicatur Latus rectum R, & ducantur AQ, parallela diametro HO, ſecans ipſam FE in G, atque AL, HZ parallelæ baſi CD, quarum illa diametro productæ occurrit in L, hæc ſecat ipſas AD in Z, & AQ in X: eruntque ſimilia Triangula AHX, AFG; AHZ, AFE, & MHZ, AGE: præterea HX = AG. Nam HX = AL, ob parallelogrammum HXAL, & AL = AG, ob æqualia & ſimilia Triangula ABL, ANG. (Eſt enim angulus LAN rectus æqualis angulo BAG recto; demtoque communi BAN, angulus LAB æqualis angulo NAG; præterea anguli ABL, ANG recti, & latus AB æquale lateri AN.) Igitur] TAB. I. N°. 2.

F 3 I. Ut

† Jacobum BERNOULLI, Autoris noſtri Fratrem.

1. *In Parabola.* $FG : HX = AG\ (HX) : AX$; proinde $HXq = FG \times AX$; eſt autem (*a*) $HA : R = HA \times AX : HXq\ (FG \times AX) = HA : FG$. Ergo FG vel $FE = R$. *Q. E. D.*

Aliter. $AH : FG = AH : HX + HX : FG = AF : FG + HX\ (AG) : FG = AF \times AG : FGq = AH : R$ (*a*). Ergo $FG = R$. *Q. E. D.*

2. *In Hyperbola & Ellipſi.* $MH : FE = MH : HZ + HZ : FE = AG : GE + AX : AG\ (HX) = AG : GE + AG : GF = AGq : GE \times GF = MH : R$ (*b*). Ergo $FE = R$. *Q. E. D.*

(a) *Apollon.* Conic. I. 11.
(b) *Apollon.* Conic. I. 12. & 13.

N°. III.

SPECIMEN CALCULI DIFFERENTIALIS IN DIMENSIONE PARABOLÆ HELICOIDIS

ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliiſque, per J. B. †

. . . .
. . . .

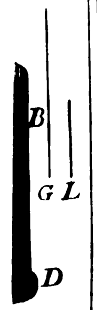
Acta Eruditorum 1691. *Januar.* pag. 13. TAB. II. N°. 3.

CUM axis vulgaris Parabolæ curvatur in peripheriam Circuli BDM, curva BFGNA quæ per extremitates applicatarum CF, DG in centrum circuli A vergentium tranſit, dicitur nobis *Parabola helicoïdes*, vel, ſi mavis, *Spiralis Parabolica*. Eſto. $AB = r$, . . . Arcus $BC = x$, $CF = y$ . . . . ſitque CD particula circumferentiæ infinite parva, cui ſit ſimilis & concentricus arculus GE. Natura Curvæ $lx = yy$, adeoque $ldx = 2ydy$ . . . .
. . . .

pag. 16. . . . Id

† *Jacobum* BERNOULLI

...poris
...ata
...rpo=



Id cum Fratrem monuiſſem, in his quoque non leviter verſatum, protinus animadvertit ille, poſſe cuilibet fere Spirali, æquatione algebraica expreſſæ, aliam curvam geometricam æqualem aſſignari. Deſcriptis enim, centro A, intervallo A F & A G, arcubus Fρ, Gπ; ſi concipiatur curva Mψ talis, ut applicatarum $\rho\kappa$, $\pi\psi$ differentia $\nu\psi$ æquetur arcui E G; erit propter $\nu\kappa = \pi\rho =$ EF, & $\nu\psi =$ E G, & angulos $\psi\nu\kappa$, F E G, utrinque rectos, etiam $\psi\kappa =$ F G, & proinde, componendo, tota portio curvæ Mψ æqualis toti portioni Spiralis B G. Ad inveniendum autem naturam curvæ Mψ, ſubſtituendus tantum in quantitate $(rdx - ydx) : r$ (quæ ſemper exprimit ipſam E G vel $\nu\psi$) valor ipſius dx, qui in noſtra curva eſt $2ydy : l$, ut habeatur $2ydy : l - 2yydy : rl$; cujus integrale $yy : l - \frac{2}{3}y^3 : rl$ denotat longitudinem applicatæ $\pi\psi$; quæ ſi vocetur z, habebitur æquatio inter z & $yy : l - \frac{2}{3}y^3 : rl$, ſeu $3rlz + 2y^3 - 3ryy = 0$, quæ relationem exprimit inter abſciſſam Mπ (y) & applicatam $\pi\psi$ (z). In genere vero Spiralis Parabolica gradus cujusvis, hac ratione, commutatur in aliam Paraboloidem geometricam uno gradu altiorem. Sed & hoc obſervavimus, quod ſi curva A N I G B ſit *Spiralis Archimedæa*, & deſcribatur, vertice A, ad axem A K, communis Parabola Aμ, cujus parameter ſit quarta proportionalis ad peripheriam, diametrum & radium circuli B D M; erunt (quod memoratu dignum eſt) & curvæ, & illis comprehenſa ſpatia æqualia: nimirum, ſumto in recta A M quovis puncto λ; ſi ad illud applicetur recta $\lambda\mu$, ſecans Parabolam in μ, & ducatur arcus λN concentricus peripheriæ circuli *BM*, ſecans Helicem in N; æquabitur perpetuo Helicis A N portio portioni curvæ parabolicæ Aμ; & ſpatium A N, recta A N & ſpirali comprehenſum, Spatio parabolico A$\lambda\mu$A. Quam miram Parabolæ & Spiralis convenientiam, poſtmodum, apud WALLISIUM deprehendimus, qui de ejus detectione HOBBIUM & ROBERVALLIUM inter ſe diſceptaſſe refert: quaſi non poſſint plures, & tempore & loco diſſidentes, in idem inventum, ſuopte ingenio, incidere.

SOLUTIO

N°. IV.

SOLUTIO PROBLEMATIS FUNICULARII, *exhibita à* JOHANNE BERNOULLI, *Baſil. Med. Cand.*

Acta Eruditorum 1691. Jun. pag. 274.

ANNUS fere eſt, cum, inter ſermocinandum cum Cl. Fratre, mentio forte incidiſſet de natura Curvæ, quam Funis inter duo puncta fixa libere ſuſpenſus format. Mirabamur, rem omnium oculis & manibus quotidie expoſitam, nullius huc uſque attentionem in ſe concitaſſe. Problema videbatur eximium & utile; at tum, ob prævisam difficultatem, tangere noluimus; ſtatuimus itaque illud publice Eruditis proponere †; viſuri num qui vadum tentare auderent: neſciebamus enim, quod jam inde a GALILÆI temporibus inter Geometras agitatum fuiſſet. Interea dignum cenſuit nodum hunc, cui ſolvendo ſe accingeret ſummus Geometra LEIBNITIUS, ſignificavitque non multo poſt * ſe clave ſua aditus problematis feliciter reſeraſſe; conceſſo tamen & aliis tempore, intra quod, ſi nemo ſolveret, ipſe ſolutionem ſuam publicaturus eſſet. Id animum addidit, ut problema denuo aggrederer, quod eo quidem cum ſucceſſu factum, ut brevi, & ante termini à Viro Cel. poſiti exitum, ejus ſolutionem omnimodam & plenariam, qualem antea ne ſperare quidem auſus fuiſſem, invenerim. Reperi autem Curvam noſtram Funiculariam non eſſe geometricam, ſed ex earum cenſu, quæ mechanicæ dicuntur; utpote cujus natura determinata æquatione algebraica exprimi nequit, nec niſi per relationem curvæ ad rectam, vel ſpatii curvilinei ad rectilineum, habetur; ſic ut, ad illam deſcriben-

† In *Actis Erudit.* 1690. *Maj.* pag. 219. his verbis: *Invenire, quam curvam referat Funis laxus, & inter duo puncta fixa libere ſuſpenſus.* Sumo autem, Funem eſſe lineam in omnibus ſuis partibus facillime flexilem.

* *Acta Erud.* 1690. *Jul.* pag. 360.

cribendam, alterius curvæ rectificatio, vel ſpatii curvilinei quadratura ſupponatur, ut ex ſequentibus Conſtructionibus liquet.

Conſtr. I. Ductis normalibus CB, DE, ſeſe ſecantibus in A; centroque C, ubivis ſumpto in axe CB, & vertice A, deſcripta Hyperbola æquilatera AH; conſtruatur curva LKF, quæ talis ſit, ut ubique CA ſit media proportionalis inter BH & BK; fiat rectangulum CG æquale ſpatio EABKF; erit, productis IG, HB, punctum concurſus M in Curva Funicularia MAN. TAB. II. N°. IV. *Fig.* 1.

Conſtr. II. Deſcripta, ut prius, ad axem BA Hyperbola æquilatera BG; conſtruatur ad eundem axem Parabola BH, cujus latus rectum æquetur quadruplo lateris recti vel tranſverſi Hyperbolæ; ordinatimque applicata HA producatur ad E, ita ut recta GE ſit æqualis lineæ Parabolicæ BH; dico punctum E eſſe in Curva Funicularia EBF. *Fig.* 2.

Ex his patet, Curvæ hujus EBF naturam per æquationem geometricam haberi non poſſe, niſi ſimul rectificatio lineæ Parabolicæ detur. Hujus autem & præcedentis Conſtructionis demonſtrationem lubens omitto, ne Celeberrimo Viro primæ inventionis palmam vel præripiam, vel inventa ſua ſuper hac materia plane ſupprimendi anſam præbeam: ſufficiet hîc, ſi notabiliores hujus curvæ proprietates addidero.

1. Ducta tangente FD, erit AF. AD = BC : BF curvam. *Fig.* 2.

2. AE vel AF æquatur curvæ Parabolicæ BH, dempta recta AG.

3. Curva BE vel BF æqualis eſt rectæ AG; id eſt, portiones curvæ Funiculariæ ad axem applicatæ conficiunt Hyperbolam æquilateram: inſignis eſt hujus curvæ proprietas.

4. Spatium Funicularium BAE vel BAF eſt æquale rectangulo ſub BA & AF, diminuto rectangulo ſub CB & FG.

5. Curva MNO, ex cujus evolutione deſcribitur Funicularia BE, eſt tertia proportionalis ad CB & AG.

6. Recta vero evolvens EO eſt tertia proportionalis ad CB & CA.

 7. Recta

7. Recta BM, uſque ad principium curvæ MNO ſumpta, æquatur ipſi CB.

8. MP eſt dupla ipſius BA.

9. Rectangulum ſub CB & PO duplum eſt ſpatii Hyperbolici ABG.

10. Recta CP biſecta eſt in puncto A.

11. Curva EB eſt ad curvam MNO, ut recta CB ad rectam AG.

12. Si ad AG applicentur duo Rectangula AI, AK; quorum unum AI, ei quod ſub ſemilatere tranſverſo CB & recta FG comprehenditur rectangulo, alterum AK, quod ipſi ſpatio Hyperbolico BGA æquatur; & differentiæ latitudinum KI ſumatur in axe a vertice B æqualis BL, erit punctum L centrum gravitatis curvæ Funiculariæ EBF.

13. Si ſuper EF infinitæ intelligantur deſcriptæ curvæ ipſi Funiculariæ EBF æquales, illæque in rectas extendantur; & in ſingulis ſingulæ extenſæ punctis applicentur rectæ ipſis reſpective diſtantiis a linea EF æquales; erit omnium ſpatiorum, quæ ſic efficiuntur, illud quod a Funicularia gignitur, maximum.

Cœpit Hon. Frater ſpeculationem hanc extendere etiam ad funes inæqualiter craſſos, quorum craſſities ad longitudinem relationem obtinet æquatione algebraica exprimibilem; notatque unum caſum, quo problema per curvam ſimplicem mechanicam ſolvi poſſit: nempe ſi ſupponatur Figura Curvilinea Fig. 3. ABDEG, cujus applicata GE ſit reciproce in dimidiata ratione abſciſſæ AG, eaque ſit in omnibus ſuis applicatis flexilis, hoc eſt, ſi concipiatur funis AG gravatus, in ſingulis ſuis punctis reſpectivis, rectis GE, vel (quod tantumdem eſt) differentiis applicatarum GH in Parabola AHI, aut denique portiunculis curvæ cycloidalis AHI (cujus vertex A;) iſque, ſic gravatus, ſuſpendi intelligatur, ita ut punctum A ſit omnium infimum, (quod ſit, ubi connexum habuerit, a parte A, alium funem ejuſdem longitudinis, & in æqualibus a puncto

punćto A diſtantiis æqualiter gravatum) : tum jubet ad axem AG conſtruere Hyperbolam æquilateram ABC, cujus vertex A, applicatamque BD producere ad E, ita ut rećtangulum ſub ſemilatere rećto vel tranſverſo, & linea DE, ſit æquale ſpatio ADB; oſtenditque punćtum E eſſe ad curvam quæſitam AEF, quam funis dićta ratione gravatus format; ipſam vero curvam AE eſſe tertiam proportionalem ad rećtum vel tranſverſum latus Hyperbolæ, & applicatam ejus DB; tangentem EH haberi, ſumpta IH quarta proportionali ad ſemilatus rećtum, abſciſſam AD & applicatam DB; &c. Reperi autem, (quod memorabile eſt) curvam hanc AEF illam ipſam eſſe, ex cujus evolutione altera BE, quam uniformis craſſitiei funis format, deſcribitur; adeoque eandem cum curva MNO. *Fig. 4.* *Fig. 2.*

Notare convenit, quod ſi quis experimentis hæc examinare inſtituat, catenulam præ fune ſeligere debeat, quam, ob nimiam cum levitatem, tum rigiditatem, ad id ineptum deprehendimus. Ceterum, qui materiam hanc perficere & ampliare volet, poterit inveſtigare naturam curvæ; quam refert funis in hypotheſi a Terræ centro diſtantiæ finitæ; vel ſi ſupponatur inſuper a proprio pondere extenſibilis, aut quocunque alio modo gravatus; vel etiam, vice verſa, qualiter illum gravare conveniat, ut referat lineam Parabolicam, Hyperbolicam, Circularem, aliamve quamcunque datam Curvam: Res enim omnino in poteſtate eſt.

Videatur horum omnium Demonſtratio Analytica in Tom. III. *Videatur etiam* Nus. VII.

N°. V.

J. B. DEMONSTRATIO CENTRI OSCILLATIONIS

ex natura Vectis, reperta occaſione eorum, quæ ſuper hac materia in Hiſtoria Literaria Roterodamenſi *recenſentur Articulo* 2. *Menſ. Jun.* 1690.

Acta Eruditorum 1691. *Jul.* pag. 317.

. . . .
. . . .

pag. 321. NOtum occaſione præſentis materiæ Eruditis facio, Fratrem meum obſervaſſe, quod præter HUGENII Cycloidem, infinitæ dentur curvæ, per quas deſcendens grave oſcillationes peragat iſochronas: item non ſolum cum NEWTONO & TSCHIRNHAUSIO infinitas Cycloides animadvertiſſe, quæ ſui evolutione ſe ipſas deſcribant, ſed & detexiſſe quampiam ex alio quam Cycloidalium genere, quæ eadem proprietate gaudeat.

N°. VI.

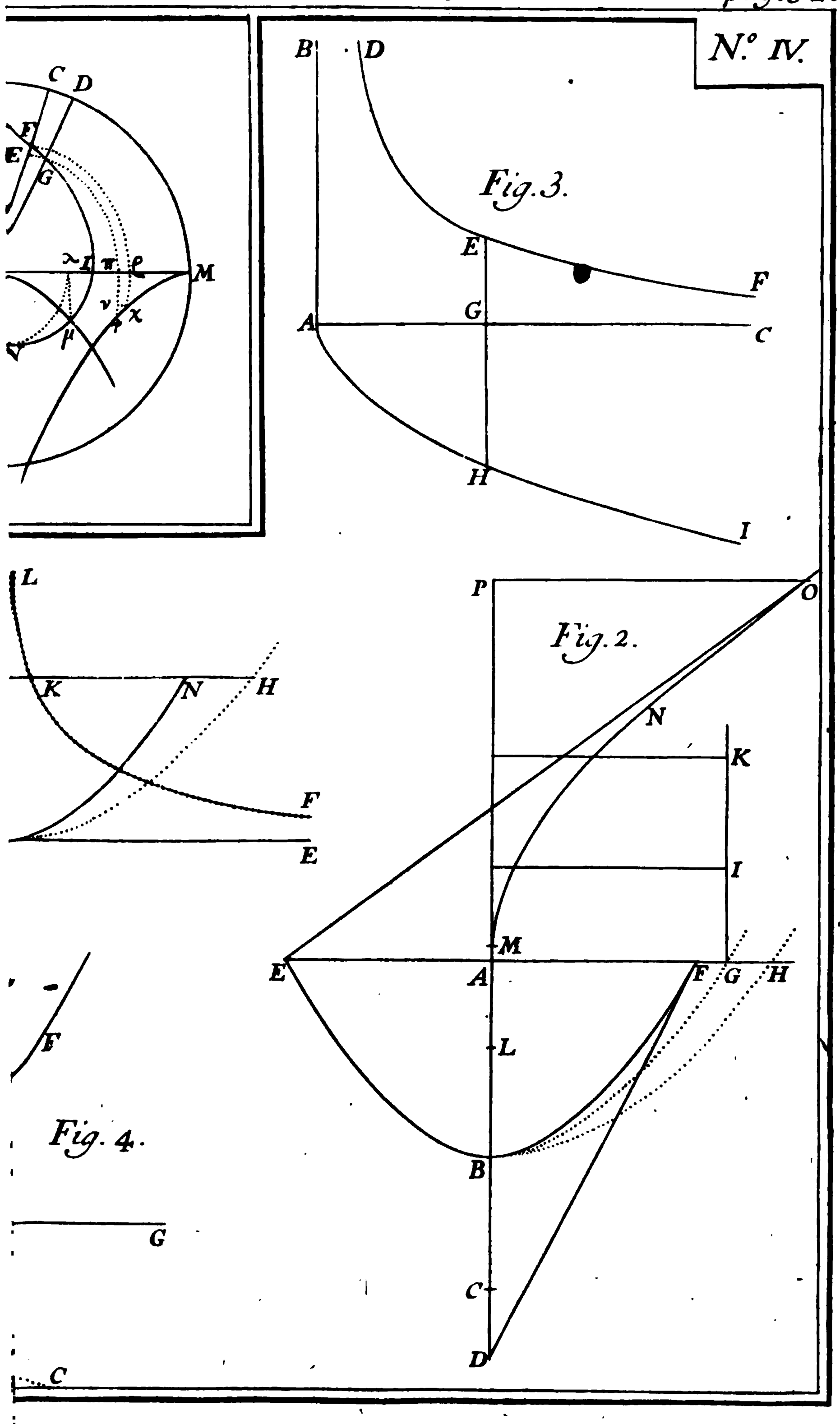
SOLUTIO CURVÆ CAUSTICÆ

Per vulgarem Geometriam Carteſianam; aliaque.

Auctore JOH. BERNOULLI, *Med. Cand.*

Acta Eruditorum 1692. *Januar.* p. 30. QUIA modus, quo naturam Curvæ Cauſticæ Nob. D.T.* primum conſideratæ per vulgarem Geometriam inquiſivi, diverſamque deprehendi ab ea, quam applicatæ Semicirculi in punctis biſectionum formant, non cuivis obvius eſt; placet

TAB. III. *Fig.* 6. * Nob. *De Tſchirnhauſen* in *Actis Erud.* 1682. *Octob.* pag. 364. dixerat curvam quam perpetuo tangunt radii a ſemi-circulo reflexi, poſitis incidentibus parallelis, ita deſcribi poſſe. Sit ECe ſemicirculus reflectens, AC ſemi-diameter radiis


N° IV.
Fig.3.
B D E F G A C H I
Fig.2.
P O N K I M E A F G H L B C D
C D F E G λ π ρ M μ ν φ χ
L K N H F E
Fig. 4.
F G C

placet hic eum, in gratiam amatorum hujus Geometriæ, plenius exponere: ubi primo notare convenit, quod *(Fig. I.)* CB radius reflexus paralleli DC, ſit æqualis ipſi AB, interceptæ inter centrum A & punctum interſectionis B. Nam ob angulos ACF = ACE & DCF = BCE, erit ACB = ACD = CAB; ergo BC = AB. *Q. E D.* TAB. III. *Fig.* 1.

Hoc præliminato, hujus Curvæ generationem ſic concipio: Sint *(Fig. II.)* tres radii, prædicto modo reflexi, AF, BE, CD, ſe mutuo ſecantes in punctis G, H, I, quorum quilibet, ex hypotheſi, curvam quæſitam tangit; ideoque punctum contactus radii BE non poterit eſſe in HB, ſecus AF curvam ſecaret; nec etiam erit in GE, alias DC ſecaret; utrumque contra hypotheſin: erit ergo in GH. Intelligantur nunc puncta A & C magis appropinquari ad B; magis itaque accedent etiam ad ſe invicem puncta H & G, ut ita arctius limitetur punctum contactus; ſi ergo A & C coincidant in B, concurrent quoque G & H, adeo ut contactus plane determinatus ſit, nimirum in concurſu punctorum G & H. Liceat concurſum hunc appellare *punctum concurrentiæ*, quod in hoc ſpeciali exemplo ita comparatum eſt, ut unica linea EB per illud duci poſſit, quæ ſit æqualis ipſi conterminæ KB, cum per quodlibet aliud punctum G vel H, cis vel ultra punctum concurrentiæ, ſemper duæ lineæ EB & DC, vel EB & AF, duci poſſint, ita ut tam KC = CD, quam KB = BE, vel tam KA = AF, quam KB = BE. Quod hactenus dictum eſt de puncto concurrentiæ in radio reflexo EB, pari- TAB. III. *Fig.* 2.

diis incidentibus FD, *fd* parallela, E*e* diameter iis perpendicularis; deſcribantur ſemi-circuli EGA, A*ge*; & pars radii incidentis GD, intercepta inter ſemi-circulos EC*e*, EGA biſecetur in H: erit punctum H unum eorum, quæ conſtituunt cauſticam EHB*be*. Hunc errorem hic refutat Noſter, & eum ipſe *De Tſchirnhauſen*, in *Actis Erud.* 1690. *Febr.* pag. 71. candide agnoſcit. „Quod ad circulum „ attinet, inquit, nuper Dn. *Bernoulli*, Vir in hiſce ſtudiis eximie verſatus & egregiis ſpeciminibus clarus, obſervavit curvam quæ hic per reflexos radios formatur, „ ad ſex aſcendere dimenſiones: ego vero ex calculo olim collegeram illam quatuor „ tantum eſſe dimenſionum. Quapropter rationes denuo ſubducens, quæ ſatis olim „ prolixæ erant, cum nondum inſtructus eſſem neceſſariis compendiis, illico deprehendi errorem qui irrepſerat.

ter etiam intelligendum erit de omnibus aliis, in radiis reflexis FA, DC, &c. Ideoque problema propoſitum huc recidit: *Invenire naturam curvæ, quam formant puncta concurrentiæ radiorum reflexorum.*

TAB. III. *Fig. 3.* Ad hoc inveſtigandum, ponatur more *Carteſiano* (*Fig. III.*) $AB = x$, perpendicularis $BC = y$, $AK = a$: invenienda itaque eſt CD, quæ ſi producatur ad E, DE ſit $= AE$; et reſultans æquatio habebit duas radices æquales, quia ſupponitur C eſſe punctum concurrentiæ, per quod ſcil. unica linea DE ducitur, ita ut ſit $= AE$: ponatur ergo $CD = z$ et $AE\,(ED) = m$, erit $CE = m - z$, $BE = \surd\,(mm - 2mz + zz - yy)$, et $AE = AB - BE = x - \surd\,(mm - 2mz + zz - yy) = m$: reducta æquatione invenitur $m = (xx - zz + yy) : (2x - 2z)$; porro quia $\surd\,(aa - xx) = GB$, erit $GC \times GH = (DC \times CF) = aa - xx - yy$, proinde $CF = (aa - xx - yy) : z$ & $DF = (aa - xx - yy + zz) : z$, & $EF = (aa - xx - yy + zz) : z - m$; ideoque $DE \times EF = (KE \times EI = aa - mm = (aa - xx - yy + zz)\,m : z - mm$; invenietur ergo $m = aaz : (aa - xx - yy + zz) = (xx - zz + yy) : 2x - 2z$; reducta æquatione habetur $z^4 - 2xxzz - 2yyzz - aazz + 2aaxz + x^4 + 2xxyy + y^4 - aaxx - aayy = 0$.

Hæc itaque æquatio, duas radices æquales habens, multiplicetur per duas progreſſiones arithmeticas

$$\begin{array}{lllll} -0, & -1, & -2, & -3, & -4, \\ z^4 & * & -2xxzz & +2aaxz & +x^4 = 0 \\ & & -2yyzz & & +2xxyy \\ & & -aazz & & +y^4 \\ & & & & -aaxx \\ & & & & -aayy \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} +4, & +3, & +2, & +1, & +0 \\ z^4 & * & -2xxzz & +2aaxz & +x^4 \\ & & -2yyzz & & +2xxyy \\ & & -aazz & & +y^4 \\ & & & & -aaxx \\ & & & & -aayy \end{array}$$

provenient duæ æquationes $\odot$ & ☿

$$\odot\quad \begin{array}{lll} 4xxzz & -6aaxz & -4x^4 = 0 \\ +4yyzz & & -8xxyy \\ +2aazz & & -4y^4 \\ & & +4aaxx \\ & & +4aayy \end{array} \qquad ☿\quad \begin{array}{llll} 4z^4 & * & -4xxzz & +2aaxz = 0 \\ & & -4yyzz & \\ & & -2aazz & \end{array}$$

multipli-

multiplicetur $\odot$ per z & ☿ per $(xx+yy+\frac{1}{2}aa):z$, provenit

$$\begin{array}{llll} 4xxz^3 - 6aaxzz - 4x^4z = 0 & \& & 4xxz^3 \ast - 4x^4z + 2aax^3 = 0 \\ +4yyz^3 \qquad - 8xxyyz & & +4yyz^3 \quad - 8xxyyz + 2aaxyy \\ +2aaz^3 \qquad - 4y^4z & & +2aaz^3 \quad - 4aaxxz + a^4x \\ \qquad\qquad + 4aaxxz & & \qquad\qquad - 4y^4z \\ \qquad\qquad + 4aayyz & & \qquad\qquad - 4aayyz \\ & & \qquad\qquad - a^4z \end{array}$$

quarum hanc ab illa ſi ſubtrahas, reſiduum, per aa diviſum erit ♃

$$\text{♃} \quad \begin{array}{l} 6xzz - 8xxz + 2x^3 = 0 \\ \qquad - 8yyz + 2xyy \\ \qquad - aaz + aax \end{array}$$

multiplicetur $\odot$ per $3x$, & ♃ per $2xx+2yy\mp aa$, habebitur

$$\begin{array}{llll} 12x^3zz - 18aaxxz - 12x^5 = 0 & \& & 12x^3zz - 16x^4z + 4x^5 = 0 \\ +12xyyzz \qquad - 24x^3yy & & +12xyyzz - 32xxyyz + 8x^3yy \\ +6aaxzz \qquad - 12xy^4 & & +6aaxzz - 16y^4z + 4aax^3 \\ \qquad\qquad + 12aax^3 & & \qquad - 10aaxxz + 4xy^4 \\ \qquad\qquad + 12aaxyy & & \qquad - 10aayyz + 4aaxyy \\ & & \qquad - a^4z + a^4x \end{array}$$

ſubtractione peracta, reſiduum eſt ☽

$$\text{☽} \quad \begin{array}{ll} 16x^4z & - 16x^5 = 0 \\ +32xxyyz & - 32x^3yy \\ +16y^4z & - 16xy^4 \\ -8aaxxz & + 8aax^3 \\ +10aayyz & + 8aaxyy \\ +a^4z & - a^4x \end{array}$$

multiplicetur ♃ per z, & ☿ per $\frac{3}{2}x$, habebitur

$$\begin{array}{llll} 6xz^3 - 8xxzz + 2x^3z = 0 & \& & 6xz^3 \ast - 6x^3z + 3aaxx = 0 \\ \quad - 8yyzz + 2xyyz & & \qquad - 6xyyz \\ \quad - aazz + aaxz & & \qquad - 3aaxz \end{array}$$

& ſubtractionis reſiduum erit

$$\begin{array}{ll} 8xxzz - 8x^3z + 3aaxx = 0 \\ +8yyzz - 8xyyz \\ +aazz - 4aaxz \end{array}$$

quod

quod ſi ſubtrahatur ex duplo ⊙

$$\begin{array}{lll} 8xxzz - 12aaxz & - 8x^4 = 0 \\ +8yyzz & - 16xxyy \\ +4aazz & - 8y^4 \\ & + 8aaxx \\ & + 8aayy \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 8xxzz - 8x^3z + 3aaxx = 0 \\ +8yyzz - 8xyyz \\ +aazz - 4aaxz \end{array}$$

reſiduum erit

$$\begin{array}{lll} 3aazz - 8aaxz & - 8x^4 = 0 \\ +8x^3z & - 16xxyy \\ +8xyyz & - 8y^4 \\ & + 5aaxx \\ & + 8aayy \end{array}$$

hoc multiplicetur per $2x$, & ♃ per aa; erit

$$\begin{array}{lll} 6aaxzz - 16aaxxz & - 16x^5 = 0 \\ +16x^4z & - 32x^3yy \\ +16xxyyz & - 16xy^4 \\ & + 10aax^3 \\ & + 16aaxyy \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{ll} 6aaxzz - 8aaxxz + 2aax^3 = 0 \\ - 8aayyz + 2aaxyy \\ - a^4z \quad + a^4x \end{array}$$

reſiduum

$$\begin{array}{lll} ♀ & 8aaxxz & + 16x^5 = 0 \\ & - 16x^4z & + 32x^3yy \\ & - 16xxyyz & + 16xy^4 \\ & - 8aayyz & - 8aax^3 \\ & - a^4z & - 14aaxyy \\ & & + a^4x \end{array}$$

addantur nunc ♀ & ☽, & dividendo per $2yy$ habebitur

$8xxz + 8yyz + aaz - 3aax = 0$, ideoque erit $z = 3aax : (8xx + 8yy + aa)$ & per æq. ♀ eſt $z = \frac{16x^5 + 32x^3yy + 16xy^4 - 8aax^3 - 14aaxyy + a^4x}{8aaxx - 16x^4 - 16xxyy - 8aayy - a^4}$

Multiplicando per crucem, & reducta æquatione ad cyphram, orietur tandem

$$\begin{array}{llll} 64x^6 - 48aax^4 & + 12a^4xx & - a^6 & = 0 \\ + 192yyx^4 & - 96aayyxx & - 15a^4yy \\ & + 192y^4xx & - 48aay^4 \\ & & + 64y^6 \end{array}$$

Hæc, quæ vera eſt æquatio naturam Curvæ determinans, ad pauciores dimenſiones reduci nequit; cum per poſitionem

$y =$

$y = \frac{1}{2}a$ æquatio $256x^6 - 27a^6 = 0$ irreducibilis oriatur : unde conſequitur, diverſam eſſe ab ea, quam applicatæ ſemicirculi in punctis biſectionum formant; ut pote cujus natura per æquationem biquadraticam exprimitur,

$$\begin{array}{l} 16x^4 - 8aaxx + a^4 \\ \quad - 8ayxx - 2a^3y = 0 \\ \quad + 16yyxx + aayy \end{array}$$

Haud abſimili modo invenitur natura curvæ ABC (*Fig.* 4), quæ talis eſt, ut a quocunque curvæ puncto B tangens utrimque protenſa, & a cruribus anguli recti FA, FC intercepta, ED, ſit æqualis conſtanti datæ. Invenio namque pro æquatione naturam curvæ exprimente (poſito FG $= x$, GB $= y$; ED $= a$,) TAB. III. *Fig.* 4.

$$\begin{array}{l} x^6 - 3aax^4 + 3a^4xx - a^6 \\ \quad + 3yyx^4 + 21aayyx^2 + 3a^4yy \\ \quad\quad + 3y^4x^2 - 3aay^4 = 0 \\ \quad\quad\quad + y^6 \end{array}$$

Curvæ autem portio BC (ut & hoc moneam) æqualis eſt $\frac{3}{2}$ BD; proinde longitudo totius curvæ ABC æquatur $\frac{3}{2}$ AF, vel $\frac{3}{2}$ ED.

Inſuper, natura curvæ CKIH, quæ ex evolutione curvæ ABC deſcribitur, poſito FG $= x$, GI $= z$, exprimitur per hanc æquationem

$$\begin{array}{l} 4x^6 - 12aax^4 + 12a^4xx - 4a^6 \\ \quad + 12zzx^4 - 24aazzx^2 + 12a^4zz \\ \quad\quad + 12z^4xx - 15aaz^4 = 0 \\ \quad\quad\quad + 4z^6 \end{array}$$

Curvæ hæ habent hanc proprietatem inſignem: ſpatium curvilineum BDC eſt ad ſpatium curvilineum DKC, ubique, ut 4 ad 5.

Facta FL & FM $= \frac{2}{5}$ AF, ſeu FC; ductiſque MN & LN, parallelis FC & AF; erit punctum concurſus N centrum gravitatis curvæ ABC.

Facta vero $FO = \frac{2}{5} FG$, erit centrum gravitatis portionis AB in linea parallela OP.

Facta $FQ = \frac{2}{5} GB$, erit centrum gravitatis portionis BC in linea parallela QR.

Cæterum animadvertit *Clariſſimus Frater* methodum hanc poſſe generalem effici, & adhiberi ad determinandas naturas omnium Evolutarum & Cauſticarum, hoc eſt, curvarum, quæ per interſectiones perpendicularium aut radiorum reflexorum formantur. Etenim ſi duæ rectæ (*Fig.* 5.) BD, CD, fingantur eſſe perpendiculares ad curvam ACB, vel radiorum incidentium LB, LC reflexi, interſecantes ſeſe in communi puncto D; ſequitur utique, quod vice verſa ex dato puncto D duæ quoque ejuſmodi lineæ inflecti poſſint, quæ ſint vel perpendiculares curvæ AB, vel reflexi radiorum in punctum L vergentium. Quocirca, ſi rectæ AE, ED, ut ut indeterminatæ, conſiderentur tantiſper ut cognitæ & determinatæ, hoc eſt, punctum D ut datum; & quæratur exinde longitudo z, puta ipſius DB, vel BL, vel BG, vel AG, (prout hoc illudve ſimplicius videbitur); habebit æquatio longitudinem z exprimens, duas radices æquales quidem, ſicubi puncta B & C indiſtantia, hoc eſt, punctum D in curva optata fuerit: quare, ſi porro dicta æquatio nota methodo tractetur, & eliminetur ex illa littera z, reſultabit alia, quæ rationem indeterminatarum x & y, ſive rectarum AE, ED, adeoque naturam curvæ quæſitæ exhibet. E quibus concludit, Geometriam vulgarem, ſi dextre adhibeatur, poſſe nonnunquam ad ea quoque Problemata extendi, quæ abſque reconditiore indiviſibilium Geometria ſolvi non poſſe credebantur; quanquam cætera cum hac neutiquam comparari mereatur. Speciatim annotat, Evolutam Parabolæ expeditiori calculo ſic inveniri, quam nuper illam ope methodi infinite parvorum repererat. Poſitis enim

TAB. III. *Fig.* 5.

Latere

Latere recto Parab. $= a$	erit $AG = \frac{zz}{a}$	$AI + IE = AG + GF + FE$
$AI = \frac{1}{2}a$	$GF = \frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}a + x = \frac{zz}{a} + \frac{1}{2}a + \frac{ay}{zz}$
$IE = x$	$EF = \frac{ay}{zz}$	$x = \frac{zz}{a} + \frac{ay}{zz}$
$ED = y$		
$BG = z$		

$2z^3 * - 2axz + aay = 0$	$2z^3 * - 2axz + aay = 0$
$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$	$3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$
$-4axz + 3aay = 0$	$6z^3 - 2axz = 0$
$z = 3ay : 4x$	$3zz - ax = 0$
$zz = 9aayy : 16xx$	$zz = ax : 3$

Unde $9aayy : 16xx = ax : 3$, & $27ayy = 16x^3$.

N°. VII.

SOLUTION DU PROBLEME

de la Courbure que fait une Voile enflée par le Vent. *Par Mr.* BERNOULLI, *Frére du Profeſſeur à* Bâle.

TOUS ceux qui auront lu avec attention, dans les Actes de *Leipſic* de l'année paſſée, les trois Solutions du problême de la nature de la courbe que fait une Chaine pendante, conviendront aiſément que ce problême eſt un des plus curieux & des plus utiles que l'on ait réſolu dans ce ſiécle. On ne peut pas non plus douter de ſa difficulté, puiſque pluſieurs Géométres ſ'y ſont appliqués depuis long-tems, & n'ont pu juſqu'à préſent en donner aucune ſolution légitime. On y trouve des conſtructions très différentes, qui déterminent néanmoins une même courbe. Monſieur HUYGENS ſe ſert du calcul des Sinus : Monſieur LEIBNITZ employe

Journal des Savans 1692. 16. Journal du 28. Avril. pag. 189. édit. de Paris, & pag. 280. éd. d'Amſt.

la courbe des Logarithmes; & je me ſuis ſervi de la rectification de la Parabole.

Mon *Frére*, Profeſſeur à *Bâle*, a pris de là occaſion de rechercher pluſieurs courbes que la Nature nous met tous les jours devant les yeux, & entr'autres celle que repréſente une voile enflée par le vent, en faiſant abſtraction de ſa peſanteur; & il eſt arrivé à une équation différentielle de différentielle, qu'il me communiqua pendant que j'étois à *Genève*, ſans pourtant me faire part de la méthode dont il s'étoit ſervi. Il me preſſa en même temps d'en tirer une équation littérale ou algébrique, qui exprimât la nature de la courbe, ou du moins d'en déterminer les points par quelque conſtruction. Mais je ne tâchai ſeulement pas de le ſatisfaire, à cauſe de la difficulté qui me parut très-grande : car l'équation qu'il me propoſoit, étoit compoſée de deux ſortes de différentielles & d'intégrales.

Je ne penſois donc plus à ce problême, lors que je reçus nouvellement une Lettre, dans laquelle il me marque, qu'il a réduit l'autre équation à celle-ci : $adsddx = dy^3$ (a eſt une quantité conſtante ; dx eſt la différentielle de l'interceptée x; ddx eſt la différentielle de dx; dy la différentielle de l'appliquée y; ds, qu'il ſuppoſe toujours égale, la différentielle de la courbe;) & il m'excite encore d'achever la ſolution qu'il avoit commencée, & conduite juſqu'à cette équation; ce qu'il tenoit apparemment pour deſeſperé.

Ayant donc tenté la choſe, j'ai non ſeulement trouvé la méthode par laquelle il étoit venu à cette équation; mais de plus j'ai réſolu entiérement le problême : car je trouve, ce qui eſt digne d'admiration, que la courbe de la Voile eſt la même que celle d'une Chaine.

Si l'on conſulte, dans les Actes de Leipſic †, la conſtruction que j'ai donnée de cette derniére, l'on découvrira aiſément que cette équation $adsddx = dy^3$ lui convient. Je donnerai quand on voudra la maniére analytique, qui m'a conduit à la connoiſſance de cette courbe.

L'on peut ajoûter à ſes principales proprietés, qui ſe trouvent inſerées

† Cy-deſſus N°. IV.

N.° VI.



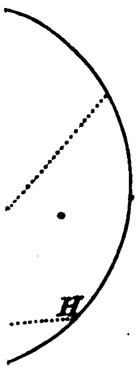


Fig. 2.

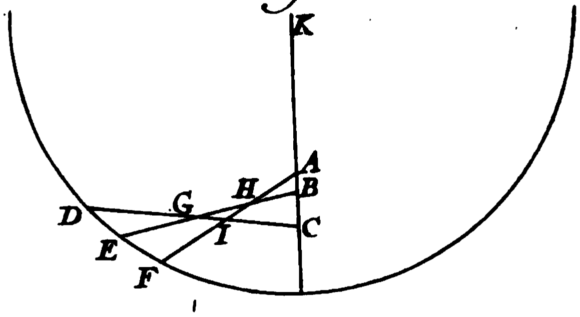
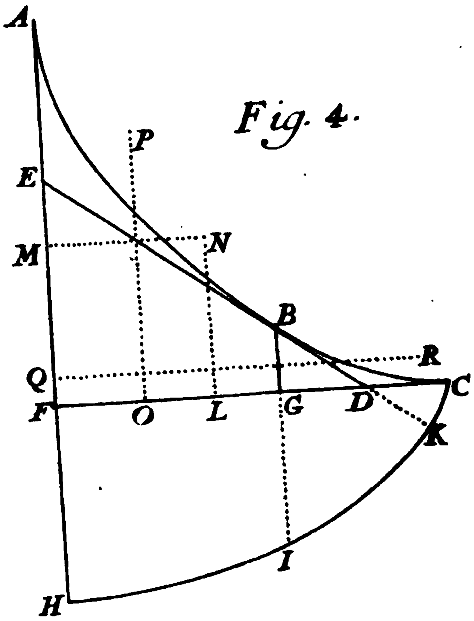


Fig. 4.



ig. 5.

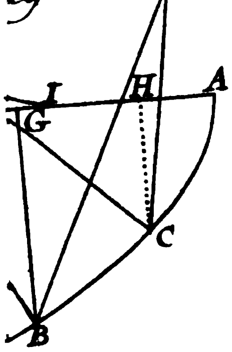
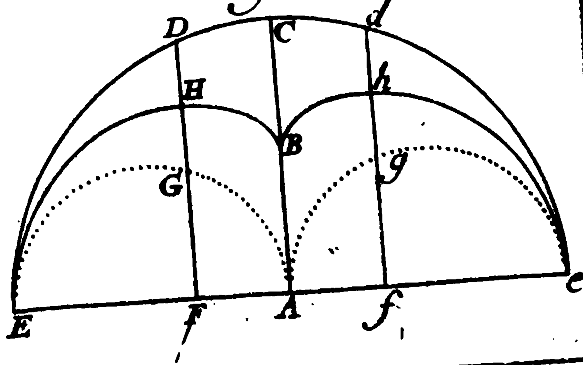


Fig. 6.



inſerées dans les Actes de Leipſic, celle-ci qui peut avoir ſon utilité dans les Méchaniques, & que j'ai trouvée long-temps après.

Soit le levier AE indéfiniment étendu en C, & ſoit attaché au point A le poids P; ſoit priſe CB = CA, & ſoit décrite la courbe d'une Chaine, BFG, dont le ſommet ſoit B, l'axe BE, & le centre C: Cela ſuppoſé, ſi d'un point quelconque D du levier BE, l'on pend un poids Q égal au poids P, enſorte que la direction ſoit ſelon le plan RS, qui touche la courbe BFG en F, où tombe l'appliquée DF; (ce que l'on peut faire aiſément, en faiſant paſſer le fil DHQ autour d'une poulie attachée en H directement au deſſus de F,) je dis que le poids Q contrebalancera dans cette ſituation le poids P; c'eſt-à-dire que ſi le poids Q ſe meut dans la courbe BFG, & que ſon mouvement, qui change continuellement, à cauſe de la différente inclinaiſon des points de la courbe par raport à l'horizon, ſoit appliqué au point correſpondant dans l'axe, il ſera toujours en équilibre avec le poids P. TAB. IV. N°. VII.

N°. VIII.

J.B. * ADDITIO AD SCHEDAM DE LINEIS CYCLOIDALIBUS, &c.

Proximo Maii Actorum horum menſe pag. 207. & ſeqq. exhibitam.

VIXDUM ſubmiſeram Editoribus Actorum nuperam ſpeculationem de Cycloidibus cæteriſque curvis, cum poſtridie à Fratre *Pariſiis* litteras acciperem, in quibus nonnulla egregia huc ſpectantia communicavit; ſignificans, quod præter Cauſticam *Tſchirnhauſianam* aliam reperit, quæ quoque ſit Cyclois; quod deprehenderit Cycloidem vulgarem *Hugenianam* ſui ipſius ut evolutam, ſic cauſticam exiſtere; & quod obſervaverit, eandem proprietatem Spirali logarithmicæ..... communem eſſe: quæ omnia non ſine ſtupore perlegere potui, cum conſiderarem, neutri de alterius ſpeculationibus, has curvas concernentibus, quicquam conſtitiſſe &c.... *Acta Eruditorum* 1692. Jun. pag. 291.

H 3 SOLU-

* *Jacobi* BERNOULLI.

N°. IX.

SOLUTION DU PROBLEME *que Monſieur* DE BEAUNE *propoſa autrefois à Mr.* DES CARTES, *& que l'on trouve dans la 79. de ſes Lettres, Tom. 3.* Par Mr. G***

PROBLEME.

Journal des Savans 1692. 34e. Journal, du 1. Septem. pag. 401. édit. de Paris & pag. 598. éd. d'Amſt.

UNE ligne droite quelconque N étant donnée, & ayant mené deux autres lignes indéfinies AC, AI, en ſorte que l'angle CAI ſoit de 45 degrés; On demande la maniére de décrire la courbe ABB; qui ſoit de telle nature que, ſi l'on mène d'un de ſes points quelconques B l'ordonnée BC & la touchante BT, la raiſon de BC à CT ſoit toujours la même que celle de la droite donnée N à BI.

SOLUTION.

TAB. IV. N°. IX.

Ayant formé le quarré AG, qui a pour côté la droite AH égale à la ligne donnée N, l'on décrira entre les aſymptotes GD, GH, par le point A, l'Hyperbole ALL; & ayant prolongé DA en E, en ſorte que AE ſoit égal à AH, l'on prendra le rectangle EC égal à l'eſpace hyperbolique AKL; l'on prolongera les droites LK, FC, juſqu'à-ce qu'elles ſe rencontrent en un point M; & l'on prendra enfin IB égal à CM: je dis que le point B ſera à la courbe qu'il faloit décrire.

Il eſt évident que la nature de cette ligne courbe ABB dépend de la quadrature de l'Hyperbole, & qu'ainſi elle eſt méchanique dans le ſens de DES CARTES. Voici maintenant quelques-unes de ſes proprietés.

1°. Elle

1°. Elle a pour aſymptote la ligne DO parallèle à AI.

2°. Si l'on nomme AC x, BE y, l'eſpace ABC, compris par les droites AC, CB, & par la portion AB de la courbe, eſt $= xy - \frac{1}{2} yy + nx$.

3°. La diſtance du centre de gravité de l'eſpace ABC de la droite AC eſt $= n + (3xyy - 2y^3) : (6xy - 3yy + 6nx)$ & de AK, $= \frac{1}{2} n + (3xxy - y^3) : (6xy - 3yy + 6nx)$: & l'on a par conſéquent les ſolides, demi-ſolides, &c. formés par la révolution de cet eſpace, tant autour de AC, que de AK, ou BC.

4°. Il eſt facile de déterminer les centres de gravité de ces demi-ſolides. Mais comme on a beſoin d'une adreſſe particuliére pour rectifier cette courbe, en ſuppoſant la quadrature de l'Hyperbole, je propoſe ce problême aux Géomètres, les aſſurant qu'il mérite leur recherche.

Je ne mets point ici la démonſtration, parce que ceux qui entendent ces matiéres, la trouveront aiſément, & qu'il faudroit trop de diſcours pour la faire comprendre aux autres.

NB. *Cette piéce a été faite en commun par Mr.* le Marquis de L'HOPITAL *& par Mr.* BERNOULLI. *C'eſt pourquoi l'un & l'autre a cru être en droit de ſe l'attribuer; l'un dans une Lettre à Mr.* HUYGENS *dont il eſt fait mention dans* l'Hiſtoire des Ouvrages des Savans (*Fevr.* 1693. *Art.* XI. *pag.* 256); *l'autre dans un* Mémoire *qu'on verra ci-après* N°. XI.

EXTRAIT

N°. X.

EXTRAIT D'UNE LETTRE de *Monſieur* BERNOULLI *Médecin*.

Journal des Savans 1693. 3e. Journal, du 19. Janv. pag. 25. édit. de Paris, pag. 39. édition de Holland.

J'AI réſolu le Problême, de trouver Géométriquement le jour du plus petit crépuſcule ; ce qui a occupé mon *Frére*, Profeſſeur de Mathématique à Bâle, & moi, depuis plus de cinq ans, ſans en pouvoir venir à bout. Ce Problême eſt d'autant plus curieux, que je demeure par ma méthode *de maximis & minimis*, (qui eſt pourtant une des plus courtes,) dans un calcul prolixe & embaraſſé, qui ſe laiſſe à la fin réduire à une petite équation quarrée, que je transforme en cette ſimple proportion géométrique : *Comme le rayon, à la tangente de la moitié de l'arc crépuſculaire, (qu'on ſuppoſe ordinairement de* 18 *degrés ;) ainſi le ſinus de l'élevation du Pole, au ſinus de la déclinaiſon méridionale cherchée du Soleil.* Quand on a ſa déclinaiſon, on a auſſi le lieu dans l'Ecliptique ; & partant le jour de l'année auquel ſe fait le plus court crépuſcule. Suppoſé donc l'arc crépuſculaire de 18 degrés, & la latitude de 48 degrés, 51 minutes, qui eſt celle de Paris ; on trouve, ſelon la règle que je viens de donner, que le plus petit crépuſcule ſe fait à Paris, quand le Soleil décline vers le Midi de 6 degr. 50 min. Si on cherche maintenant le lieu dans l'Ecliptique, on trouvera que le Soleil doit être éloigné d'un des points équinoxiaux de 17 degr. 25 minutes, c'eſt-à-dire, qu'on aura le plus petit crépuſcule à Paris le 18 jour avant le premier équinoxe, & le 18 après l'autre équinoxe.

SOLU-

N°. XI.

SOLUTIO PROBLEMATIS CARTESIO PROPOSITI *a Dn.* DE BEAUNE, *exhibita a* JOH. BERNOULLI *Baſileenſi.*

Vide CARTESIUM, Epiſt. 79. Tom. 3.

PRIMA mea hujus problematis ſolutio, quæ reperitur tecto nomine in Diario Gallico 34, anni elapſi, * non minus quam Fratris, qui ſuam mihi, tum temporis Pariſiis commoranti, tranſmiſerat, ſupponit quadraturam ſpatii hyperbolici; id quod conſtructionem in praxi impoſſibilem reddit. Ex eo autem tempore præſentem hanc adinveni, quæ ope Logarithmicæ vulgaris quam facillime peragitur, & propterea, ceu naturalior, priori longe anteferenda. Problema autem tale eſt: Invenire curvam AI, cujus applicata KI ſit ad ſubtangentem KM, ut linea data N, ad portionem applicatæ IL interceptam inter curvam AI, & rectam AL angulum ſemirectum facientem cum axe AK. *Acta Erudit. 1693. Mai. p. 234* *TAB. IV. N°. XI. Fig. 1.*

Solutio: Ad aſymptoton AB, perpendicularem ad AK, conſtruatur Logarithmica vulgaris DC, cujus ſubtangens AF ſit æqualis lineæ datæ N: a puncto quolibet Logarithmicæ C ducantur CI parallela axi AK, & CG ad eundem perpendicularis ſecans tangentem Logarithmicæ DF in puncto H; ſumtaque BI æquali ipſi CH, dico punctum I eſſe ad curvam quæſitam AI.

Cæterum, recta ducta per F parallela ipſi AL eſt aſymptotos curvæ AI; ſpatium curvilineum AIB æquatur ſemiquadrato applicatæ KI, demto rectangulo ſub data N & abſciſſa AK; curva autem ipſa AI eſt ex earum numero, quarum rectificationes quidem in abſtracto non habentur, longitudines

* Supra N°. IX.

tamen per ipſaſmet curvas conſtrui & determinari poſſunt; quod Nob. Dn. HUGENIUS præſtitit in nova ſua Logarithmica, & ego jam olim in Logarithmica vulgari. Interim haſce tres curvas non ſolas, ſed infinitas alias dari poſſe, reperio, quæ prædictam proprietatem habeant; id eſt, quarum rectificationes, ut & ipſarum ſpatiorum quadraturæ, quæ alias in potentia non ſunt, per ipſarum curvarum naturam in lineis rectis & ſpatiis rectilineis determinari queant.

PROBLEMA AB ERUDITIS SOLVENDUM.

TAB. IV. N°. XI. *Fig.* 2.

Quæritur, qualis ſit curva ABC, quæ hanc habet proprietatem, ut, ducta ubicunque tangente BD terminata ab axe AE, portio ejus abſciſſa AD ſit ad tangentem BD, in ratione conſtante M ad N.

Problema hoc ſolutu dignum eſt, & facile Mathematicorum applicationem meretur. In quacunque enim ratione ſit M ad N, curva ABC ſemper eadem facilitate motu quodam continuo deſcribi poteſt, non obſtante, quod curva, pro ratione M ad N, magis vel minus compoſita evadat; in caſu quippe rationis æqualitatis, illico patet curvam ABC eſſe circulum: in reliquis, ſi M ad N eſt ut numerus ad numerum, erit quidem curva geometrica; ſecus autem tranſcendentalis eſt. Quæritur generalis determinatio puncti in curva.

N°. XII.

Journal des Savans 1693. 28e. Journal du 20. Juill. pag. 536. edit. de Paris, pag. 498. edit. de Holland.

AVIS AUX GEOMETRES.

On a dépoſé un Prix de ſoixante piſtoles chez Mr. *Le Normand*, Notaire au Châtelet de Paris, pour la premiére perſonne qui réſoudra la Queſtion ſuivante.

Ayant une partie ſi petite qu'on voudra d'une Courbe géométrique, on demande une méthode pour réſoudre une égalité donnée par le moyen de cette partie, & d'une autre ligne courbe, dont le lieu ſoit le plus ſimple qu'il ſera poſſible.

L'on

L'on demande auſſi que cette méthode paroiſſe publiquement, avant le premier de Janvier prochain; & qu'elle ne ſuppoſe aucune des règles qui ſont de l'invention particuliére de Mr. ROLLE.

Monſieur DES CARTES a propoſé ce Problême, pour une des trois Sections Coniques ſeulement; & on n'en avoit jamais propoſé un plus beau pour la réſolution des égalités. Deplus cette réſolution étant abſolument néceſſaire pour perfectionner toutes les parties des Mathématiques; il importe de ſavoir, s'il n'y a point pour cela de méthode qui ſoit différente de celles que Mr. ROLLE a données au Public.

N°. XIII.

SOLUTION D'UN PROBLEME

propoſé dans le 28.ème Journal de cette année, 1693.
Par Mr. BERNOULLI *le Médecin.*

PROBLEME.

ATant une partie ſi petite qu'on voudra d'une Courbe géométrique; on demande une méthode pour réſoudre une égalité donnée par le moyen d'une autre ligne courbe, dont le lieu ſoit le plus ſimple qu'il ſera poſſible. Journal des Savans 1693. 34e. Journal du 31. Aouſt. pag. 405. édit. de Paris, pag. 630. édit. de Holland.

SOLUTION.

J'appelle ici équations ſemblables, celles, qui étant du même degré, ont le même nombre de termes diſpoſés de la même maniere, & affectés des mêmes ſignes, & dont les quantités connues, diſtribuées dans le même ordre, ont entr'elles une même raiſon. Ainſi ces deux équations

$$x^4 * + aaxx - abbx - c^4 = 0$$
$$\& \; z^4 * + ddzz - dffz - g^4 = 0$$

ſeront appellées ſemblables, parce que la derniére a un même

nombre de termes, diſpoſés dans le même ordre, & avec les mêmes ſignes que la premiére, & dont les quantités connues d, f, g ſont telles, que $a : b = d : f$ & $b : c = f : g$ &c.

Je ſuppoſe que les racines des équations ſemblables, (ce qui eſt facile à démontrer,) ont entr'elles la même raiſon que les quantités connues diſpoſées de la même maniére, c'eſt-à-dire, par exemple, que $x : z = a : d = b : f = c : g$, &c.

Je ſuppoſe de plus, que toute équation propoſée peut être transformée, en une autre ſemblable, dont les racines ayent une raiſon donnée avec celles de la propoſée.

Soit maintenant l'équation ſolide $x^3 * + aax - b^3 = 0$ dont il faut trouver la racine x, par le moyen d'une portion donnée CB d'une parabole, qui a pour ſommet A, pour paramètre la ligne AD, & pour ordonnées les droites BE, CG. On cherchera, par les règles de SCHOOTEN, les limites entre leſquelles la racine de l'équation propoſée eſt reſſerrée, & on trouvera, dans nôtre exemple, x plus grand que $b^3 : (aa + bb)$ & moindre que b. Cela poſé, il peut arriver différens cas, qu'il eſt à propos d'expliquer en particulier.

TAB. IV. N°. XIII.

Premier cas, lorsque les limites ſont égales, ou tombent entre les appliquées données, BE, CG. Ayant poſé, ſelon DES CARTES, $DA = l$, $AH = p$, $HI = q$, $IL = r$, & $LF = x$; on formera une équation, qui étant comparée avec la propoſée, donnera en termes connus des valeurs de p, q, r, telles, que le cercle décrit du centre I, du rayon IL, coupera la parabole en un point L, ſitué entre les extrémités B, C, de la portion donnée. Ce qui eſt évident, puiſque l'on ſuppoſe dans ce cas la racine LF plus grande que BE, & moindre que CG.

Second cas, lorſque les limites ne ſont point reſſerrées entre les ordonnées BE, CG. On transformera l'équation propoſée $x^3 * + aax - b^3 = 0$ en une autre ſemblable: $z^3 * + ccz - f^3 = 0$, dont la limite en deſſous $f^3 : (cc + ff)$ ſoit égale à BE: ce qu'on fera par le moyen de ces proportions $\frac{b^3}{aa + bb} : BE = a : c = b : f$.

Or

Or ſi la limite en deſſus f de la transformée eſt égale ou moindre que CG, ou trouvera ſa racine LF par le premier cas; & faiſant $c : a = LF$ (ou z) : x; cette quatriéme proportionnelle ſera la racine de l'équation propoſée x^3 &c.

Troiſiéme & dernier cas, lorſque la limite en deſſus f de l'équation transformée eſt plus grande que CG. Ayant fait une progreſſion Géométrique $\div g, h, i, k$, &c. dont les deux premiers termes g, h, qui ſervent à trouver les autres, ſoient BE, CG, & dont le dernier k ſoit égal ou plus grand que f; il eſt évident que la racine z ſera reſſerrée entre h & i, ou entre i & k, &c. Or pour la trouver, on transformera de nouveau la transformée z^3 ∗ &c. en d'autres ſemblables, s^3 ∗ $+ mms - n^3 = 0$ & y^3 ∗ $+ eey - d^3 = 0$, telles, que $h : g = c : m = f : n$, & $i : g = c : e = f : d$. D'où il ſuit, que la ſeconde transformée s^3 &c. a ſa racine s entre g, h, lorſque la racine z de la premiére eſt entre h, i; & que la troiſieme y^3 &c. a ſa racine y entre g, h, lorſque la racine z de la premiére eſt entre i, k. Si donc on cherche ſéparément la racine de chaque équation, il faudra néceſſairement qu'il y en ait une qui tombe entre BE & CG. Que ce ſoit, par exemple, la racine s, ou LF, de la ſeconde équation s^3 &c. on trouvera auſſi-tôt la racine cherchée x, en faiſant $m : a = s : x$. Ce qui étoit propoſé.

Cette méthode eſt generale pour toutes ſortes d'équations: Car ſi l'on propoſoit, par exemple, de trouver les racines d'une équation du douziéme degré, par une portion donnée d'une courbe de trois dimenſions; il faudroit employer une autre courbe de quatre dimenſions, & ayant trouvé les limites des racines de l'équation propoſée, on feroit des équations ſemblables, & on chercheroit la poſition & l'eſpèce de la courbe de quatre dimenſions, de la même maniére qu'on vient de faire celle du cercle.

Au reſte, ſi l'on trouve ici quelques difficultés, on eſt prêt de les éclaircir, & de ſatisfaire pleinement des Juges équitables.

N°. XIV.

REPONSE A Mr. BERNOULLI *le* MEDECIN, *au ſujet d'une méthode, qui a paru ſous ſon nom dans le Journal du 3 Août dernier.*

Journal des Savans 1693. 36. Journal du 14. Sept. pag. 425. edit. de Paris. pag. 660 édit. de Holl.

LA queſtion qui a été propoſée dans le Journal du 20 Juillet de cette année, (1693.) ſeroit facile à réſoudre par les méthodes de Mr. ROLLE : mais pour s'accommoder aux inclinations de pluſieurs perſonnes, on s'eſt engagé de donner un prix de ſoixante piſtoles à ceux qui pourront réſoudre ce problème ſans ſe ſervir des productions de cet Auteur. Mr. BERNOULLI *le Médecin* en a donné une réſolution dans le Journal du 31 Août; & après avoir dit qu'elle eſt generale, il déclare *qu'il eſt prêt d'éclaircir toutes les difficultés qu'on y trouvera, & de ſatisfaire pleinement des Juges équitables.* Il ſeroit à deſirer que M. BERNOULLI eût réuſſi dans ſon entrepriſe : nous aurions de lui une découverte fort conſiderable en Mathématique, pour un prix fort médiocre. Mais l'on trouve des *difficultés* dans ſa réſolution, qui peuvent beaucoup ſervir pour en découvrir les défauts, s'il veut ſe donner la peine de les *éclaircir.*

Pour réuſſir, il auroit eu beſoin d'une méthode, qui fût ſuffiſante pour réſoudre par Géométrie les égalités de tous les degrés; & celle qu'il cite, n'a été faite, & ne ſuffit que pour le troiſiéme ſeulement. Toutefois il conclut pour ſa réſolution, comme ſi cette méthode particuliére étoit *generale. On chercheroit*, dit-il, *la poſition & l'eſpèce de la courbe, de la même maniére que l'on vient de faire celle du cercle.* A dire vrai, il auroit beſoin que cette *maniére* fût *la même* dans tous les degrés, pour réſoudre la queſtion propoſée. Mais comme cette règle du troiſiéme degré eſt, ſelon lui, de Mr. DES CARTES, les ſentimens de ce grand inventeur doivent être d'un grand poids en cette occaſion, & l'on peut voir au naturel ce qu'il en penſoit dans le troiſiéme Volume de ſes Lettres, page 449, où il parle de ſa Règle du ſixiéme degré, en cette maniére: *J'oſe dire qu'elle eſt la plus belle, & qui a été ſans comparaiſon la plus difficile de toutes les choſes qui ont été inventées en Géométrie, & qui le ſera encore peut-être ci-après en pluſieurs ſiécles, ſi ce n'eſt que je prenne moi-même la peine d'en chercher d'autres.*

Cela

Cela eſt d'autant plus conſiderable, que M. DES CARTES n'a écrit ſes ſentimens dans cet endroit, que pour les faire communiquer aux Mathématiciens ſes adverſaires, qui travailloient ſur le même ſujet. Et comme il ne fait conſiſter la difficulté, dont il parle, que dans la maniére de règler *la poſition & l'eſpèce des courbes*; on voit de-là combien il étoit éloigné de croire, que ſa règle du troiſiéme degré ſoit ſuffiſante pour tous les degrés à l'infini. De plus, les ſentimens de M. BERNOULLI ne ſont pas ſeulement combattus par M. DES CARTES dont il emprunte la régle; ils ſont encore contraires à l'expérience, & aux ſentimens des plus Savans Géometres, parmi leſquels on peut compter ſon frére M. BERNOULLI le Mathématicien: Ainſi il ſeroit à ſouhaiter qu'il voulût bien *éclaircir* cette *difficulté*. Il pourra encore, pour cet *éclairciſſement*, conſulter le troiſiéme Volume des Lettres de Mr. DES CARTES, page 116; & peut-être qu'il découvrira, ſi les égalités auxiliaires, que M. ROLLE a introduites, ſont neceſſaires pour *trouver la poſition & l'eſpèce des courbes*. Il pourra encore voir l'uſage d'une autre ſorte d'auxiliaires, en comparant la page 412, du même Volume à l'inverſe des tangentes, qui a paru depuis dans le Journal, * ſelon laquelle les degrés indéterminés deviennent les inconnues de ces auxiliaires, & par conſéquent capables de toutes les modifications des racines. Mais pour donner un éclairciſſement ſolide, ſans ſortir de ſon ſujet; il n'aura qu'à *trouver l'eſpèce & la poſition des courbes pour les égalités du douziéme degré*, qu'il a priſes pour le ſecond exemple de ſa méthode; & le détail qu'il en donnera ſera voir ce que l'on en doit croire, quand même il ſe ſerviroit des auxiliaires, au lieu de ſe ſervir de la Règle du troiſiéme degré, & qu'il les ſupprimeroit après en avoir tiré un Canon. Lorſqu'il aura donné les *éclairciſſemens* neceſſaires aux *difficultés* qu'on vient de lui propoſer, il permettra qu'on lui en propoſe d'autres ſur ſa réſolution, qui ne ſont pas moins conſiderables, ni moins difficiles à *éclaircir*. Cependant on a cru qu'il étoit bon de marquer ici une voye qui auroit ſuffi pour réſoudre le problème propoſé, s'il eût été permis de ſe ſervir des méthodes de Mr. ROLLE. Que z ſoit l'inconnue, c & $c+d$ ſes hypothèſes, & que a & $a+b$ ſoient les deux ordonnées, ou les deux diſtances extrêmes de la courbe donnée, on fera $bz = dx + cb - da$; & cette préparation, avec les méthodes de cet Auteur, réſoudront généralement le problème. On peut couper la courbe donnée, & appliquer les méthodes ſur chacune de ſes parties, lorſque cela ſervira pour ſe procurer quelque avanta-

* 1693. 27. Journal. du 13 Juill. pag. 321 éd. de Paris, pag. 476. éd. de Holl. *Méthode pour former les Courbes Géométriques, par le moien de leurs Tangentes. Tirée des Lettres de* Remi Lochell.

avantage; ou pour éviter quelque inconvénient. Mais on donnera encore d'autres méthodes, où cela ne ſera jamais neceſſaire, ſoit qu'on veuille trouver chaque racine ſéparément, ou pluſieurs à la fois, & qu'on ne veuille point s'occuper du choix des réduites.

N°. XV.

REPONSE DE M. BERNOULLI *le* MEDECIN, *à l'Objection inſerée, dans le Journal du* 14. *Septembre dernier, contre une Méthode qui a paru de lui dans le Journal du mois d'Août précédent.*

Journal des Savans 1694. 4. Journal, du 18. Janv. pag. 32. édit. de Paris pag. 45. éd. de Holl.

CE n'eſt pas depuis la publication de la queſtion propoſée dans le Journal du 20 Juillet, que j'ai trouvé la méthode pour la réſoudre : long-temps auparavant, une perſonne de la premiére qualité, qui ne cede en rien aux premiers Mathématiciens de l'Europe, me l'avoit propoſée en termes peu différens, & avoit fort approuvé la ſolution qu'on rejette ici. En effet, elle eſt ſi évidemment bonne, qu'il faut être partie, & s'être propoſé de ne jamais ſe rendre, pour y trouver la moindre difficulté. Quoiqu'il en ſoit, je vois par avance que mon adverſaire entreprend de faire trainer l'affaire le plus qu'il pourra, puiſqu'il eſt prêt, dit-il, à propoſer de nouvelles difficultés, dès que l'on aura ſatisfait aux premiéres. Mais que ne les a-t-il propoſées toutes à la fois ? C'a été ſans doute pour ſe reſerver de faux-fuyans. Il lui a été facile d'en faire proviſion : car ces ſortes de problêmes ſont ſi generaux, qu'il eſt impoſſible d'en donner des ſolutions aſſez préciſes pour être à couvert de toutes les chicanes, quelques bonnes que ces ſolutions ſoient d'ailleurs. C'eſt pour cela que je pourrois fort bien me diſpenſer de répondre, comme d'une choſe tout à fait inutile. Cependant, de peur que ceux qui n'auroient pas aſſez examiné ma méthode ne croyent que l'objection qu'on me fait ſoit de conſéquence, j'y répondrai. Mais je déclare

que

que c'eſt une fois pour toutes, laiſſant la déciſion de cette affaire aux perſonnes intelligentes & déſintéreſſées, & ſur tout m'en rapportant au jugement de Meſſieurs de l'Académie des Sciences.

La principale objection qu'on me fait, eſt que *pour réuſſir, j'aurois beſoin d'une Méthode qui fût ſuffiſante pour réſoudre par Géométrie les égalités de tous les degrés; & que celle que je cite, n'a été faite, & ne ſuffit que pour le troiſiéme ſeulement.* J'avouë que j'ai beſoin d'une telle Méthode, & que celle que j'ai citée n'a été faite que pour le troiſiéme degré; mais s'enſuit-il qu'elle ne ſuffiſe pas generalement pour tous les autres? Il eſt vrai que l'application en devient très-pénible dans les égalités de plus de trois dimenſions: toutefois la difficulté n'ôte pas la poſſibilité. L'autorité de M. DES CARTES ne prouve rien contre moi; car tout ce qu'il dit à l'endroit marqué, n'aboutit qu'à faire entendre, que ſa régle pour le ſixiéme degré eſt très-difficile à pratiquer, & qu'il n'y a que lui qui en puiſſe trouver d'autres. Outre cela M. DES CARTES n'étoit pas infaillible; & je ne doute pas même que, s'il étoit encore en vie, il ne revocât pluſieurs choſes qu'il a avancées. La maniére de M. SLUSE de conſtruire les racines, n'eſt-elle pas beaucoup plus aiſée & plus naturelle que celle de M. DES CARTES? Quel cas n'a-t-il pas fait de ſa maniére de trouver les tangentes des courbes? Quel deſir n'a-t-il pas témoigné de la ſçavoir generalement? Voyez comme il parle dans ſa Géométrie, page 48. *J'oſe dire que c'eſt ici le problême le plus utile & le plus general, non ſeulement que je ſçache, mais même que j'aye jamais deſiré de ſçavoir en Géométrie.*

Cependant ſa Méthode ne s'étend qu'aux courbes géométriques; outre qu'elle eſt très-prolixe. Mais aujourd'hui que l'on a trouvé un nouveau calcul, c'eſt un jeu d'enfant que de trouver les touchantes non ſeulement des courbes géométriques, mais auſſi de celles qu'il appelle méchaniques. C'eſt en moins de rien que l'on trouve les *maxima* & *minima*: C'eſt pourtant ce qui a fait le plus de bruit entre lui & ſes contemporains.

Tant s'en faut que mes ſentimens ſoient contraires à l'expérience, & au ſentiment des Géométres, qu'ils ſont plutôt favoriſés par l'une & par l'autre ; comme on peut le voir dans les *Actes de Leipſic* de l'année 1688, au mois de Juin, où mon Frére, par le moyen de deux courbes, dont il donne la poſition & l'eſpèce, réſout ſans aucune peine une égalité du neuviéme degré.

Au reſte, pour ne rien omettre, j'ai lû les pages 116 & 412 du troiſiéme Volume des Lettres de M. DES CARTES; mais je n'y vois pas, ni ce que c'eſt que les égalités auxiliaires de M. ROLLE, ni ce qu'elles me pourroient ſervir *pour trouver la poſition & l'eſpèce des courbes*. Et tout ce que j'ai vu de M. ROLLE, c'eſt un petit écrit contre M. DE LAGNY, dans lequel il n'y a rien d'approchant.

Mais pour donner un éclairciſſement ſolide, ſans ſortir de mon ſujet, je n'ai qu'à trouver l'eſpèce & la poſition des courbes pour les égalités du douziéme degré. Oui je le veux : mais qu'on me promette qu'on en demeurera là, & qu'après cela toute la diſpute ſera terminée. Soit donc propoſée l'égalité generale du douziéme degré $y^{12} * \pm lly^{10} \pm m^3y^9 \pm n^4y^8$ &c. $= 0$. Pour la réſoudre par le moyen de deux courbes, il faut que j'en trouve *l'eſpèce & la poſition*. Je ſuppoſe donc à la Sluſienne $aax = y^3$ & à la place d'y^3 je mets dans l'égalité propoſée ſa valeur aax, ce qui me donne cette équation, $a^8x^4 * \pm a^6lluyx^3 \pm a^6m^3x^3 \pm a^4n^4yyxx$ &c $= 0$ que l'on peut conſidérer comme ayant deux indéterminées x & y, & partant comme une égalité qui détermine la nature d'une courbe. Voilà donc déja l'eſpèce des deux courbes cherchées, dont l'une $aax = y^3$ eſt la premiére parabole cubicale ; & l'autre que je viens de trouver eſt de quatre dimenſions. Quant à leur poſition, elle ſe donne d'elle-même : car il n'y a qu'à les poſer en ſorte qu'elles ayent le ſommet & l'axe communs : alors les ordonnées qui paſſeront par les points d'interſection de ces courbes entr'elles, ſeront les racines de l'égalité propoſée.

N°. XVI.

REMARQUES SUR LA REPONSE *qui a été inſerée ſous le nom de M.* BERNOULLI *dans le* 3e. *Journal de cette année* (1694) *au ſujet d'un Probléme de Géométrie.*

JE voudrois bien n'être pas obligé de refuſer à M. BERNOULLI le ſilence qu'il me demande par ſa réponſe: Mais elle eſt publique, & ſes prétentions ſont telles que je ſuis engagé d'en dire mon ſentiment, pour ne pas encourir le ſoupçon de favoriſer l'erreur. *Journal des Savans* 1694. 7. Journal, du 15. Fév. pag. 77. édit. de Paris pag. 172. edit. de Holl.

Il prétend avoir réſolu, dans le Journal du 31 Août dernier, le probléme qui avoit été propoſé avec un prix de 60 piſtoles, dans le Journal du 20 Juillet: Et je prétens que des Régles qu'il a données, à celles qu'il auroit dû donner pour le réſoudre, il n'y a pas moins de différence que du troiſiéme degré à un degré infiniment élevé.

Cependant il parle de ſa ſolution, en pluſieurs endroits de ſa réponſe, comme ſi l'on avoit grand tort d'y trouver à redire, & il s'écrie qu'*elle eſt ſi évidemment bonne, qu'il faut être partie, & s'être propoſé de ne jamais ſe rendre, pour y trouver la moindre difficulté.* Toutefois *il avoue qu'il auroit beſoin d'une méthode qui fût ſuffiſante pour réſoudre par Géométrie les égalités de tous les degrés, & que celle qu'il a citée n'a été faite que pour le troiſiéme ſeulement.* Enſuite il ajoute qu'*il eſt vrai que l'application de cette méthode du troiſiéme degré devient très-pénible dans les égalités de plus de trois dimenſions; que toutefois la difficulté n'ôte pas la poſſibilité.*

Mais pour faire que la ſolution de M. BERNOULLI ſoit *bonne & generale*, comme il le prétend, il faut qu'elle ſatisfaſſe au probléme propoſé; & pour y ſatisfaire il ne ſuffit pas qu'il ſoit poſſible d'appliquer la méthode qu'il a citée, il faudroit encore une méthode pour régler cette application, ou bien en donner une autre qui fût équivalente aux deux enſemble; & en quelque maniére que cela arrive, l'on a beſoin *que la méthode embraſſe tous les degrés, & qu'elle ſoit differente de celle que M.* ROLLE *a donnée pour le même ſujet.*

C'eſt encore une des conditions du probléme: *Que des deux courbes qui doivent concourir pour réſoudre par Géométrie une égalité quelconque, il faut qu'il y en ait une qui ſoit donnée, & que l'autre ſoit du degré le plus ſimple qu'il eſt poſſible.* Ainſi il étoit inutile que Mr. BERNOULLI ſe donnât la peine de recourir à la méthode de M. SLUSE, pour donner un *éclairciſſement ſolide* à ſa ſolution, parce que cette méthode ne ſuffit que dans les occaſions, où il eſt libre de prendre & de ſituer des courbes accommodantes; & l'on peut voir auſſi, que bien loin d'*éclaircir* par cette méthode, la *poſition des courbes*, qu'il avoit donnée dans ſa ſolution, il a été obligé d'y faire un changement general.

Comme il ſuffiroit de lire avec un peu d'attention les autres endroits de ſa réponſe, pour s'apercevoir qu'ils ne prouvent rien contre moi, & qu'ils ſont contraires à ſes ſentimens; je ne donnerai point les obſervations que j'y ai faites, afin de me conformer en cela à ſes intentions.

Mais il y a des difficultés importantes, qu'il a touchées dans ſa ſolution, ſans en parler dans ſa réponſe: Et il eſt bon de les remarquer, parce qu'il eſt néceſſaire de s'en démêler pour réſoudre le probléme. C'eſt de donner une méthode pour trouver les limites des racines de toutes les égalités, qui ſoit auſſi generale que celle que M. Rolle a donnée ſur ce ſujet, & qui en ſoit différente. Et il eſt certain que celle que M. Bernoulli a citée pour ce beſoin, eſt très-défectueuſe; ce qui ſe peut vérifier très-facilement & fort vite, avec des connoiſſeurs, dans une conférence.

Ainſi il ſe trouvera que M. Bernoulli n'a point ſatisfait aux difficultés capitales du probléme, & même que l'on ſeroit infiniment éloigné d'y ſatisfaire par les méthodes qu'il a citées pour ce ſujet.

Ce probléme ſuppoſe auſſi que l'on prépare l'égalité propoſée; & cette préparation ſe peut faire fort aiſément par le moyen d'une régle que je donnai ſur ce ſujet dans le Journal du 14 Septembre dernier. * Pour y réuſſir par la régle de M. Bernoulli, l'on auroit beſoin de transformer & *de réſoudre* une ſuite d'égalités, du moins auſſi compoſées que celle qui eſt en queſtion: & comme il ne donne point de détermination analytique pour juger de celle qui réuſſit, il ſe trouvera pour cette raiſon, & pour d'autres encore dont on ne parle point, que ſa régle eſt inutile dans l'uſage. Mais après tout il y a un tour ingénieux, qui marque en lui & de l'eſprit & de l'Algèbre.

Je conſens qu'il prenne Meſſieurs de l'Académie Royale des Sciences pour juges de notre différend, quoique j'aye de fortes raiſons pour en recuſer quelques-uns. Il me ſuffit qu'ils veuillent bien ſigner le jugement qu'ils en porteront, & qu'il me ſoit communiqué.

La méthode, que j'avois promiſe, pour faire évanouïr les inconnues qui ſont communes à pluſieurs égalités, conſiſte à les multiplier par des quantités pleinement indéterminées, dont l'origine ſoit l'inconnue même que l'on veut faire évanouïr. Enſuite on compare les produits entr'eux, ſavoir les termes de l'un aux termes de l'autre, chacun à ſon pareil: d'où il reſulte des égalités auxiliaires, qui ont pour inconnues les indéterminées introduites, & dont la réſolution donne ce que l'on demande. Et generalement parlant, pour appliquer l'Algèbre à l'Algèbre même, pour l'appliquer aux courbes géométriques & aux queſtions qui s'y reduiſent, un des meilleurs moyens d'y réuſſir, c'eſt de ſuppoſer des égalités pleinement indéterminées, pour en tirer des égalités auxiliaires. Cela ſera expliqué dans la ſuite. *Q. D. B. V.*

* Cy deſſus N°. XIV. pag. 71.

N°. XVII.

Q. D. B. V.

POSITIONES LOGICÆ DE PROPOSITIONIBUS

Quas, cum appoſitis

POSITIONIBUS MISCELLANEIS

Speciminis loco

Publicè Ventilandas propoſuit

Ad d. 27. *Novembris* MDCXCIII.

JOANNES BERNOULLI

MED. CANDID.

Edita primum BASILEÆ 1693.

[illegible] ONES

[illegible] CÆ

[illegible] ONIBUS.

[illegible] o ideas, unam alteri [illegible] el non convenire, re- [illegible] o hæc mentis vocatur [illegible]

II.

[illegible] illas ideas conjungi- [illegible] invicem ſeparamus, [illegible], vel explicitæ, vel [illegible]

III.

Illæ ideæ, de quibus prædicatur, id eſt, vel affirmatur vel negatur, ſunt *Subjectum*; reliquæ, quæ prædicantur, ſunt *Prædicatum* enunciationis.

IV.

Si Subjectum ſumitur in tota ſua latitudine ſeu extenſione; Enunciatio dicitur *univerſalis*: excipe cum ſubjectum eſt terminus ſingularis, tunc enim ipſa Enunciatio dicitur *ſingularis*.

V.

Sed ſi reſtringitur ad partem indeterminatam ſuæ extenſionis; erit *particularis*.

VI.

Si tota quædam idea continetur ſub alia, poterit illa ſemper univerſaliter affirmari de hac? Sic, quia omne quod concipio in *figura*, etiam concipio in *triangulo*; poſſum formare hanc propoſitionem univerſalem, *Omne triangulum eſt figura*: quæ univerſalitas dici poteſt *eſſentialis*, ad diſtinctionem *accidentalis*.

VII.

Omnes enim illæ propoſitiones *accidentaliter* univerſales ſunt, in quibus idea prædicati non continetur ſub idea ſubjecti: Ut, *Omnis homo eſt mortalis*, eſt enunciatio univerſalis accidentalis; idea enim mortalitatis non comprehenditur ſub idea hominis.

VIII.

Hinc omnes propoſitiones, in quibus genus, vel differentia, vel

vel utrumque, univerſaliter affirmatur de ſpecie, ſunt univerſales eſſentiales: eæ autem proprium nomen propoſitionis non merentur, & rectiùs propoſitiones *verbales* dici poſſent, quatenus nempe in meris verbis conſiſtunt; nam duas vel plures ideas non conjungo, ſi unam eandemque, vel partem ſui, diverſo nomine notatam, de ſe ipſa prædico.

I X.

Una eademque propoſitio poteſt eſſe univerſalis eſſentialis uno, & accidentalis alio reſpectu: ſic ſi dico, *Omnis parabola habet quadrata applicatarum abſciſſis proportionalia;* ſi proportionalitas abſciſſarum & quadratorum applicatarum ſumitur pro differentia Parabolæ, propoſitio erit eſſentialiter; ſin autem pro proprio, erit accidentaliter univerſalis.

X.

Una eademque idea poteſt convenire pluribus aliis diverſiſſimis; hinc prædicatum enunciationis affirmantis, licet univerſalis, non ſumitur univerſaliter, ſed tantum ſecundum partem ſuæ extenſionis, in qua cum ſubjecto convenit.

X I.

Ex quo ſequitur, Propoſitionem univerſalem affirmantem ſimpliciter converti non poſſe.

X I I.

Si quædam idea alteri non convenit; evidens eſt, quod ſecundum totam ſuam extenſionem eidem non conveniat; hine prædicatum enunciationis negantis, etiamſi particularis, ſumitur univerſaliter.

XIII.

Hinc quoque Propoſitio particularis negans non convertitur ſimpliciter.

XIV.

Duabus ſpeciebus oppoſitionum, *contrarietati* & *contradictioni*, accenſeri poteſt tertia, compoſita ex utraque; illa videlicet quæ fit ex enunciatione ſingulari, ut: *Wilhelmus eſt Rex*, *Wilhelmus non eſt Rex*. Hæ enim enunciationes poſſunt eſſe contrariæ, quia qualitate tantum differunt, & conveniunt quantitate, utpote utraque ſingularis æquipollens univerſali: ſed etiàm ſunt contradictoriæ, quia ſemper una vera & altera falſa eſt; id quod contradictoriis duntaxat competit.

XV.

Si utraque duarum propoſitionum contrariarum eſt falſa, neceſſario utraque ſubcontrariarum erit vera; & viciſſim: ſervatis iiſdem propoſitionis ſubjecto & prædicato.

XVI.

Sed ſi alterutra contrariarum eſt vera, erit neceſſario una ſubcontrariarum vera & altera falſa.

XVII.

Enunciationes affirmantes poſſunt mutari (manente eodem ſenſu) in negantes, & vice verſa negantes in affirmantes; Sed mutatæ habebunt prædicatum, quod in Scholis vocatur *infinitum*, per adjunctam particulam *non*: Sic enunciatio hæc affirmans, *Omnis homo eſt peccator*, mutatur in hanc æquivalentem negantem, *Nullus homo eſt non peccator*. Hæc autem negans, *Nulla ma-*

materia cogitat, vertitur in hanc affirmantem, *Omnis materia eſt non cogitans.*

XVIII.

Hinc patet, qua ratione quatuor modi Syllogiſmorum primæ figuræ redigi poſſint ad duos tantum: nam Syllogiſmi in *Celarent* & *Ferio* mutantur in *Barbara* & *Darii.* Sic etiam ſex modi Syllogiſmorum tertiæ figuræ rediguntur ad tres; & etenim *Felapton*, *Bocardo*, & *Feriſon*, mutantur in *Darapti*, *Diſamis*, & *Datiſi.*

XIX.

Ubi notandum eſt, quod hac ratione omnes Syllogiſmi primæ & tertiæ figuræ, qui concludunt negative, poſſint mutari in alios qui concludunt affirmative.

XX.

Syllogiſmi ſecundæ figuræ reduci quidem poſſunt ad duos modos, mutando ſcilicet *Ceſare* in *Cameſtres*, & *Feſtino* in *Baroco*, vel vice verſa; ſed ſemper concludent negative.

XXI.

Ratio hujus eſt, quia, in prima & tertia figura, major propoſitio & concluſio mutantur in ſuas infinitas, & minor propoſitio manet: in ſecunda autem figura, manente concluſione, major & minor evadunt infinitæ.

XXII.

Ad tres ſpecies enunciationum, *ſimplicium*, *complexarum*, & *compoſitarum*, addi poteſt quarta *vagarum*; in quibus nempe ſubjectum, nec expreſſe, nec ſenſu determinatur; quales ſunt

interrogatoria & *imperatoria*: in his enim ſubjectum ad libitum ſuppleri poteſt; ceu in hac, *Siſte gradum viator.* Ad determinandum ſubjectum hujus enunciationis, verti poteſt in hanc, *mea voluntas eſt ut ſiſtas gradum*; ubi *mea voluntas* erit ſubjectum: Si autem illam ita vertiſſem, *Tu viator rogaris ut ſiſtas gradum*, habebit pro ſubjecto *Tu viator.*

XXIII.

Pariter enunciatio hæc, *Dic cur hic*, eſt vaga; quippe quæ varia ſubjecta admittit. Proprie autem loquendo, hujus modi expreſſiones non ſunt enunciationes; ſi quidem intentio loquentis nec eſt affirmare, nec negare aliquid, & proinde in ſe ſpectatæ nec veræ ſunt, nec falſæ.

XXIV.

Ideoque operatio mentis, quam iſtæ expreſſiones producunt in eo ad quem proferuntur, medium quaſi tenet inter apprehenſionem ſimplicem & judicium. Nam plus quam apprehenſionem ſimplicem excitant; quia mens in nuda contemplatione idearum non acquieſcit, ſed inſuper determinatur ad reſpondendum, aut ad faciendum id quod jubetur: minus autem quam judicium excitant; ideo, quia mens nec convenientiam, nec diſconvenientiam idearum, id eſt, nec affirmationem nec negationem format.

XXV.

Dantur enunciationes, in quibus ſubjectum poteſt ſumi pro parte prædicati, & pars prædicati pro ſubjecto; quæ proinde poſſent appellari indifferentes; qualis eſt hæc: *Non cuivis homini contingit adire Corinthum*: ubi *aliquis homo* eſt ſubjectum, quia de eo prædicatur non poſſe *adire Corinthum*; ſed etiam *adire Corinthum*, quod modo fuerat pars prædicati, poteſt eſſe ſubjectum, quia de eo prædicatur *non cuivis homini contingere.*

XXVI.

XXVI.

Eodem modo in hac propoſitione, *Soli Deo gloria*; ſubjectum poteſt eſſe utrumque, tam *Deus* quam *gloria*; illud, quia de *Deo* affirmatur, ipſi ſoli deberi gloriam; hoc autem, quia de *gloria* affirmatur, illam deberi ſoli Deo: ſed utrumvis ſumatur pro ſubjecto, erit alterum pars prædicati.

XXVII.

Si ad Enunciationes *inceptivas* & *deſitivas*, quæ vulgo ad exponibiles referuntur, id eſt, ad illas quæ ſenſu ſunt compoſitæ, adjungi poteſt tertia ſpecies *continuativarum*; eodem jure illis etiam annumeramus quartam *intermiſſivarum*, in quibus res in eo ſtatu in quo exituræ ſunt nondum exiſtunt; ut cum dico: *Bellum inter Gallos & Germanos nondum eſt finitum.*

XXVIII.

Etiamſi *continuativa* & *intermiſſiva* unum idemque eſſe videantur, quippe in utriſque res in ſuo ſtatu permanere dicuntur; nihilominus eandem differentiam inter illas ſtatuimus, quæ eſt *inceptivas* inter & *deſitivas*: in his enim etiam utriſque, res, quem antea habebant, ſtatum amplius haud habere dicuntur.

XXIX.

Cæterum, poſſent his annumerari aliæ ſpecies exponibilium, ſcilicet *adventiva*, ut, *Mox habebimus ſolſtitium hybernum*; *præteritiva*, qualis, *Ingenium quondam fuerat pretioſius auro*; & *præſentativa*, ut hæc, *At nunc barbaria eſt grandis habere nihil.*

XXX.

Omnes enim hæ enunciationes ſenſu ſunt compoſitæ; ſiquidem

dem unum affirmantes vel negantes, eodem tempore alterum tacite vel affirmant vel negant.

XXXI.

Et hoc modo permultæ ſunt enunciationes, quæ pro ſimplicibus habitæ ad exponibiles referri poſſunt.

ADNEXA MISCELLANEA.

I.

OMnis enunciatio univerſalis, non ſolum pro complexa, ſed prorſus pro compoſita haberi poteſt.

II.

Enunciationes univerſales affirmantes, in quibus differentia prædicatur de ſpecie, ſimpliciter non poſſunt converti; contra Auctorem *Artis cogitandi.*

III.

Demonſtratio ejuſdem Auctoris, numeri denarii modorum Syllogiſmorum inſufficiens eſt: demonſtrat enim tantum non poſſe eſſe plures, non autem non poſſe eſſe pauciores.

IV.

Syllogiſmus hic, *Omnis homo honeſtus dicere poteſt mendacium. Atqui Nullus homo honeſtus eſt vitioſus.* Ego *Aliquis, qui non eſt vitioſus, poteſt dicere mendacium*, quam optime concludit; tametſi contra ultimam legem generalem & contra primam tertiæ figuræ peccare videtur.

V.

V.

Dicendo veritatem non nunquam mentimur; & contra dicendo mendacium non ſemper mentimur.

V I.

Homo vitioſiſſimus poteſt interdum facere actionem virtutis præclaram.

V I I.

Regula proportionis quæ traditur in Syſtemate *Heereboordiano*, *Quorum duorum unum alicui tertio ſingulari & incommunicabili convenit, alterum non convenit, ea quoque inter ſe non conveniunt*, fallax eſt; Et exemplum quod ibi adjungitur, non niſi per accidens eſt verum. Ex eo enim quod ARISTOTELI convenit fuiſſe Philoſophum, & non convenit fuiſſe Athenienſem, inepte deducitur, *Ergo aliquis Athenienſis non fuit Philoſophus*; omnes quippe Athenienſes potuiſſent eſſe Philoſophi: Sed, ut abſurditas hujus ſequelæ magis pateſcat, loco *Philoſophi* ſubſtituatur *homo*; & ſic ſequeretur, quoniam ARISTOTELI convenit fuiſſe *hominem*, & non convenit fuiſſe *Athenienſem*, aliquem Athenienſem non fuiſſe hominem: quod utique ridiculum eſt.

V I I I.

Principium, *Non datur ſaltus in rerum natura*, eſt fœcundiſſimum, quo uno ictu deſtruuntur *tria elementa* CARTESII.

I X.

Ex ſuppoſitione vacui diſſeminati, natura motus commodiſſime explicari poteſt; ſine quo vacuo, tota moles univerſi eſſet compactum quid, duriſſimum, & immobile.

X.

X.

Ideoque præſtat fateri, quod natura corporis nondum omnino perſpecta ſit; quam illabi, per ſuppoſitionem plenitudinis, in tales inconvenientias.

X I.

Velle naturam reflexionis & refractionis explicare per axioma hoc, *Natura facit viam breviſſimam*, eſt obſcurum per æque obſcurum explicare. Adde quod, quoad reflexionem, illud locum non habeat niſi in ſuperficiebus convexis, planis, & quibuſdam concavis; in quamplurimis enim aliis facit viam longiſſimam.

X I I.

Qui ſuſpenſionem mercurii in Barometro deducit a gravitate aëris, is naturam aëris non ſatis perſpectam habet.

X I I I.

Poteſt haberi idea rei non ſolum non exiſtentis, ſed prorſus impoſſibilis.

X IV.

Dantur extenſa, quorum partes non ſunt contiguæ.

X V.

Dantur gradus in quiete, id eſt, una quies major eſt altera, vel unum corpus magis quieſcit quam alterum.

X V I.

Si mus mingit in mare, totus Oceanus commovetur.

XVII.

Elementum corporis gravis (videlicet illa corporis particula quæ ſine poro eſt, vel quæ inter duos proximos poros interjicitur) infinito - infinities majus eſt, quam maximus globulus materiæ ætheriæ, quæ per impulſum ſuum gravitatem corporum cauſatur.

XVIII.

Minima vis percuſſionis major eſt quam maxima vis ponderis.

XIX.

Radius viſivus aut ſolaris non procedit in linea recta, ſed in curva.

XX.

Luna non magis eſt Planeta, quam ſatellites Saturni & Jovis.

XXI.

Lumen quod obſervatur in plano Eclipticæ, tempore æquinoxiorum, ante ortum & poſt occaſum Solis, & quod paucis retro annis a D. CASSINO Aſtronomo Regio Pariſienſi detectum fuit, mirifice confirmat vorticem Solis, & Terræ, cæterorumque Planetarum circumgyrationem.

XXII.

Omnis numerus primus differt unitate a multiplo ſenarii, exceptis 2 & 3.

XXIII.

Ideoque certa datur lex in progreſſione numerorum primorum, quæ, quantum ſcio, a nemine hactenus fuit obſervata. Illa autem talis eſt: Conſtructis duabus ſeriebus, quarum una contineat multiplices ſenarii unitate diminutos, altera autem eoſdem multiplices unitate auctos; ex quibus ſeriebus, ſi expunguntur illi qui oriuntur ex multiplicatione unius præcedentis in ſe & duorum quorumcunque præcedentium, (oſtendere enim poſſum omnes numeros compoſitos in iſtis duabus ſeriebus contentos produci ex multiplicatione duorum præcedentium, vel eſſe quadratos præcedentium) erunt reliqui omnes numeri primi poſſibiles, qui in ſerie naturali numerorum 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c. reperiuntur, exceptis 2 & 3.

XXIV.

Solutio mea Problematis de conſtruendis radicibus æquationum ope portionis curvæ datæ, quod non ita pridem in Diario Pariſienſi apparuit, * legitima eſt; & objectiones quas Autor Problematis in contrarium movit, nihil valent: quin imo totus ſum perſuaſus, ſi res deveniat ad judices incorruptos Matheſeoſque gnaros, præmium primo ſolutori promiſſum mihi adjudicatum iri.

XXV.

D. PAPINI objectiones (videſis *Act. Erud. Lipſ.* An. 1691. m. Majo) contra meum perpetuum mobile † pari paſſu ambulant; ejus enim poſſibilitatem potius confirmant quam deſtruunt.

XXVI.

Ex hoc ſolo, quod curvæ ſpirales non poſſunt eſſe geometri-

* Supra N°. XIII. Videantur Numeri XII-XVI.
† In appendice ad Num. I. pag. 41.

metricæ, ut pote quæ a linea recta in infinitis punctis ſecantur, legitime infertur, circuli, aliorumque ſpatiorum, & curvarum in ſe redeuntium quadraturas & rectificationes impoſſibiles eſſe.

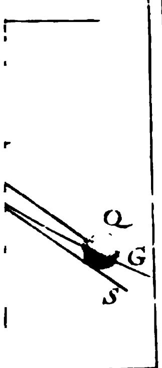
XXVII.

Coronidis loco Cl. Competitoribus proponitur ſequens Problema, cujus ſolutionem tentabunt per ſuas methodos, ſive ſyntheticas ſive analyticas: Alicubi locorum obſervatur, Sole obtinente altitudinem meridianam 45 grad. extremitatem umbræ a bacillo ad planum horizontale verticaliter erecto projectæ, deſcribere illo die hyperbolam, cujus axis tranſverſus æquatur longitudini bacilli. Quæritur quo Terræ loco, & quo anni die, obſervatio ſit facta. ℞. ---- * Solutionem noſtram ſciſcitanti in conflictu aperiemus.

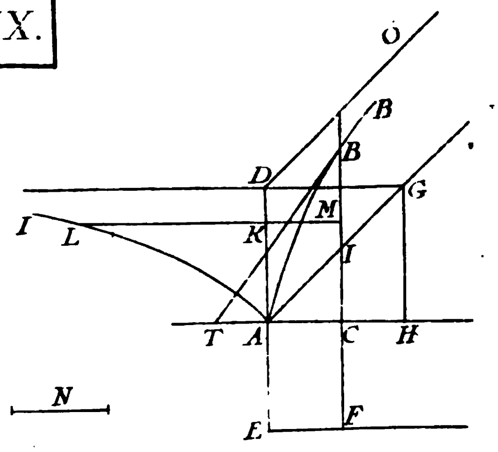
* Manifeſtum eſt inſpicientibus Figuram, in qua A B, axis mundi; HO, horizon, *bo*, planum horizontale; Z, Zenith; N, Nadir; CS, bacillus cujus apex C; ÆQ, Æquator; PN, parallelus a ſole die quæſito deſcriptus; P C N, conus luminoſus; Z C *p*, conus umbroſus, cujus ſectio *lkm*, a plano horizontali facta hyperbola eſt axem tranſverſum habens *ls* æqualem bacillo CS; Manifeſtum eſt, inquam, angulos S C *l*, *l*CO, & HCP, arcumque HP eſſe 45°. & HN, 90°. Ergo NHP, 135°. cujus dimidium PA, 67°. 30′. Unde ablato PH, 45°, remanet *HA* ſeu BO, elevatio poli, 22°. 30′: ex qua habetur Terræ locus. Rurſus auferendo PA, 67°. 30′. ex AÆ, 90°. remanet ÆP, ſolis declinatio, 22°. 30′. ex qua *datur* anni dies. TAB. IV. N. XVII.

F I N I S.

N° VII



N° IX.



N° XI & XXVII

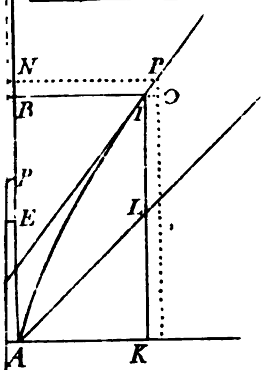
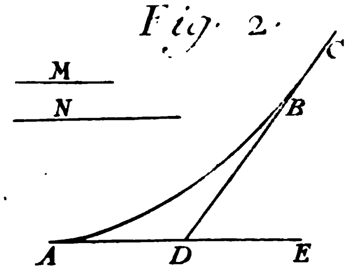
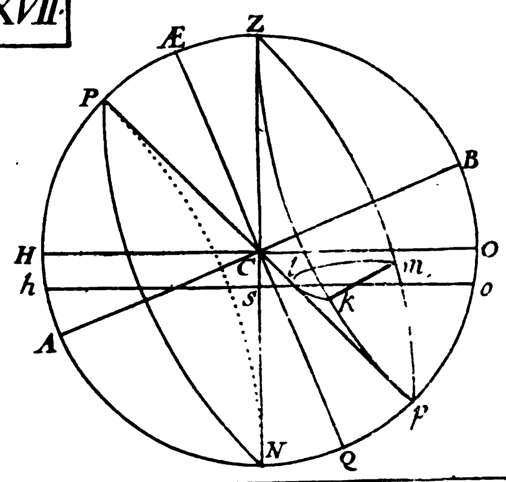


Fig. 2.



N° XIII

N° XVII



N°. XVIII.

Q. F. F. Q. S.

DISSERTATIO
INAUGURALIS
PHYSICO-ANATOMICA
DE
MOTU MUSCULORUM,

Quam

Pro ſummis in Arte Medica Honoribus
& Privilegiis Doctoralibus
rite capeſſendis

Publice examinandam obtulit ad d. 16. Martii 1694,

JOHANNES BERNOULLI, Basil.

Edita primum BASILEÆ, 1694: iterum VENETIIS 1721: tertium NEAPOLI, 1734.

Hujus vero pars Mathematica inſerta eſt Actis Erudit. Lipſ. Ann. 1694. Menſ. Maio, pag. 200.

ATIO

ULORUM.

IUM.

penſitans quamnam corporis
rtem ſeligerem, cujus func-
optime ex legibus mechani-
i paſſent, illam tandem, quæ
omicos ſub Muſculi *nomine*
niſſimam cenſui; cum ob no-
artis ipſius, tum ob eviden-
ſtrationum mathematicarum
ex [illegible]

liberet anguſtæ diſſertationis ſpatium permitteret. Inſtitutum noſtrum eſt generalem adumbrare ideam ſtructuræ Muſculorum, quantum nempe neceſſitas urget ad modum operandi & ſubſequentes inde motiones animales ritè explicandas: qua in re Incomparabilis Viri Joh. Alphonſi BORELLI *veſtigiis inſiſtemus, amplectendo ejus hypotheſin, quam tamen nimis oſcitanter applicuiſſe oſtendemus, quando ſuis machinulis vel veſiculis fibrarum muſcularium figuram rhomboidalem attribuit; ubi ſimul apparebit, hancce figuram rectilineam præ aliis ipſis aſſignaſſe, tum facilitatis ergo, nimirum ut commodiori calculo relationes virium dilatantium ad reſiſtentias ſupputaret, tum etiam quia juſtam & debitam figuram (quam circularem eſſe ex natura preſſionis liquidorum demonſtrabimus) & quæ exinde emergunt vires diſtendentes, non potuit non ignorare abſque novo calculo* Integralium *dicto, qui tum temporis profundiſſima caligine adhucdum tectus latitabat, cujuſque prima ſtamina magno Geometræ* LEIBNITIO *debemus. Exhibebimus etiam curvam, cujus ordinatim applicatis denotantibus reſiſtentias per minima creſcentes, abſciſſæ ejuſdem indigitabunt quantitates ſpirituum animalium impenſorum vel deperditorum, id quod* BORELLUS *ne quidem apice digitorum tetigit. Hoc ipſum etiam anſam nobis præbebit gradus roboris & laſſitudinum Muſculis inductarum determinandi. Tibi,* Candide Lector, *noſtrum hoc conamen rudiore & feſtinante manu adumbratum commendamus; quod ſi non diſplicuerit, in poſterum, quando per otium licebit, ea quæ impræſentiarum, ob plurimas alias diſtractiones, neglecta fuere, duplici fœnore reſarcire adnitemur.*

DISSER-

ATIO

LORUM.

niturus de motu Muſ-
num omnium ſtructu-
in qua plerique recen-
nici conſentiunt, qua-
nenis paulo accuratius
onducit, breviter ex-
culus itaque, qui eſt
, conſtat ex membra-
arteriis, venis, nervis
Membrana inſtar inte-

Muſculi partem *ventrem* nominant. Totam muſculoſam ſubſtantiam perreptant innumeræ *arteriæ*, *venæque* capillares, & *nervi*; illæ ut ſanguinem tum nutritioni, tum motui Muſculorum deſtinatum afferant & auferant, hi ut ſuccum ſpirituoſum ſubminiſtrent, qui cum ſanguine miſtus ſubitaneam illam ebullitionem efficit, de qua mox fuſius, quique vehiculum eſt ſenſuum externorum, & animæ fidelis famulus, omnia eidem, quæ corpus intra & extra quocunque modo afficiunt annuncians. Notandum porro Muſculum diſpeſci in plures faſciculos, quorum quilibet ſua propria membranula munitus formam exhibet priſmatis triangularis, quadrati, pentagonalis, aliuſve generis: hi faſciculi conſtituuntur ex pluribus filamentis tendinoſis quæ apud STENONEM * *fibræ motrices* audiunt; filamenta autem vel fibras haſce eſſe tendinoſas, patet ex eo, quod rubedo illa, quæ a ſanguinis affluxu oritur per aquam confertim affuſam iterum ablui, fibriſque color omnino candidus reddi poſſit; ita ut non minus colore quam conſiſtentia tendines æmulentur; & revera fibræ tendinum nihil aliud ſunt, quam continuationes muſcularium, inque eo ſolo differunt, quod illæ arctius quam hæ juxta ſe ponuntur, & proinde ſanguinem, niſi quantum ſufficit ad nutritionem, in interſtitia ſua non admittunt: hinc fit quod in motu Muſculorum tendines non inflentur & abbrevientur, ſed mere paſſive ſe habeant.

II.

Notat BORELLUS † fibras muſculares poſt elixationem inflari, & microſcopio inſpectas eſſe columellas ſimiles virgultis arborum, & ſubſtantia quadam ſpongioſa plenas; ex quo conjicit quamlibet fibram muſcularem eſſe poroſam, ſeu excavatam. Cæterum fibræ faſciculorum colligantur, & quaſi vinciuntur ab aliis fibrillis tranſverſariis parallelis, quæ cum prioribus texturam reticularem efficere videntur, id quod in Muſculis diu coctis, non ſine oblectamento, videre eſt: haſce fibrillas,

* *Elem. Myolog. Spec.* Def. 1.
† Lib. *de Motu Animal.* Part. I. Prop. II.

brillas, non autem fibras ipſas muſculares, contractionem inire Cl. Jo. MAJOW * ſtatuit; ſed minus congrue, & contra omnium ſaniorum Anatomicorum ſententiam. Ego nullum alium ipſis attribuo uſum, quam ut vinctura ſua tranſverſaria impediant, ne fibræ motrices in actu inflationis nimium divaricentur, & ex ordinato ſuo ſitu diſturbentur; ſic cavum cujuſque columellæ, vel fibræ motricis, diſtinguitur ope hujus ligaturæ in æqualia internodia, quæ plures cellulas, vel veſiculas, efformant; quæ veſiculæ flaccidæ ſunt, & lateribus ſuis connivent, quando Muſculus otiatur, & quæ diſtenduntur quando operatur, & adipiſcuntur figuram ovalem ſimilem annulis catenæ, quos BORELLUS paſſim *machinulas rhomboidales* nominat; ſed perperam, ut infra oſtendam. Obiter adhuc innuendum, ligationes haſce tranſverſarias laxas eſſe, ut omnibus veſiculis communicatio intercedere, & vis motiva, ſeu materia inflans, æqualiter quaquaverſum ſeſe expandere poſſit.

III.

Hactenus memorata præcipua ſunt, quæ circa fabricam Muſculi ſimplicis obſervantur. Quid autem proprie Muſculum moveat, varii varie de eo ſentiunt; quorum omnium opiniones diſcutere velle, non eſt ex noſtro inſtituto: Miſſa vero Veterum facultate incorporea naturali, Muſculos immediate, ut loquuntur movente, videamus quid unus vel alter hac de re cenſuerit. Experient. STENO, in ſuo Myologico ſpecimine, Muſculum contrahi arbitratur ſine novæ materiæ acceſſione; nimirum per ſolam mutationem figuræ, commigrando a parallelogrammo obliquangulo in rectius, quæ opinio prorſus ridicula; & pro mero luſu ingenii Authoris habenda: præterquam enim quod hoc modo contractio Muſculi rectanguli explicari non poſſit, niſi penetratio corporis ſtatuatur, concipi nequit, à quo Muſculus moveatur, & quale ejus ſit primum movens, vel qua ratio-

* Tract. *de Motu Muſcul.* cap. 2.

ratione tritum illud Axioma Phyſicum defendi poſſit; *Omne quod movetur, movetur ab alio*: vix enim puto ab immediata animæ voluntate machinam corpoream huc illuc transferri poſſe; ſecus reſectis, aut conſtrictis nervis, non video quid Muſculos a motu impediret, niſi forſan velis animæ hoc pacto viam eſſe præciſam, vel interceptam, per quam ex meditullio cerebri ad membra exteriora ſpatiari conſuevit, ad imperium ſuum ibi exercendum; ſed hoc foret animam concipere nimis corpoream. Aliis inſuper quamplurimis argumentis evertitur ſyſtema *Stenonianum*, ſuper quo conſulantur BORELLUS * & MAJOW †. Verum, quemadmodum ego arbitror, cauſam contractionis Muſculorum attigerunt, qui illam ab inflatione quadam deduxerunt, inter quos præcipui ſunt WILLISIUS §, & bini modo memorati Viri: qui omnes in eo conveniunt, quod in Muſculis oriatur ebullitio, quæ fibras diſtendat, ut in longitudine amittant quod in latitudine acquirunt.

IV.

Iis itaque generaliter aſſentimur; & ſtatuimus cum BORELLO, nervos eſſe congeriem tubulorum ſubſtantia quadam ſpongioſa repletorum, quæ ſubſtantia ſemper turget, & plena eſt fluido ſumme volatili, a cerebro ſuppeditato, ejus naturæ, ut, ſi cum ſanguine commiſceatur, ſubitaneam effervefcentiam pariat. Et hoc fluidum illud ipſum eſt, quod vulgo *Spirituum animalium* nomen habet. Si anima imperat, vel exercet actum volitionis; hoc fieri non poteſt, quin ex neceſſitate mirabilis unionis, quam Omnipotens DEUS inter animam noſtram & corpus conſtituit, & quæ nos hactenus latet & uſque latebit, quin, inquam, fiat in cerebro localis quædam agitatio Spirituum animalium qui, vellicando principium alicujus nervi, concutiant per totam longitudinem Spiritus intra contentos; non ſecus ac fit

* Lib. *de Motu Animal.* Part. I. Prop. 5.
† Tract. *de Motu Muſc.* Cap. 1.
§ Exercit. *de Motu Muſcul.*

ſit in baculo, cujus extremitate una vel tantillum commota, altera pariter ob contiguitatem partium commovebitur. Sic itaque, ab irritatione principii nervi, guttula extrema Fluidi ad nervos ſpectantis ex altero oſculo levi vibratione ejicitur, & hoc modo, ex omnibus aliis nervulorum per Muſculum diſperſorum oſculis, ſimul ad nutum voluntatis, totidem guttulæ evomuntur: quemadmodum autem ſpongia liquore turgida guttulas pendulas effluere non ſinit; ſic etiamſi oſcula iſta extrema nervorum ſemper ſint patula, guttulæ tamen Fluidi modo memorati ſponte & ſine actuali concuſſione non excidunt; quia ſubſtantia ſpongioſa nervorum eis loco valvularum inſervit.

V.

Quando igitur ab imperio voluntatis, vel a conſuetudine naturæ (quod ſit in motibus involuntariis) eo, quo dixi, modo innumeræ guttulæ per totam Muſculi molem, quæ inſtar ſpongiæ perpetuo ſanguine humectata eſt, ſimul ejiciuntur ex orificiis nervulorum; tunc earum particulæ tenuiſſimæ, ſpiculis ſuis ſubtiliſſimis impingendo in particulas ſanguineas tenuiores, eaſdem diffringunt, & inſito aëri condenſato exitum præbent, qui ſeſe expandendo (ut docui in Diſſertatione mea *de Efferveſcentia & Fermentatione*) ebullitionem & ſubſequentem inde Muſculorum inflationem producit. His autem jam video quid objici poſſit, qui nempe fiat, ut poſt ebullitionem Muſculus iterum detumeſcat, & priſtinum ſtatum acquirat, id quod momento accidit; videtur enim quod, ſecundum mea principia, pro explicatione efferveſcentiæ poſita, Muſculus poſt primam ebullitionem perpetuo inflatus manere debeat; non aliter ac factum eſt in experimento pulveris pyrii, * ubi ſpatium in tubo recurvato, in quod aër inſitus poſt accenſionem pulveris ſeſe extendebat, continuo manebat extenſum; nec iterum concidebat, eo modo quo credit BORELLUS † accidere id muſculis, in qui-

* Diſſert. *De Efferv. & Ferm.* §. XXII. pag. 33. ſq.
† Lib. *de Motu Anim.* Part. II. Prop. 29.

quibus ſcilicet autumat particulas ebullientes, rapidiſſime circumgyrando, vacuitates grandiuſculas efformare, quæ, poſt peractam ebullitionem, iterum concidant & ad priſtinum ſpatium redigantur; ſed hoc non eſſe veram cauſam effervеſcentiæ in ea, quam dixi, Diſſertatione §. XVII. abunde commonſtravi.

VI.

Ut itaque aliter difficultati allatæ obviam eatur, noſtraque principia ſalventur; ſtatuamus oportet, dari, præter aërem craſſum quem ſpiramus, alium ſubtiliorem, qui, utut etiam elaſticus, nullo modo percipi poteſt, quippe qui omnes poros corporum libere penetrat. Poſitionem hanc non adeo abſurdam eſſe, patet ex eo, quod, inter aërem craſſiorem, & materiam ſubtilem, vel æthercam, quæ procul dubio incomparabiliter tenuior eſt illo, alia utique exiſtat materia, & quidem omnium gradum, ne detur ſaltus in rerum natura; hæc materia non poteſt non eſſe elaſtica, eandem ob cauſam ob quam eſt aër nobis appoſitus; nempe a continuo motu materiæ æthereæ, quæ omnes particulas craſſiores & minus agitatas, tanquam obſtaculum, a ſe invicem divellere & ſeparare, ſibique liberum tranſitum parare conatur. Hujuſmodi itaque materiam, vel auram elaſticam ſubtiliorem, & quidem condenſatam, præter aërem craſſiorem, qui inſigniores corporum poros vel cellulas replet, etiam in minimis clauſtris hoſpitari nemo dubitabit, qui noſtras rationes, quas in Diſſertatione *de Efferv. & Ferm.* attulimus, bene perpenderit. Hoc præſuppoſito, dicimus particulas Fluidi ſubtiliſſimi ad nervos pertinentis adeo eſſe ſubtiles, delicatas & teneras, ut earum ſpicula (quæ ad leviſſimum tactum ſtatim hebetari pono) non niſi minimos particularum ſanguinearum porulos aperire valeant, ex quibus dein ſubtilior illa aura elaſtica condenſata proſilit, quæ, ſui juris facta, ſeſe ſubito expandit, & primo impetu totam Muſculi molem inflat; ſed illico, ob exiguitatem ſummam particularum ſuarum, per poros apertos Muſculi libere erumpit, inque aërem externum avolat;

lat; propterea neceſſe eſt ut, poſt ebullitionem, Muſculus momento iterum detumeſcat, niſi jugiter novæ inſtillentur commemorati Fluidi guttulæ, quæ novam & novam pariendo ebullitionem Muſculum in continua inflatione conſervent.

VII.

Interim fieri nequit, quin, in tanta copia particularum Fluidi nervorum, aliquæ dentur fortioribus ſpiculis prædita, quæ etiam majuſculos quoſdam particularum ſanguinearum meatus perfringere valent; ex quibus inter ebulliendum aliquid craſſi aëris erumpit, qui cum poros Muſculi & cutis apertos penetrare non poſſit, plurimis in locis ſacculos efformat in quibus colligitur & ſubſiſtit: hinc proveniunt iſtæ veſiculæ aëre plenæ, piſi interdum magnitudinem adæquantes, quæ ſub cute & in interſtitiis faſciculorum muſcularium ſparſim conſpiciuntur. Ab hoc præcipuam cauſam hydropis ſiccæ vel tympanitis dependere ſuſpicor; cum ſcilicet fluidum nervorum nimia acredine peccat, ut ab illo ingens copia pororum ampliorum particularum ſanguinis, quibus ineſt aër craſſior, recludatur; aër iſte craſſus, qui tam ubertim advenit ſeque dilatat, & ob tubulorum cutaneorum anguſtiam intra manere cogitur, præcipuas quas reperit corporis caveas, præſertim imi ventris, mole ſua occupat, & ibi tenſionem dolorificam creat.

VIII.

Quemadmodum ex aucta acredine Spirituum animalium, quæ vehementiorem, quam par eſt, excitat in Muſculis ebullitionem, oriri poſſe diximus tympanitem, quod forſan nemo ante nos animadvertit; ita e contrario nimia mollities ſpiculorum Spirituum animalium, ob quam efferveſcentia in Muſculis diminuitur, vel plane aboletur, paralyſin facit. Popularis huc uſque fuit error inter Medicos, cum creditum fuerit, paralyſin unice provenire a præpedito Spirituum animalium influxu; quod

quod tamen interdum minime verum eſt, uti ex hoc ſolo patet, quod utplurimum in paralyſi ſenſus non debilitatur; quod tamen ſemper fieri deberet, ſi illa a ſolo Spirituum animalium influxu denegato dependeret: nam ſi nervi ex. gr. obſtructione laborant, evidens eſt non ſolum Spiritibus advenientibus, ſed etiam refluentibus, qui nempe ſenſus in cerebro producunt, viam intercludi; & ſic ſenſus, ſi non omnino aboleretur, ſaltem magna ex parte imminueretur. Genuina itaque cauſa paralyſeos aliquando poteſt eſſe diminuta, vel abolita effervescentia in Muſculis; quod accidit, quando aut fluidum nervorum, quantacunque etiam quantitate influat, vim ſuam pungitivam amittit, aut particulæ ſanguineæ nimis dureſcunt, & ita quidem, ut ab acuminibus commemorati fluidi diffringi non poſſint.

IX.

Ex hac hypotheſi facile etiam eſſet explicare cætera motuum Muſculorum ſymptomata, ut motus ſpaſmodicos, ſeu convulſivos, rigorem & tremorem membrorum, oſcitationem, & pandiculationem, & quæ ſunt alia; ſed hoc eſt extra noſtrum propoſitum, quod imprimis eo collimat, ut phænomena naturalia motus animalis accuratius perſcrutemur. Jam ſupra (ut in orbitam revertamur) annotavimus, fibras motrices Muſculorum colligari in tranſverſum ab aliis fibrillis, ita ut quælibet fibra muſcularis (quæ ſine his fibrillis columellam excavatam repræſentat) in totidem ſpatiola dividatur, quorum tamen caveæ communicationem inter ſe habent per totam longitudinem fibræ motricis, ob laxam ligaturam fibrillarum tranſverſariarum: quodlibet ſpatiolum, vel internodium, ex calculo BORELLI,* adæquat vigeſimam partem unius digiti: quando Muſculus inflatur, ſingula ſpatiola in latitudinem explicantur, & replentur aura illa elaſtica de qua ſupra §. V. Oppido nunc liquet ſpatiola iſta repleta non poſſe acquirere figuram rhomboi-

* Lib. *de Motu Animal.* Part. I. Prop. 105.

boidalem, ut exiſtimat BORELLUS; ſecus enim unica tantum requireretur particula, quæ inſtar cunei ſeſe inſinuaret intra latera unius ſpatioli, ut diducendo ſimpliciter latera exiguum rhombum efformaret: ſed præter quam quod inflatio hac ratione non peragitur, (ſiquidem durante ebullitione, ſecundum ipſum BORELLUM, particulæ motum Muſculorum excitantes non lineis rectis, ut actio cunei poſtulat, ſed in circulum moventur;) inſuper etiam ſpatiolum, cujus longitudo æqualis eſt vigeſimæ parti digiti, ideoque ſatis ſenſibilis, infinities quaſi majus eſt unica particula auræ elaſticæ, quæ ut ſupra diximus, non ſolum inſenſibilis, & aëre communi multo ſubtilior eſt, ſed etiam exiliſſimos poros corporis apertos penetrat; unde colligitur quodvis ſpatiolum, vel, ſi ſecundum BORELLUM loqui velimus, quamvis machinulam, diſtendi non ab una ſola, tanquam a cuneo, ſed ſimul ab infinitis particulis elaſticis, quæ omnes æquali vi in parietes machinularum agunt, & proinde ipſis non rhombi figuram, ſed aliam curvilineam conciliabunt, quam nunc indagabimus.

X.

Qui ſolis rationibus & conjecturis phyſicis acquieſcunt, naturamque preſſionis fluidorum vel tantillum perſpectam habent, abſque calculo videbunt figuram hanc aliam non eſſe quam circularem: cum enim natura fluidorum ſit premere ſecundum lineam perpendicularem ad ſuperficiem cui inſiſtunt; cumque aëris elaſtici preſſio undiquaque ſit æqualis, & proinde fibra muſcularis machinulæ, quæ perfecte flexilis ponitur, ubique æqualibus viribus extrorſum pellatur; ſtatim apparet curvaturam fibræ ubique æquabilem fore, & proin circularem: nulla enim ratio eſt, cur unum curvæ punctum magis minuſve a centro diſtare debeat quam alterum. Cui autem hæc minus ſatisfaciunt, examinet noſtrum calculum geometricum, per quem in eandem curvam incidimus, & qui ratiocinium noſtrum phyſicum, cujus beneficio per tranſennam quaſi curvæ ſpe-

ſpeciem prævidimus, mirificè confirmabit: eum igitur apponimus:

TAB. V. Fig. I. *Sit ABC fibra, vel ſi mavis filum perfecte flexile, in extremitatibus A & C affixum, quod in omnibus ſuis punctis B trahitur vel pellitur perpendiculariter ad ſuam curvaturam potentia æquali & indefinite parva, quæ hîc denotatur per lineolam BH; quæritur curvaturæ ſpecies.* Eſto abſciſſa AF $= x$, ejus differentiale Ff $= dx$; applicata FB $= y$, ejus differentiale GB $= dy$; curva AB $= s$, ejus differentiale Bb $= ds$; BH (potentia pellens & multiplex ipſius Bb) $= n\,ds$. Quia nunc quælibet potentia pellens BH dividi poteſt in duas laterales, horizontalem BE & verticalem BD, quæ rectangulum DE conſtituunt, cujus diagonius eſt ipſa BH: erunt, ob ſimilitudinem triangulorum BGb & BDH, BE $= n\,dy$ & BD $= n\,dx$. Quoniam autem potentia ſuſtinens in A ſemper eadem & conſtans manet, ubicunque etiam filum præter quam in C figatur, ceu cuilibet attendenti patebit; ponatur illa $= a$: ſed ex mechanicis conſtat, eam tantam eſſe quanta foret, ſi loco fili curvi AB ſubſtituerentur duo alia fila recta tangentia alligata in punctis A&B, quæ traherentur in puncto concurſus I a duabus potentiis L&K, una horizontali LI, & altera verticali KI, quarum illa omnibus potentiis horizontalibus BE, hæc autem omnibus verticalibus BD ſimul ſumptis æquivaleret; verum omnes BE æquantur integr. $n\,dy$ quod eſt $= ny$, & omnes BD $=$ integr. $n\,dx$ quod eſt $= nx$: ideoque potentia L $= ny$, & potentia K $= nx$; igitur ut inveniatur potentia partialis in A, quæ nimirum requiritur ad ſuſtinendam ſolummodo potentiam L, faciendum eſt, ceu docet Celeb. VARIGNON in ſua *Propoſitione fundamentali ponderum ſuſpenſorum* * ut ſinus anguli AIB, vel ejus complementi ad duos rectos KIB, ad ſinum ang. MIB, id eſt ut IM ad MG, ſed ut bG ad GB, id eſt, ut dx ad dy; ita potentia L, ſeu ny, ad potentiam partialem

* Projet d'une Nouvelle Méchanique. *Pag.* 11.

lem in A, quæ itaque invenitur $= \frac{nydy}{dx}$: quia nunc directio potentiæ K eſt ipſa tangens KI, ſuſtinebitur hæc tota a puncto A; ideoque potentiæ partiali inventæ $\frac{nydy}{dx}$ addenda eſt potentia K, ſeu nx, ad habendam potentiam totalem & conſtantem in A, quam poſuimus $= a$; & ſic eliciemus hanc æquationem differentialem $\frac{nydy}{dx} + nx = a$, quæ, multiplicata per dx, dat $nydy + nxdx = adx$, ſumptiſque integralibus habebitur $\frac{1}{2} nyy + \frac{1}{2} nxx = ax$ ſeu $yy + xx = \frac{2ax}{n}$; quæ æquatio oſtendit curvam quæſitam ABC eſſe circularem, cujus radius vel ſemidiameter $= \frac{1}{n} a$. *Q. E. I.* Ubi notandum potentiam ſuſtinentem in B, ſeu, quod tantundem eſt, vim firmitatis quæ requiritur ne filum rumpatur, per Prop. Præcl. VARIGNONII modo allegatam, reperiri ubique æqualem potentiæ ſuſtinenti in A. Si præterea velimus rationem invenire inter vires inflantes, & vires ſuſtinentes, ſeu firmitatis fili requiſitæ, id eſt, ſi creſcentibus, vel decreſcentibus n, aut BH, determinare libeat in qua ratione creſcant, vel decreſcant, potentiæ ſuſtinentes in A, vel B, manentibus interim radiis circulorum æqualibus, ponatur BH $= mds$ & potentia ſuſtinens in A, vel B $= b$, & habebitur hæc æquatio $yy + xx = \frac{2bx}{m}$; quia autem radii ponuntur æquales, erit $\frac{b}{m} = \frac{a}{n}$, ideoque $n : m = a : b$, hoc eſt, vires ſuſtinentes, vel firmitatis requiſitæ, ſunt in ratione virium inflantium; id quod etiam Frater meus ita invenit, ut videre licet in regulis, quas publicavit, † pro determinatione curvaturæ veli.

X I.

Methodo, qua uſi ſumus in hac ſupputatione, fere tota

 niti-

† *Act. Erudit. Lipſ.* 1692. Maj. pag. 203.

nititur curvarum quas velarias & catenarias apellamus indago. Si quis etenim ejus veſtigia ſequatur, & in calculo differentialium & integralium ſit mediocriter verſatus, facile omnium, quæ paſſim in *Actis Lipſienſibus* & *Diario Pariſienſi*, ac fortaſſe alibi ſuper hac materia publicavimus, & a Celeb. Viris LEIBNITIO & HUGENIO publicata ſunt, penetrabit demonſtrationem, totumque deteget myſterium, quod inter plures, quos novi etiam perſpicaciſſimos, latebat Mathematicos, inque ſui admirationem rapiebat: Sed proſequamur propoſitum. Vidimus modo filum, quod in omnibus ſuis punctis tenditur ad perpendiculum a viribus æqualibus, curvari in circulum; unde concludimus veſiculas, vel machinulas fibrarum muſcularium, quarum latera utique æqualiter, & in omnibus ſuis punctis perpendiculariter premuntur ab aura elaſtica, non eſſe rhomboidales, ſed circulares; ita ſi Muſculus nullam appenſam reſiſtentiam ſuperandam haberet, machinulæ in perfectos & integros circulos perexiguos expanderentur: ſed quia Muſculus ſemper pondera, & reſiſtentias, ſi non forinſecus advenientes, ſaltem ſui ipſius & oſſium ſubmovere debet; fit ut machinulæ non integram adipiſcantur figuram circularem; reſiſtentia enim impedit quo minus in longitudine ſe ſatis contrahere poſſint: non ſecus ac fieri ſolet cum iſtis ampullis, quas infantes ex lotura ſaponis conficiunt; hæ enim, ob æquabilem aëris expanſi vim (quam elaſticam vocant,) in perfectam ſphæram intumeſcunt; ſed cum interdum guttula in fundo ampullæ adheret, tunc ob gravitatem guttulæ, ampulla tantillum elongatur & ex Sphæra mutatur in Sphæroidem ex circumvolutione ſegmenti circularis factam: pariter itaque machinulæ muſculares, quas ut planas conſideramus, habebunt figuram ex duobus ſegmentis æqualibus ejuſdem circuli compoſitam, ut monſtrat *Fig. II*: ex quibus pluribus, in longitudine ſimiliter inſtar annulorum catenæ poſitis, formatur fibra motrix (*Vid. Fig. III.*) quarum aliquæ, ſimul ſumptæ ſecundum longitudinem & parallelo ſitu juxta ſe coaptatæ, conſtituunt faſciculum muſcularem, ceu oſtendit *Fig. IV.* ubi etiam conſ-

TAB. V. *Fig. 2.* *Fig. 3.* *Fig. 4.*

conſpiciuntur fibræ transverſariæ, quæ ligaturas laxas efficiunt, ut materia inflans omnes machinulas ſimul & libere penetrare poſſit.

XII.

His ita ſe habentibus, ſupputare licebit rationem inter vim dilatantem & reſiſtentias, ſeu quanta requiratur elaſticitas auræ motivæ pro ſingulis elevationibus reſiſtentiarum ſemper æqualium; cujus rei gratia fere totum Opus *Borellianum* confectum eſt: Sit itaque machinula muſcularis BEADB, compoſita ex duobus ſegmentis circularibus BDA, & BEA; & C centrum arcus AEB; ductiſque radiis CA, CE, ille ad extremitatem, hic per medietatem machinulæ, ita ut DE ſit latitudo maxima, quam biſariam ſecat in R longitudo maxima AB, ſeu chorda arcus AEB vel ADB: quoniam nunc ang. EAC = recto = RAC + ACR, erit ang. EAR = ACR; ideoque arcus AE eſt menſura anguli EAR, vel duplus BEA menſura dupli anguli AED: Hinc, datis ſemilongitudine lateris machinulæ, id eſt, arcus AE, in partibus æqualibus 100000, & ſemiangulo dilatationis EAR; inveniri poteſt ſublevatio reſiſtentiæ *z*, quæ nempe eſt æqualis exceſſui, quo arcus AEB ſuperat ſuam chordam AB, vel duplo exceſſui, quo arcus AE ſuperat ſuum ſinum rectum AR; quod ita peragitur. Fiat ut peripheria circuli ad radium, id eſt, ut 44 ad 7; ita numerus graduum peripheriæ 360 ad quartum $57 \frac{3}{11}$, qui erit æqualis longitudini radii in gradibus: facto nunc, ut numerus graduum ang. EAR, vel arcus EA, ad $57 \frac{3}{11}$; ita numerus partium æqualium 100000 longitudinis arcus EA, ad quartum, qui erit æqualis numero partium æqualium radii AC, qualium arcus EA continet 100000: habebitur tandem longitudo ipſius AR, nimirum faciendo, ut ſinus totus ad ſinum ang. EAR, vel arcus EA; ita numerus inventus partium radii AC ad quartum, qui erit æqualis numero partium æqualium ipſius AR, qualium arcus EA continet 100000; duplus itaque exceſſus arcus AE ſupra ſinum AR inventum, erit elevatio reſiſtentiæ *z* quæſita. *Q.E.I.*

TAB. V. *Fig.* 5.

XIII.

Poſtquam elevationes hoc modo inventæ ſunt, vires dilata-

tatrices reſpectivas pro ſingulis illis ita determinabimus. Supra §. X. poſuimus potentiam curvam, in quolibet puncto, vel potius in qualibet differentiali curvæ, ad perpendiculum prementem $= n ds$: vis itaque dilatans, vel elaſticitatis auræ motivæ abſoluta, qua latera machinulæ dilatantur, exprimitur per n; ſed ibidem invenimus, ponendo vim ſuſtinentem, vel firmitatis in quolibet fili puncto requiſitæ $= a$, radium arcus circuli in quem filum incurvatur fore $= \frac{1}{n} a$.

TAB. V. *Fig.* 5. Quia vero per Prop. modo allegatam Cl. VARIGNONII, reſiſtentia z eſt ad vim ſuſtinentem in B, cujus utique directio eſt ipſa tangens BF, ut ſinus anguli EBD ad ſinum anguli EBR, erit $a = \frac{z \times \text{ſin. } EBR}{\text{ſin. } EBD}$, & ſic ſubſtituto in quantitate $\frac{1}{n} a$, loco a ejus valore, habebitur radius (per modum ſupra propoſitum inventus, quem itaque vocemus r) $= \frac{z \times \text{ſin.} EBR}{n \times \text{ſin.} EBD}$; ideoque vis elaſticitatis abſoluta auræ motivæ $n = \frac{z \times \text{ſin. } EBR}{r \times \text{ſin. } EBD}$: ac propterea vis, qua premitur ſemilatus machinulæ, id eſt n AE erit $= \frac{100000 z \times \text{ſin. } EBR}{r \times \text{ſin. } EBD}$.

XIV.

Calculi hujus beneficio conſtructa eſt præſens Tabella, ad imitationem illius quam BORELLUS * pro ſua hypotheſi confecit; quæ, ſi conferatur cum noſtra, videbitur ingens diſcrimen, tum quod ad vires motivas, tum quod ad elevationes attinet; ubique enim eas, aut juſto majores, aut juſto minores facit. Cæterum, ex Tabella colligimus, ab initio inflationis, cum angulus ſemidilatationis EAR valde acutus eſt, reſiſtentiam permagnam habere rationem ad vim abſolutam elaſticitatis auræ motivæ; ſiquidem angulo EAR exiſtente 30 min. reſiſtentia erit ad vim elaſticitatis ut 22900000 ad 1. Unde ſatis colligere eſt, quam debili admodum ebullitione opus ſit in Muſculis, ad immenſam, imo incredibilem, energiam Muſculorum

* Lib. *de Motu animalium.* Part. 1. Prop. 99.

rum efficiendam; potentia quippe, qua Muſculi vaſta pondera elevant, longe major eſt quam gravitas ponderum, utpote quæ multo remotiora ſunt ab hypomochlio quam Muſculorum inſertio. Hac itaque in re, natura non utitur inſtrumentis, ſcilicet oſſibus ad ponderum elevationes faciliores reddendas; oſſa enim vices ſubeunt vectis inverſi, in quo nempe pondera ſuperanda ab articulatione, tanquam a fulcro, ſeu hypomochlio, majorem, vis autem movens, ſeu Muſculus, minorem obtinet diſtantiam. Hinc ſi pondera Muſculis nulla omnino re interjecta poſſent alligari, pluſquam centies, imo interdum millies, majora elevarentur pondera, quam modo ordinario.

Hæc ſi bene perpendamus, citra omnem hæſitationem conveniemus, minimam inflationem Muſculorum datam quamvis reſiſtentiam ſuperare, & proinde tenerrimum infantem quantamcunque molem elevare poſſe; ſed quanto reſiſtentia major eſt vi motiva elaſticitatis, tanto elevatio minus ſenſibilis evadit; ita ut vaſta pondera, quibus elevandis, vel amovendis, vires noſtras impendimus, omnino quieſcere videantur, quæ tamen revera e ſuo loco moventur. Hæc cum ita ſint, admiratio facile ceſſabit, quam afferre poteſt experimentum illud, quod teſte WALLISIO * *Oxoniæ & Londini* inſtitutum fuerat, cum inflata veſica bubula, cujus adminiculo flatus ſpiritus humani, per anguſtam fiſtulam ingredientis, elevare notabiliter poterat pondus 50, 60, 70 aut etiam plurium librarum, pro viribus pulmonum flantis; adde & pro anguſtia fiſtulæ. Experimentum hoc, non ſolum facilius ex ſupra dictis explicari, ſed etiam longe exactius per principia noſtra, quæ & veram veſicæ figuram, & aëris elaterium, ut vocant, quod ipſi proprium eſt, ponunt, ad calculum poteſt revocari, quam fecit WALLISIUS; utpote qui, commodioris, ſed minus exacti calculi gratia, genuinam figuram ſphæroidalem veſicæ inflatæ ademit, in ejuſque locum ſubſtituit rhombum ſolidum; plane ut fecit BORELLUS cum ſuis machinulis; præter hoc, etiam ipſum aëris elaterium non conſideravit, quod tamen unice præſtat dilatationis officium: hinc fieri nequit, quin calculus *Walliſianus* a vero multum abludat, ideoque error ſatis fiat notabilis.

* *Mechan.* *Cap.* XV. Prop. 3.

Poſitis	Arcu E A, vel ang. E A R, qui eſt ſemiſſ. E A D	Longitudine arcus A E. & reſiſtentia z in part. æqu.	erit	Radius A C vel E C	Sinus rectus A R	Elevatio reſiſtentiæ.	Vis ſuſtinens, ſeu requiſitæ firmitatis fibræ muſcularis.	Vis abſoluta elaſticitatis auræ motivæ, quam proxime.	Vis elaſticitatis auræ motivæ, qua premitur ſemilatus machinulæ A E.
	gr. m								
	0 0	100000		infinit.	100000	0	50000	0	0
	0.30	100000		11454546	99958	84	50002	$\frac{1}{229}$ paul. min.	435
	1. 0	100000		5727273	99954	92	50007	$\frac{1}{114}$ p. m.	873
	1.30	100000		3818182	99948	104	50017	$\frac{1}{76}$ p. m.	1309
	2. 0	100000		2863636	99939	122	50030	$\frac{1}{57}$ p. m.	1747
	3. 0	100000		1909091	99914	162	50068	$\frac{1}{38}$ p. m.	2622
	5. 0	100000		1145454	99832	336	50191	$\frac{1}{22}$ p. m.	4381
	10.0	100000		572727	99454	1192	50774	$\frac{1}{11}$ p. m.	8865
	15.0	100000		381818	98822	2356	51764	$\frac{1}{7}$ p. m.	13557
	20.0	100000		286363	97942	4116	53209	$\frac{1}{5}$ p. m.	18582
	30.0	100000		190909	95454	9092	57735	$\frac{1}{3}$ p. m.	30242
	45.0	100000		127272	89994	20012	70710	$\frac{1}{2}$ paul. plus.	57145
	60.0	100000		95454	82665	34670	100000	1 p. p.	104708
	70.0	100000		81818	76883	46234	146191	2 p. m.	178678
	80.0	100000		71590	70492	59016	287968	4 p. p.	403785
	85.0	100000		67379	67122	65756	573709	9 p. m.	851465
	90.0	100000		63636	63636	72728	infinit.	infinit.	infinit.

X V.

X V.

Ex iis quæ ſupra §. XI. diximus, & ex Tabella noſtra liquet machinulam, vel veſiculam muſcularem AEBD integram circularem figuram nunquam adiſpiſci poſſe; quia nempe, eo in caſu, vis abſoluta elaſticitatis infinities ſuperare deberet reſiſtentiam; id quod impoſſibile eſt: dantur itaque certi limites ad quos contractio muſculorum non pertingit; maxima enim machinulæ contractio, ſeu reſiſtentiæ elevatio *ad quam non*, eſt æqualis 72728 partibus earum, qualium ſemilongitudo lateris continet 100000: ex quo clarum eſt, quamvis machinulam, in maxima ſua diſtenſione, ad partem circiter ſui tertiam non contrahi; id quod etiam de ipſo muſculo cenſendum, quia omnes machinulæ ex quibus conſtat ſimiliter contrahuntur: contractio enim unius machinulæ eſt ad contractionem totius fibræ muſcularis, ut longitudo illius ad longitudinem hujus. TAB. V. *Fig.* 5.

X V I.

Ut contemplationem noſtram ulterius extendamus, conſiderandæ nobis veniunt ipſæ quantitates Spirituum animalium vel fluidi nervorum, quæ, manente elevatione reſiſtentiarum ſemper eadem, pro ſingulis reſiſtentiis impenduntur. Circa finem §. X. oſtendimus, vires inflantes, id eſt, vires abſolutas elaſticitatum auræ motivæ, in æqualibus circulis, eſſe viribus ſuſtinentibus proportionales: quoniam autem, manente ſublevatione reſiſtentiæ, vel angulo EBD ſemper eodem, vires ſuſtinentes (ceu patet ex Prop. Cl. VARIGNONII) ſunt in ratione reſiſtentiarum x; oportet ut etiam reſiſtentiæ elaſticitatibus ſint proportionales: ſed pro conceſſo aſſumimus, quantitates auræ motivæ, & quantitates Spirituum animalium eandem ſemper ſervare rationem; hoc eſt, duplam, triplam, quadruplam copiam fluidi Spiritus animales conſtituentis ex-

citare duplo, triplo, quadruplo denſiorem auram motivam. Si nunc poneretur BOYLÆI principium, ſcilicet *denſitates elaſticitatibus eſſe proportionales*, quod in aëre communi ſenſibiliter verum eſt, res foret expedita; nimirum quia quantitates Spirituum animalium denſitatibus auræ motivæ, & denſitates elaſticitatibus, elaſticitates vero reſiſtentiis proportionantur, eſſent etiam quantitates Spirituum animalium cum reſiſtentiis in eadem ratione; hoc eſt, ad ſuſtinendum pondus 100 librarum in eadem altitudine, & per idem temporis ſpatium, duplo major copia Spirituum animalium abſumeretur, quam ad ſuſtinendum pondus 50 librarum; & ſic in aliis.

XVII.

Deprehenditur autem, ſi principium BOYLÆI accurate per experientiam examinatur, denſitates elaſticitatibus non omnino eſſe proportionales: differentia quidem exigua eſt & fere inſenſibilis, ſi experimentum inſtituitur cum aëre parum denſo, ſed ſenſibilis evadit cum aëre valde condenſato; tunc enim elaſticitates in majori ratione creſcunt quam denſitates: noſtra itaque intereſt indagare, creſcentibus denſitatibus quomodo creſcant elaſticitates. In hunc finem, in dato volumine *a* concipio particulas aëris, vel auræ elaſticæ, occupare ſpatium *b*, & materiam ſubtilem reſiduum voluminis ſpatium *a* — *b*: nunc, in æquali volumine *a*, aliam quantitatem auræ elaſticæ *c* concipio, ita ut reliquum ſpatium materiæ ſubtilis ſit *a* — *c*; ideoque, ceu fluit ex iis, quæ demonſtravit Frater meus, * elaſticitas aëris primi voluminis eſt ad elaſticitatem ſecundi, in ratione compoſita ex reciproca ſpatiorum a materia ſubtili occupatorum & directa aëreorum, nempe ut *a b* — *b c* ad *a c* — *b c*; ſed denſitas primi eſt ad denſitatem ſecundi, in ratione directa ſpatiorum aëreorum, nempe ut *b* ad *c*; ſi itaque conſtruatur curva ACD ad axem AF,

* Diſſert. *de Gravitat. Ætheris*, pag. 37 & ſq. pag. 93. edit. Genev.

AF, ejus naturæ, ut ſumpta in axe AB $= a$, & ductis applicatis DF, CE, rectangulum ſub BE & AF ſit ad rectangulum ſub BF & AE, ut DF ad CE; ſumanturque abſciſſæ AE, AF pro denſitatibus aëris in volumine per conſtantem lineam AB deſignato contenti, erunt applicatæ DF, CE ejuſdem elaſticitates. Si, more algebraïco, quæratur æquatio naturam curvæ ACD exprimens, invenietur, poſitis conſtante AB, a; & alia ad libitum aſſumpta BF, f; DF, g; abſciſſa AE, x; & applicata EC, y; hæc æquatio $fgx = aay - afy - axy + fxy$, quæ indicat curvam quæſitam eſſe Hyperbolam, & applicatam BG in B fore infinitam, adeoque Aſymptoton Hyperbolæ; cujus centrum habetur producendo Aſymptoton GB in R, ita ut BR ſit quarta proportionalis ad AF, FD & BF; ſemiaxis tranſverſus eſt æqualis mediæ proportionali inter BR & duplam AB. TAB. V. *Fig.* 6.

XVIII.

Ex his perſpicuum eſt elaſticitates, præſertim in aëre multum condenſato, in longe majori ratione creſcere quam ipſæ denſitates; elaſticitas etenim tandem abit in infinitum, quando denſitas ſuum quidem maximum, ſed nonniſi finitum gradum attingit. Hæc ut ad rem ipſam nunc applicemus: ſupra §. XVI. poſuimus denſitates auræ motivæ ejuſdem voluminis quantitatibus Spirituum animalium impenſorum, qui illam efferveſcendo cum ſanguine produxerunt, eſſe proportionales; ibidem vero demonſtravimus elaſticitates proportionari reſiſtentiis; ex quo igitur colligendum, ipſam etiam Hyperbolam ACD determinare relationem reſiſtentiarum ad quantitates Spirituum abſumptorum; id eſt, ſi CE, DF denotent reſiſtentias, denotabunt AE, AF quantitates Spirituum abſumptorum. Sit jam volumen machinulæ muſcularis, vel, quod etiam valet, omnium Muſculi machinularum ſimul ſumptarum,

quod exprimitur per AB, 10 partium, BF, ſeu *f*, = 1, FD, ſeu *g*, = 100000; ſi nunc quantitas Spirituum, id eſt, AE, ſeu *x*, ſit partium

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

per æquationem curvæ reperietur CE, ſeu *y*, id eſt, pondus elevandum, partium

1234. 2778. 4762. 7407. 11111. 16666. 25926. 44444. 100000. infinit

Hinc, ni fallor, ratio petenda eſt ejus, quod in dies experimur & etiam miramur, cur nempe magna pondera (ea ſaltem quæ viribus noſtris proportionata ſunt) non multo majori difficultate eleventur, ad eandem puta altitudinem, quam exigua. Omnis enim difficultas, in motionibus animalibus peragendis, unice, ut credo, provenit a diſpendio Spirituum animalium; verum Spiritus in longe minori ratione abſumuntur, quam ſunt pondera elevanda; ita ut, ſi ex. gr. elevandum ſit pondus duplum, non ideo etiam requirantur duplo plures Spiritus animales, ceu ſatis clarum eſt ex laterculo iſto, ubi reperitur quod, ope quantitatis Spirituum animalium, quæ ſit ut 8, elevetur pondus quadruplo majus, quam alia quantitate quæ ſit ut 5; licet jactura Spirituum, illo in caſu, ne quidem duplo major ſit, quam jactura in hoc; ut pote quæ ſe habent ut 8 & 5: in hac igitur ratione etiam ſe habebunt difficultates, quæ ſentiuntur in iſtiuſmodi ponderibus attollendis.

XIX.

Utilis heic non minus quam curioſa incidit ſpeculatio, nimirum, qua ratione æſtimandi ſint laſſitudinum & roboris gradus. Pono æqualia diſpendia Spirituum æquales laſſitudines inducere, hoc eſt, laſſitudines ſeſe habere ut copiæ ſpirituum abſumptorum: pono itidem, in ſuſtinendo uno eodemque pondere, & quidem ſemper in eadem altitudine, temporibus æqualibus deperditum iri copias Spirituum æquales: hoc facile probabitur, cum enim hoc modo Muſculus ſit in continua tenſione, op-

opportet, ut ad conſervandam ejus inflationem, quovis momento ſuggeratur nova & æqualis Spirituum animalium quantitas; ſecus enim æquabilis ebullitio, quæ utique ad æqualem inflationem Muſculi conſervandam neceſſaria eſt, non efficeretur; hæc ergo ſtillicidia fluidi nervos implentis, quæ æquabili fluxu exprimuntur, conſument Spiritus animales in ratione temporum, & proinde facient ut, in portando onere, vel ſuſtinendo pondere, laſſitudines inductæ ſe habeant in ratione temporum: ſed ſi pondera ſint inæqualia, & diverſis temporibus, ab eodem Muſculo in eadem altitudine ſuſtinenda; erunt laſſitudines in ratione compoſita ex ratione temporum, & ex ratione reſpondentium quantitatum Spirituum animalium uno momento abſumptorum, quæ haberi poſſunt, ex præcedenti Tabella, vel melius, ex ipſa æquatione ad Hyperbolam.

X X.

Simili modo etiam gradus roboris determinare poſſemus: Non enim opus eſt, ut unus homo duplo majori copia Spirituum polleat, ut ſit duplo robuſtior quam alius: poſito nemque, duos iſtos homines æqualis eſſe corporis ſtaturæ, id eſt, habere omnes ſuos Muſculos reſpective ſimiles & æquales; communiter dicere ſolemus alterum altero duplo, triplo robuſtiorem eſſe, cum duplo, triplo majus onus ad æqualem altitudinem elevare potis eſt: verum, ut jam ſatis oſtendimus, onera vel pondera non ſunt in ratione quantitatum Spirituum abſumptorum, ſed in multo majori; ideoque nonnunquam ſufficit, ut quis vel tantillo plures Spiritus animales ſuppeditare poſſit quam alius, ad duplam, vel majorem vim exercendam. Sed quia tempus me deficit, & alia alio me vocant negotia, hæc quæ raptim ſcripſi fuſius tractare non licet: id unicum monitum volo, cum hîc generalem Muſculorum œconomiam, eorumque motionum explicationem tradere animus fuerit, me primario attendiſſe ad eos Muſculos, qui motui corporis locali, ſeu externo, inſerviunt: Hoc igitur Lectorem

[illegible] XVIII. *DE MOTU MUSCULORUM.*

[illegible] quod Muſculos in genere ex fibris rectis & pa- [illegible]re diximus: pauci enim, qui hanc ſtructuram ad [illegible] habent, quales ſunt illi quos BORELLUS ra- [illegible] quoniam eorum fibræ inſtar radiorum converge- [illegible] nihilo ſecius fibras ſuas faſciculis incluſas æquidi- [illegible]nt, ut oſtendit BORELLUS. * Reliqui autem [illegible] diaphragmatis, cordis, ſphincterum, aliorumque, [illegible]e, vel obliquo, vel ſpirali, vel circulari, ſemper [illegible]elo tractu procedunt, ſicuti peculiari modo fabri- [illegible]a etiam ſuas peculiares obeunt functiones; quæ [illegible]is in eo conveniunt, quod omnes omnium Muſ- [illegible]ones a machinularum ex quibus conſtant, inflatio- [illegible]ant: ſic ut in tota humani corporis machina, ne [illegible]em reperiatur particula in motu conſtituta, quæ [illegible]ur, vel immediate ab ipſa anima imperante, vel [illegible] quorum nullus eſt, qui Leges mechanicas, quas [illegible]mus, non ſtricte & continuo obſervet, uſque dum [illegible]e Arbiter, mirabilem corporis & animæ nexum [illegible] univerſo machinæ motui impoſuerit finem.

[illegible] *Motu Animal.* Part. I. Prop. 80.

118.



N°. XIX.

JOHANNIS BERNOULLI

Conſtructio facilis Curvæ receſſus æquabilis a puncto dato, per Rectificationem Curvæ Algebraicæ.

JAM olim mihi tentatum præſens problema lubens confiteor; levem autem ob ſcrupulum, qui feſtinanti, & aliis tum temporis occupatiſſimo, occurrebat, quemque adeo diluere non ſtatim vacabat, ab eo prorſus abſtinui. Cum vero nuperum *menſem Junium* pervolverem, inſcio mihi & inexpectanti ſeſe offerebat problematis hujus Solutio *fraterna* †, aliaque huic affinia. Ex quorum occaſione filum meæ ſolutionis imperfectæ, & obiter olim tentatæ, denuo aggreſſus & feliciter ſum proſecutus. Non multus in illo fui, ſed, leve poſt conamen, perveni ad conſtructionem, quæ fraterna tanto præſtantior eſt, quod curvæ algebraicæ rectificatione idem præſto, & faciliori modo, quam quod *Frater* præſtitit per rectificationem curvæ mechanicæ: Nec opus habeo radiis circulorum oſculantium in ſpiralibus, qui tamen & ipſi nullo labore inveniuntur. Acta Erudit. 1694. Oct. pag. 394.

Conſtructioni meæ præfigam calculum, qui me eo perduxit, partim, ut eam ex fraterna deductam nemo exiſtimet, partim etiam, & quidem præcipue, ut publicum exinde emolumentum capiat, & non meris conſtructionibus (quibus intellectis non doctius evadit) paſcatur. Optandum ſane eſſet, ut idem Eruditi ſemper obſervarent, & hac in re ſummum Geometram LEIBNITIUM imitarentur, qui egregia ſua inventa Orbi literato oſtendiſſe non contentus, viam inſuper analyticam, ſingulari opere *Scientiam infiniti* complectente, propediem editurus eſt; de quo, ut de cæteris ejus conatibus, multum nobis pollicemur.

ANALY-

† Jac. BERNOULLI, *Solutio Problematis Leibnitiani, de Curva acceſſus & receſſus æquabilis a puncto dato, mediante rectificatione curvæ elaſticæ.* Act. Erudit. 1694. Jun. pag. 276.

ANALYSIS.

TAB. VI. N°. XIX. Ut ad inſtitutum redeam. Sit ABC curva quam quærimus, per quam nempe grave deſcendens (ex altitudine data PA prius delapſum) æqualibus temporibus æqualiter recedat a puncto dato A.

Radio AP deſcripta peripheria PFH, ductæ intelligantur AB ſecans peripheriam in E, & BL, EG perpendiculares ad PA productam, itemque centro A arculus bβ, abſcindens ex AB particulam Bβ æqualem receſſui momentaneo, & proinde æqualem ei particulæ curvæ quam grave primo momento percurrit. Eſto nunc $AP = a$, $AB = x$, $AG = y$, arcus $HE = z$, $Ee = dz$, $B\beta = dx$, erit bβ (quia Ae : Ab = Ee : bβ) $xdz : a$, ideoque $Bb = \sqrt{(aadx^2 + xxdz^2)} : a$; quoniam autem B$\beta$ ſupponitur æqualis ei particulæ curvæ quam grave in A percurrit, æquali momento quo percurrit bB, erit bB ad Bβ, ut celeritas in B ad celeritatem in A, ut (ex natura gravium deſcenſus) $\sqrt{PL}$ ad $\sqrt{PA}$; ideoque $\frac{\sqrt{(aadx^2 + xxdz^2)}}{a}$: $dx = \sqrt{(\frac{xy}{a} + a)} : a$, id eſt, ſumendo quadrata, $aadx^2 + xxdz^2 : aadx^2 = xy + aa : aa$, & dividendo $xxdz^2 : aadx^2 = xy : aa$; reducta proportione ad æqualitatem, habetur $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dz}{\sqrt{y}}$; ſed, ex natura circuli, invenitur $dz = ady : \sqrt{(aa - yy)}$, ergo $dx : \sqrt{x} = ady : \sqrt{(aay - y^3)}$ quæ eſt æquatio differentialis pro curva quæſita; ubi indeterminatæ x & y cum ſuis differentialibus dx & dy, ſine ulteriori diſquiſitione, ſponte ſeparantur; ſecus ac fit, cum pro indeterminatis aliæ aſſumuntur lineæ: & hoc eſt, in quo totum myſterium conſiſtit; quod ſi LEIBNITIUM, in hoc ſupputandi genere verſatiſſimum, hucuſque latuit, mirum non eſt; ſiquidem caſu potius quam induſtria eo pervenitur, utpote quod optioni fortuitæ & arbitrariæ indeterminatarum unice eſt tribuendum. Præcipuum antem quod agendum reſtat, eſt ut, ex jam inventa æquatione differentiali, problema quam commodiſſime conſtruatur. Per quadraturam ſpatii curvilinei

linei [cujus abſciſſa exiſtente y, applicata ſit $aa\sqrt{a} : \sqrt{(aay-y^3)}$] conſtrui poſſe nemo non videt; ſed quia in praxi non facile quadrantur ſpatia, tentandum illud eſt per rectificationem curvæ alicujus; quæ ſi poteſt eſſe algebraica, in leges Geometriæ cenſendus eſt peccare qui recurrit ad mechanicam; præſertim ſi hæc ipſa mechanica non minus operoſe per quadraturas ſpatiorum deſcribatur. Heic igitur meum, de quo nec *Fratri* adhuc conſtat, oſtendam modum, quo ad curvam algebraicam pervenitur, per cujus rectificationem problema conſtruitur. Æquationis differentialis inventæ $dx : \sqrt{x} = ady : \sqrt{(aay-y^3)}$ membri non integrabilis $ady : \sqrt{(aay \quad y^3)}$ [quod ita appello, quia ejus integrale vel ſummatorium in quantitatibus algebraicis non habetur] ſumo quadratum $aady^2 : (aay-y^3)$ illudque, vel ejus multiplum, ſubmultiplumve, per methodum *Diophanteam* divido in duo alia quadrata, quorum latera, ſi fieri poteſt, ſunt integrabilia; ſecus enim orietur tantum curva mechanica: hic itaque multiplum quadratum $a^3dy^2 : (2aaay-2y^3)$ dividitur in hæc duo alia $(aa+4ay+4yy)\,dy^2 : (4ay+4yy)$ & $(aa-4ay+4yy)\,dy^2 : (4ay-4yy)$ quorum latera ſunt $(ady+2ydy) : 2\sqrt{(ay+yy)}$ & $(ady-2ydy) : 2\sqrt{(ay-yy)}$ horumque integralia $\sqrt{(ay+yy)}$ & $\sqrt{(ay-yy)}$. Ideoque conſtructa Curva AMONA, cujus abſciſſa AR $= \sqrt{(ay+yy)}$, & applicata MR $= \sqrt{(ay-yy)}$ [id eſt, cujus abſciſſæ & applicatæ reſpondeant applicatis Hyperboles æquilateræ & Circuli eandem diametrum a & eaſdem abſciſſas y habentium] erit elementum hujus curvæ $= dy\sqrt{\left(\frac{aa+4ay+4yy}{4ay+4yy} + \frac{aa-4ay+4yy}{4ay-4yy}\right)} = \frac{dy\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2ay-2y^3)}} = dx\sqrt{a} : \sqrt{2x}$; ideoque integrale primi eſt æquale integrali ultimi, id eſt, portio Curvæ AM $= \sqrt{2ax}$, proindeque $x = \overline{AM}^2 : 2a$.

Conſtructio. Ex his ſequitur conſtructio facillima problematis: Factis enim & poſitis quæ prius, producatur, ſi opus, AE ad B, ita ut AB ſit tertia proportionalis ad HP & AM; erit B in curva optata ABC, per quam grave deſcendens, ſi ex P ceciderit, æqualibus temporibus æqualiter a puncto A rece-

recedet. Demonſtrationem Syntheticam, quam quivis ex Analyſi præmiſſa ſtatim contexere poterit, omittimus. Primariæ etiam proprietates hinc facile deducuntur, quas recenſere animus non eſt; id unicum monuiſſe ſufficiat, non laminam, ſed tubum ſecundum lineam ABC incurvatum adhibendum eſſe; nam globulus deſcendendo non ubique inſiſtit convexitati curvæ. Cæterum, diſtantia puncti C, in quo curva ſemet ipſam ſecat, a vertice A, plus quam duplo major eſt AH; ſecus quam in Schemate nupero repræſentatur. Curva AMONA eſt quatuor dimenſionum, quæ etiam ſemet ipſam ſecat in A, & quæ continuata producit partem inferiorem ſimilem & æqualem ſuperiori, faciens angulum MAN, ejuſque oppoſitum, rectum. Peripheria HFP tranſit per ejus punctum S, remotiſſimum ab axe AO.

Opportune hic incidit modus conſtruendi Curvam Elaſticam, qui etiam per ſolas rectificationes Curvæ AMO & Ellipticæ cujuſdam peragitur, & proinde in praxi longe facilior quam is qui quadraturas ſpatiorum ſupponit. Semiaxibus, AO, & radio circuli AF perpendiculari ad AO, conſtruatur quadrans ellipticus FTO, & ducta quavis in eo applicata TQ, ſumatur $AR = \frac{AQ}{AF}\sqrt{(\overline{AF}^2 + \overline{AQ}^2)}$ appliceturque $QZ =$ arcui elliptico TO, mulctato quarta proportionali ad AO, AF & AM; quo facto, erit punctum Z in Curva Elaſtica. Demonſtratio non minus facilis eſt quam conſtructio. Sit enim $AQ = x$, $QZ = y$, erit elementum arcus TO (ex natura Ellipſis) $= (aadx + xxdx) : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, & elementum curvæ AM (ex ejus natura & conſtr.) $= aadx\sqrt{2} : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, ideoque elementum quartæ proportionalis ad AO, AF & AM, erit $= aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, ergo Elem. TO — Elem. $\frac{AF \times AM}{AO}$, id eſt, Elem. $QZ = xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)} = dy$, quæ eſt eadem æquatio, quam *Frater* exhibuit pro conſtruenda Elaſtica, quamque ſuſpicatus eſt, ſed perperam, nullatenus a cujuſdam ſectionis conicæ rectificatione dependere: dependet enim, ex parte ſaltem, a rectificatione curvæ Ellipticæ.

MODUS

N°. XX.

MODUS GENERALIS

Conſtruendi omnes æquationes differentiales primi gradus. Auctore
JOHANNE BERNOULLI.

UNICUM potiſſimum eſt, quod adhuc deſideratur ad perficiendam methodum tangentium inverſam, ſeparatio nempe quantitatum indeterminatarum in æquationibus differentialibus primi gradus; pro qua plurimas regulas ſpeciales jam dudum inveni; generalis autem, per quam in quavis æquatione differentiali propoſita procedat ſeparatio indeterminatarum, vix ſperanda eſt. Quod cum jam ab aliquo tempore perpendiſſem, mentem ſubiit, an non poſſibile eſſet æquationem differentialem conſtruere, non adhibita ſeparatione iſta; quod tandem etiam ex voto ſucceſſit. Inter plures autem, quos detexi modos, præſens commodior videtur, qui, dum melior prodeat in lucem, ſacra quaſi erit anchora ad quam recurrendum, cum omnes regulæ pro ſeparatione indeterminatarum inſtitutæ naufragium faciunt. *Acta Erud. Lipſ. 1694, Nov. pag. 435.*

Omnis æquatio differentialis primi gradus exprimi poteſt per hanc $sdx = zdy$; poſito literas s & z denotare quantitates formatas ex x, y & conſtantibus: ponatur nunc dy ad dx habere rationem ut m ad a, quæ utique in quolibet curvæ puncto variatur; æquatio differentialis mutabitur in hanc $as = mz$, quæ tres indeterminatas continet s, z & m, ſeu x, y & m; ejus itaque Locus eſt ad infinitas curvas algebraicas (quas *directrices* appellare liceat), quæ conſtruuntur, ponendo unam trium indeterminatarum, ſi vis m, conſtantem; inde enim emerget æquatio duarum duntaxat indeterminatarum, quæ format unam ex infinitis curvis directricibus: ponendo nunc hanc eandem m conſtantem majorem vel minorem, ha-

 bebi-

bebitur alia directrix, & continuando hoc in infinitum, infinitæ conſtruentur curvæ directrices ſuper eodem axe. Sic itaque m ad a, id eſt dy ad dx, omnes habebit poſſibiles rationes. Quo facto, inter duas quaslibet directrices elementaliter diſtantes duco lineolam, ita ut ſinus inclinationis ad axem ſit ad ſinum complementi, ut m, in his directricibus elementaliter diſtantibus ſumta, ad a; Hoc ſi ubique fiat, & tandem omnes ductæ lineolæ (manente una immobili) parallelo motu deprimantur vel elevantur, ſuis directricibus ſemper adhærentes, donec omnes ſibi invicem connectantur; orietur Curva quæſita.

Hinc liquet, uni eidemque æquationi differentiali infinitas ſatisfacere; prout enim lineola immobilis altius vel humilius ſumitur, ſemper alia prodibit curva. Hic notandum venit, ubi lineola ſuam reſpective directricem tangit, ibi curvam quæſitam habere punctum flexus contrarii; quod cuivis attendenti facile patebit. Hinc omnis æquatio differentialis, exceptis iis quarum directrices ſunt lineæ rectæ, exhibet curvas infinitas, quæ gaudent puncto flexus contrarii; inter quas unica poteſt eſſe cujus punctum flexus confunditur cum vertice, vel cum alio puncto, ita ut evaneſcat. Ex. gr. æquationi differentiali $axdx = yydy$, certum eſt reſpondere Parabolam cubicalem ſecundam $\frac{1}{2} axx = \frac{1}{3} y^3$, cujus quidem punctum flexus non exiſtit; infinitæ tamen aliæ dantur curvæ ejuſdem ſpeciei $\frac{1}{2} axx = \frac{1}{3} y^3 \pm b^3$ eidem æquationi differentiali $axdx = yydy$ ſatisfacientes, quæ omnes flexuras contrarias habent. Ex quibus perſpicuum eſt, ipſa hæc puncta flexuum formare aliam Curvam, quæ etiamſi curvæ ipſæ cujus ſunt puncta flexus ſint mechanicæ, ſemper tamen (quod memorabile prorſus eſt) erit algebraica. Exemplo res patebit: Eſto propoſita æquatio differentialis hæc $xxdx + yydx = aady$, quæ, an per ſeparationem indeterminatarum conſtrui poſſit, nondum tentavi: Verum, per generalem methodum præſcriptam ſi reſolvatur, prodibit hæc æquatio $xx + yy = am$, oſtendens omnes curvas directrices eſſe circulos concentricos, quorum centrum

trum commune eſt in ipſo initio abſciſſarum x: ſic itaque infinitæ conſtruentur curvæ, quæ omnes æquationem differentialem propoſitam includunt, quarumque puncta flexus exiſtunt in curva algebraica, quæ ita determinatur: Ex centro circulorum concentricorum ducatur perpendicularis ad axem, in eaque ſumatur punctum diſtans a centro $a\sqrt{(am:(aa+mm))}$ per quod ducta axi parallela ſecabit circulum, cujus radius eſt $\sqrt{am}$, in puncto quod erit ad curvam optatam: Vel ſi mavis, conſtruatur ad axem curva cujus æquatio ſit (poſitis abſciſſa r, & applicata s,) $s^3 + rrs = aar$, tranſibit hæc ipſa curva per puncta flexus omnium curvarum æquationis $xxdx + yydx = aady$ competentium.

Cæterum, idea iſta Conſtructionis univerſalis æquationum differentialium primi gradus, poterit etiam extendi ad differentiales ſecundi altioriſque gradus: Aliis autem, quibus plus vacat, perfectionis honorem relinquo.

N°. XXI.

ADDITAMENTUM

Effectionis omnium quadraturarum & rectificationum curvarum per ſeriem quandam generaliſſimam.

GENERALI, quem præmiſi, modo conſtruendi curvas ex æquatione data differentiali, ob multam affinitatem adnecto dimenſionem generalem ſpatiorum & curvarum: Qualem quidem etiam exhibuit Celeberrimus LEIBNITIUS in *Actis Erud. Mens. April.* 1693. * cujus methodus ingenioſe ſane excogitata multum placuit, eo quod ſeſe univerſaliter extendat ad quamcunque propoſitam curvam. Cum autem, in quovis exemplo, ſingularis calculus inſtituendus ſit, quo non

 niſi

* G. G. L. *Supplementum Geometriæ practicæ ſeſe ad problemata tranſcendentia extendens, ope novæ methodi generaliſſimæ per ſeries infinitas.* Act. Erud. 1693. April. pag. 178.

niſi ſingularis ſeries provenit quæſito reſpondens: placet hic apponere ſeriem univerſalem, quæ omnes quadraturas, rectificationes, aliorumque differentialium integralia generaliter exprimit.

Elementum ſpatii, curvæ, vel quodvis aliud, explicari poteſt per ndz (poſito n eſſe quantitatem quomodocunque formatam ex indeterminatis & conſtantibus); ut itaque integrale ipſius ndz (quod per ſe ſolum, ob inſufficientia data, non eſt integrabile) ad ſeriem generalem revocetur, diſpiciendum eſt quid ipſi continuo addendum, idemque ab eo ſubtrahendum ſit, ita ut ſic, manente quantitate ndz ſemper eadem, integralia additorum demtorumque ſumi poſſint: In hunc finem ſequentem formo ſeriem, quæ ponit dz conſtantem, $ndz = + ndz + zdn - zdn - \frac{zzddn}{1.2.dz} + \frac{zzddn}{1.2.dz} + \frac{z^3 dddn}{1.2.3.dz^2}$ &c. Ubi bini quilibet termini, immediate ſe ſubſequentes ſigniſque contrariis affecti, ſe multo deſtruunt; ita ut ſeries in infinitum continuata efficiat tantum ndz; quorumlibet vero etiam binorum terminorum immediate ſubſequentium & iiſdem ſignis affectorum ſumi poſſunt integralia. Hoc igitur modo habetur hæc ſeries univerſaliſſima: *Integr.* $ndz = + nz - \frac{zzdn}{1.2.dz} + \frac{z^3 ddn}{1.2.3.dz^2} - \frac{z^4 dddn}{1.2.3.4.dz^3}$ &c. Quæ ſi in quocunque caſu applicetur, evaneſcent ſemper dn, ddn, $dddn$, &c. ut & dz, dz^2, dz^3, &c. quia earum relatio in dato caſu datur in quantitatibus algebraicis; & ſic tota ſeries conſtabit terminis pure algebraicis.

Exempla ſumamus Dn. LEIBNITII: Quærendus eſto logarithmus ex numero: Sit ratio, vel numerus $a + x$, qui brevitatis ergo appelletur r, & logarithmus ſit y; habebitur pro æquatione differentiali $dy = \frac{adx}{r}$, id eſt, logarithmus ſeu $y =$ *Int.* $(adx : r)$; hoc autem integrale ad ſeriem facile revocabitur; factis enim in ſerie univerſali $z = x$, $dz = dx$, $n = \frac{a}{r}$,

dn

$dn =$ (ob $dr = dx$) $- \frac{adx}{rr}$, $ddn = + \frac{1.2.\,adx^2}{r^3}$, $dddn =$ $- \frac{1.2.3\,adx^3}{r^4}$ &c. convertetur illa in hanc ſpecialem $y = \frac{ax}{r^1} + \frac{axx}{2r^2} + \frac{ax^3}{3r^3} + \frac{ax^4}{4r^3}$ &c. quæ quamvis diverſa a Domini LEIBNITII, ejuſdem tamen eſt valoris.

Contra ſi dato logatithmo numerus ſit inveniendus; habebitur pro æquatione differentiali $dx = rdy : a$; factis ergo in ſerie univerſali $z = y$, $dz = dy$, $n = \frac{r}{a}$, $dn =$ (ob $dr = dx$) $\frac{rdy}{aa}$, $ddn = \frac{rdy^2}{a^3}$, $dddn = \frac{rdy^3}{a^4}$ &c. orietur $x = \frac{ry}{a} - \frac{ryy}{1.2aa} + \frac{ry^3}{1.2.3a^3} - \frac{ry^4}{1.2.3.4a^4}$ &c. ergo $\frac{x}{r}$, id eſt, $\frac{x}{a+x} = \frac{y}{a} - \frac{y^2}{1.2.a^2} + \frac{y^3}{1.2.3.a^3} - \frac{y^4}{1.2.3.4.a^4}$, &c. Cognita itaque $\frac{x}{a+x}$ cognoſcetur etiam x.

Problema de inveniendo ſinu recto, ex dato arcu & radio, non minus facile expeditur: Sit enim arcus circuli y; ſinus rectus x; & radius a; & ponatur brevitatis gratia $\sqrt{(aa - xx)}$ ſeu ſinus complementi $= r$; erit æquatio differentialis $dx = rdy : a$, poſitis ergo in ſerie univerſali $z = y$, $dz = dy$, $n = r : a$ $dn =$ (ob $dr = - xdx : r$) $- \frac{xdy}{aa}$, $ddn = - \frac{rdy^2}{a^3}$, $dddn = \frac{xdy^3}{a^4}$, $ddddn = \frac{+rdy^4}{a^5}$ &c. reperitur $x = \frac{ry}{a} + \frac{xyy}{1.2aa} - \frac{ry^3}{1.2.3.a^3} - \frac{xy^4}{1.2.3.4.a^4} + \frac{ry^5}{1.2.3.4\,5a^5}$ &c. Poſitis terminis cum x multiplicatis ad alteram partem, diviſiſque ſeriebus, habebitur $x : r$, id eſt, $x : \sqrt{(aa - xx)} = (y - \frac{y^3}{1.2.3.a^2} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5.a^5}$ &c) : $(a - \frac{yy}{1.2.a} + \frac{y^4}{1.2.3.4.a^3}$, &c.) Cognita itaque $x : \sqrt{(aa - xx)}$, cognoſcetur etiam x. Ubi hoc notatu dignum venit, quod ſeries denominatoris ſit æqualis ſinui complementi, quia

ſecun-

ſecundum Dn. LEIBNITIUM invenitur ſeries numeratoris æqualis ſinui recto.

Ultimum exemplum in *Actis* allatum, eſt problema quod D. DE BEAUNE CARTESIO propoſuit, cujuſque conſtructionem jam olim in *Actis* dedi: Quæritur curva, in qua ſi coordinatæ ſunt s & y, ſubtangens ſit $= (yy - sy) : a$, id eſt, cujus æquatio differentialis ſit $ds = (ydy - sdy) : a$. Si libeat, data abſciſſa y, exprimere ordinatam s per ſeriem, ponatur $y - s = r$; & fiat in ſerie univerſali $z = y$, $dz = dy$, $n = r : a$, $dn =$ [ob $dr = \frac{ady - ydy + sdy}{a}$] $\frac{ady - rdy}{aa}$, $ddn = \frac{-ady^2 + rdy^2}{a^3}$, $dddn = \frac{ady^3 - rdy^3}{a^4}$ &c. quo facto, obtinebitur $s = \frac{ry}{a} - \frac{(a-r)y^2}{1.2.a^2} - \frac{(a-r)y^3}{1.2.3.a^3} - \frac{(a-r).y^4}{1.2.3.4.a^4}$ &c. ideoque $(s - \frac{ry}{a}) : (-a + r)$ id eſt, $(as - yy + sy) : (-aa + ay - as) = \frac{yy}{1.2aa} + \frac{y^3}{1.2.3a^3} + \frac{y^4}{1.2.3.4a^4}$ &c. hinc data $(as - yy + sy) : (-aa + ay - as)$, dabitur etiam s.

Hoc in honorem Incomparabilis LEIBNITII monendum, quod per ejus methodum quæſita, ſtatim ſola, nec aliis quantitatibus implicita, proveniat; meam autem ab univerſalitate ſua multum commendabilem pariter non negabit.

N°. XXII.

N°. XXII.

ILLUSTRIS MARCHIONIS HOSPITALII

Solutio Problematis Phiſico-Mathematici ab erudito quodam Geometra propoſiti.

PROBLEMA.

SIT pons ſublicius AB (vid. fig. 1, 2, 3,) *convertibilis circa axem A, ſitque trochlea C circumductus funis B C M, cujus una extremitas ſuſtinet pontem, altera pondus vel ſacoma M. Quæritur qualis debeat eſſe curva C M N aut L M N, ſic ut ubicunque exiſtens pondus M in curva, ſemper æquilibrium faciat cum ponte A B.*

Acta Erud. Lipſ. 1695 Febr. p. 56.

TAB. VI. N°. XXII.

SOLUTIO.

Supponendo gravitatem pontis A B, quam conſidero collectam in puncto B, exprimi per verticalem A C, tres habentur differentes caſus: primus cum linea exprimens pondus M æquatur longitudini funis B C M, ſecundus cum ſuperat, tertius cum ſuperatur.

Conſtructio generalis pro omni caſu.

A quolibet puncto D peripheriæ Q D N deſcriptæ centro C & radio C Q æquali funi B C M, ducantur ſinus D G & radius C D. Et poſitis, longitudine funis B C M vel radio $CQ = a$, linea exprimente pondus $M = b$, abſciſſa $CG = z$; ſumatur $CM = 2a - 2bz : a$. Dico punctum M fore in curva quæſita. Hinc manifeſtum eſt, conſtructionem primi caſus, ubi $a = b$, evadere valde ſimplicem; etenim C M tantum ſumenda eſt dupla ipſius G Q. Sequuntur nunc quædam harum curvarum determinationes.

1. Accepta $z = aa : 2b$, tanget ducta perpendicularis ad A C curvam C M N aut L M N in puncto N, in quo peripheriam ſecat, & quod eſt horizonti proximum; ſic ut ſola portio C M N, aut L M N, ſerviat pro effectu qui proponitur.

2. Ducta horizontali A H æquali longitudini pontis, & poſita hypotenuſa $CH = c$, ſi accidit in duobus primis caſibus, ut a ſit $= c$, tota portio C M N utilis erit: ſin autem a excedit c; pars tantum M N ſatisfaciet, quæ determinatur ſumendo $CG = (aa + ac) : 2b$.

 3. Curva

3. Curva in utroque priorum caſuum tranſit per centrum C: hoc cum diſcrimine, quod illa in primo caſu pro tangente habeat verticalem AC; in altero autem ab eadem oblique ſecetur, faciens angulum qui determinatur ſumpta $z = aa : b$. Curva tertii caſus non tranſit per centrum, ſed occurit verticali AC ad angulum rectum infra centrum in puncto L, ita ut $CL = 2a - 2b$.

4. Curva cujuſvis caſus in ſe ipſam redit; cum hac differentia, quod in primo & tertio ſecet normaliter verticalem AC, productam ſupra C, in unico tantum puncto diſtante a centro $2a + 2b$, in ſecundo autem caſu eandem adhuc ſecet in alio puncto, quod a centro diſtat $2a - 2b$: id eſt, quod hæ curvæ habeant formas quæ repræſentantur fig. 4, 5, 6.

5. Ut habeantur puncta maximæ latitudinis harum curvarum, accipienda eſt $z = (aa \mp a\sqrt{(aa + 8bb)}) : 4b$. Unde liquet, quod, in primo & tertio caſu, non niſi falſa radix ſervire poſſit; quoniam vera æqualis aut major eſt radio: loco quod, in ſecundo, utraque, ut pote minor radio, utilis eſſe poteſt: Et reapſe fig. 5. ſatis oſtendit duas tunc maximas latitudines eſſe determinandas.

6. Curva tertii caſus LMN (fig. 3. 6.) gaudet puncto flexus contrarii inter puncta L & N, quod reperitur accipiendo $z = (aa + 2bb) : 3b$; radius circuli oſculatoris in vertice $L = (2aa - 4ab + 2bb) : (2b - a)$. Sumenda autem eſt $b = (a + c) : 2$; adeo ut pondus M, hoc caſu, ſit determinatum; licet, in reliquis duobus, omnino ſit arbitrarium.

7. Spatium integra curva incluſum æquatur quatuor ſuis circulis generatoribus, plus duobus circulis radio b deſcriptis; ita ut, in primo caſu, ubi $a = b$, hoc ſpatium contineat ſexies circulum ſuum generatorem.

8. In primo caſu, curva integra eſt æqualis ſexdecuplo radio circuli generatoris; eſt generatim, quælibet portio CM æquatur quatuor diametris RQ, minus quatuor ſubtenſis DR.

Cæterum hoc problema ſuam applicationem & uſum obtinere poteſt in Architectura militari. Mihi propoſitum fuit a Geometra quodam * in analyſi *Carteſiana* exercitatiſſimo, qui aſſeveravit ſe quidem reperiſſe tandem viam perveniendi ad ſolutionem; ſed opus habere, ut 27 analogias differentes inſtitueret, prius quam detegeret naturam curvæ; adeoque cum, ob nimiam prolixitatem valde operoſi calculi, ſolutionem imperfectam reliquiſſet, contentum fuiſſe determinatione approximante punctorum in curva; id quod ad praxin ſufficere credebat. Interim ex conſtructione præcedente ſatis colligere eſt, curvam hanc deſcriptu non minus facilem eſſe, quam quamlibet ſectionum conicarum. Methodum, qua uſus ſum, quæque eadem eſt cum *Leibnitiana*, nunc apponam; ut inde pateſcat, quantum erudito ejus *Auctori* debeatur, pro publicatione inventi

* Dno. SAUVEUR.

inventi adeo utilis; cujus beneficio fores ex Matheſi in Phyſicam tam feliciter effregit.

Ante omnia auferri debet, quod mechanicum eſt in quæſtione, ut pure Geometrica reddatur; quod ita facio. Conſidero gravitatem pontis AB, tanquam pondus affixum in B, & mobile juxta quadrantem peripheriæ, centrum habentis in A, & radium lineam AB. Suppoſito autem gravitatem hujus ponderis exprimi per verticalem AC; ex Staticæ regulis certum eſt, lineam BC exprimere pondus, quod requiretur ad ſuſtinendum pontem in hoc ſtatu: Si itaque curva CMN aut LMN habeat proprietatem requiſitam; et ſi pondus, quod cum ponte æquilibratur, ſit in M; oportet ut ducta MK perpendiculari ad curvam in puncto M, & facto, ut CK ad CM, ita pondus M, quod exprimo per rectam b, ad quartam quandam proportionalem, hæc quarta linea ſit æqualis ipſi BC. Quocirca deſcripto circulo, centro C, & radio CQ æquali longitudini funis BCM, ſecante CM in D; & ducta DE parallela AC, & æquali b; recta EM debet normaliter inſiſtere curvæ CMN in puncto M: aut, quod eodem recidit, perpendicularis KM producta ſecabit parallelam DE in puncto E, tali, ut intercepta DE ſit ſemper æqualis eidem lineæ b; nam ob ſimilia triangula CMK, DME, erit $CK : CM = DE : DM$; &, ob radium CD æqualem BCM, quarta hæc proportionalis DM, quæ exprimit potentiam, qua pondus M trahit pontem AB, erit æqualis lineæ BC, quæ exprimit potentiam qua pons AB reſiſtit ponderi M: adeo ut, in hoc rerum ſtatu, ſemper æquilibrium fiat inter pontem AB & pondus M. Hoc igitur unicum in quæſtione eſt, ut inveniatur curva, cujus perpendiculares dictam habeant proprietatem. In hunc finem

Ducta PMF normali ad AC, & poſitis indeterminatis $CP = x$, $PM = y$, & cognitis CQ, vel BCM, $= a$, $DE = b$, habebitur ob triangulum rectangulum CPM, $CM = \sqrt{(xx + yy)}$ & ob ſimilia triangula CMP, CDG; DG, vel PF, $= ay : \sqrt{(xx + yy)}$ & $CG = ax : \sqrt{(xx + yy)}$. Ergo $PF - PM$, vel MF, $= ay : \sqrt{(xx + yy)} - y$, & $DE + CP - CG$, vel FE, $= b + x - ax : \sqrt{(xx + yy)}$; verum ob ſimil. triangula MPK, MFE, MF $[ay : \sqrt{(xx + yy)} - y]$: FE $[b + x - ax : \sqrt{(xx + yy)}] = MP : PK = dx : dy$, ſiquidem recta KE debeat ſecare perpendiculariter curvam in puncto M. Ideoque $bdx + xdx - axdx : \sqrt{(xx + yy)} = aydy : \sqrt{(xx + yy)} - ydy$; quæ æquatio ſi integretur, dabit hanc alteram $a\sqrt{(xx + yy)} = bx + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}yy$ vel $bx + \frac{1}{2}xx + yy \mp ff$, quæ eſt propria æquatio pro natura curvæ quæſitæ, ex qua nempe conſtructio & determinationes præcedentes ſunt deductæ.

Nº. XXIII.

JOHANNIS BERNOULLI

Animadverſio in præcedentem Solutionem Illuſtris D. Marchionis Hospitalii.

Demonſtratio identitatis curvæ æquilibrationis *cum Cycloide deſcripta ex circumvolutione rotæ ſuper rota æquali.*

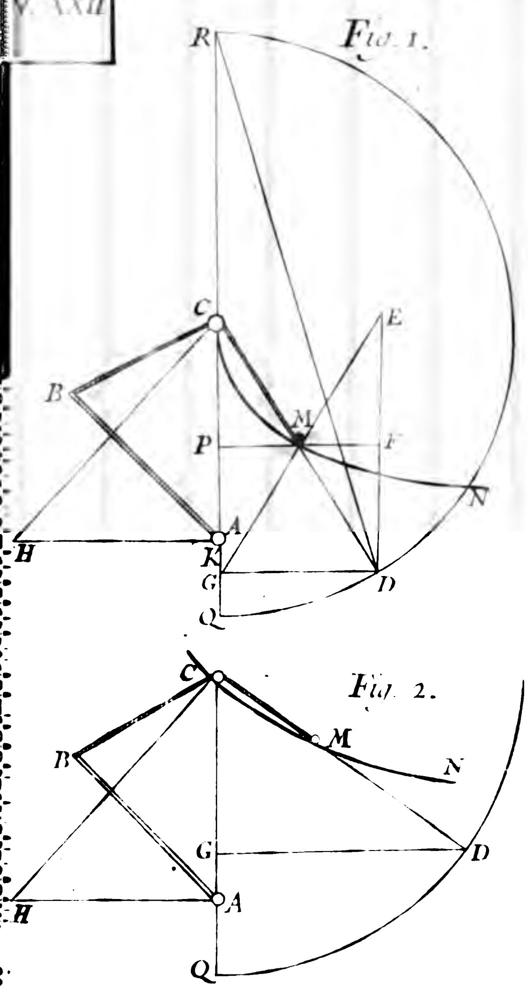
Conſtructio generalis ejuſdem curvæ inventa per communem Geometriam.

Solutio problematis fraterni anno 1694. *menſ. Octobr. propoſiti*, &c.

Acta Erud. Lipſ. 1695 Febr. p. 59.

PRæſtantiam alicujus problematis non tam æſtimandam eſſe a difficultate, quam ab utilitate, ſatis oſtendit præſens; cujus ſuccinctam pariter & ingenioſam nobis tradit ſolutionem Illuſtris Hospitalius; & quod practicum ſuum uſum, non ſolum in Architectura militari, ut ipſe ſolutionis Author animadvertit, ſed etiam in civili, eumque ampliſſimum habere poteſt. Quanta ex. gr. moleſtia nonnunquam ſuperanda eſt in aperiendis valvis cavarum, in attollendis alis officinarum, inque deducendis omnivarii generis portis. Quantacunque autem illa ſit, ita tamen temperari poteſt per ſacomata contraponderantia & laminas adaptatas, eam quam *Illuſtris Author* ipſis aſſignat habentes curvaturam, ut vel ab infante hujusmodi machinæ ſine periculo poſſint regi. Quot alii quotidiani uſus exinde emergant, quilibet ſecum reputet.

Cum autem in reſolutione problematum id præcipue intendamus; ut peractis quæ ad theoriam ſpectant, via inveniatur facilis, quæ nos ad conſtructionem ſimpliciſſimam deducat; eum conſtruendi modum in praxi commodiſſimum cenſeo, qui peragitur, vel per fluxionem puncti, vel per tractionem *Leibnitianam:*


Fig. 1.
R
C
E
B
M
P
F
N
A
H
K
G
D
Q
Fig. 2.
C
M
N
B
G
D
A
H
Q

nam : deſcriptio quippe per inventionem punctorum in curva, non tam practica quam theoretica dicenda eſt. Ex hac tamen, tanquam ex regula, conditiones motus continui eliciuntur. Sic ex æquatione algebraica quam *Dn. Marchio* pro determinatione ſuæ curvæ, quam *æquilibrationis* appellare liceat, exhibuit, reperio ipſam hanc curvam, quod ſane notatu dignum eſt, eſſe ex *cycloidalium* genere; & proinde motu, perquam ſimplici & ad praxin aptiſſimo, deſcribi poſſe.

Rotetur enim circulus S O T ſuper circulo æquali R V T, ſitque initium rotationis V, & punctum deſcribens M ſumtum vel in ipſa peripheria T O, vel extra, vel intra eandem; dico cycloidem C M N hoc modo deſcriptam fore curvam æquilibrationis; quod ſic demonſtratur: Connexis centris R, S, producatur S M, donec concurrat cum producta R V, in X, ſumtaque R C æquali S M, deſcribatur circulus C Q D, radio C Q æquali radio genitoris, ex centro C per punctum M ducatur radius C M D, & ex D agatur perpendicularis D G. Quoniam nunc, ex natura cycloidis, arcus T V eſt æqualis arcui T O, erit angulus X R S = angulo X S R, ergo X R = X S, proindeque ducta perpendicularis X T tranſibit per punctum contactus T, & ob R C = S M erit C M parallela R S; ideoque ang. G C D = ang. X R T; hinc triangula C G D, R T X, itemque triangula X R S, X C M ſunt ſimilia. Eſto nunc R T, vel S T, vel C D $= a$, S M, vel R C $= b$, C G $= z$, erit C G (z) : C D (a) = R T (a) : R X $= aa : z$; ergo R X — R C, id eſt, X C $= aa : z - b$, & quoniam X R : R S = X C : C M, invenietur C M $= 2a - 2bz : a$; quæ cùm ſit eadem quantitas quam *Dn.* HOSPITALIUS invenit, ſequitur & ipſam cycloidalem C M N eſſe curvam æquilibrationis *Hoſpitalianam :* ubi oppido patet, quod ſi punctum deſcribens M ſumatur in peripheria circuli genitoris T O, ſatisfaciet cyclois primo; ſi extra peripheriam, ſecundo; ſi intra eandem, tertio caſui: hinc præcipuæ proprietates in præcedenti ſolutione recenſitæ, quæ alias abſque prolixiori calculo non inveniuntur, ex ſola generatione cycloidis ſponte fluunt.

TAB. VII. N°. XXIII. *Fig.* 1.

TAB. VII. N°. XXIII. *Fig.* 2.

Placet nunc adnectere ſolutionem ejuſdem problematis, ſed generaliter propoſiti, nempe ſic: *Data in plano verticali curva quævis A B; quæritur in eodem plano altera curva L M, ita ut duo pondera data B, M, communi funiculo B C M, trochleam poſitione datam C ambienti, alligata, & curvis ubicunque impoſita, ſemper ſibi mutuo æquilibrentur; vel quod tantundem eſt, minima vi moveri poſſint.*

Difficilius primo intuitu videtur hoc problema, quam quod per communem Geometriam ſolvi poſſit; partim ex eo quod in ſpecialiſſimo caſu, cum ſc. curva data A B eſt peripheria circuli, ſolutio *Hoſpitaliana* involvit tangentium determinationem, partim etiam quod *celebris* ille, quiſquis ſit, *Analiſta Carteſianus*, poſt 27 inſtitutas analogias, labore calculandi omnino feſſus ab ulteriori diſquiſitione abſtinuit. Verum enim vero ſi rite tractetur, tanta cum ſimplicitate expeditur, ut ſatis mirari nequeam, *Geometram* iſtum, per vigeſimam ſeptimam analogiam nondum eo perveniſſe, quo tamen & quidem longe ulterius per unicam ſolam pervenitur, ceu ex jam dicendis patebit. Pro principio aſſumo notiſſimum illud Axioma ſtaticum: *In omni motu gravium æquilibratorum, commune centrum gravitatis neque aſcendit, neque deſcendit; ſed perpetuo manet in eadem altitudine horizontali.* Ut hoc ad præſens negotium applicetur, curva quæſita debet habere proprietatem talem, ut duo pondera M, B habeant, in quovis ſitu, ſemper eundem horizontalem axem æquilibrii. Per ductam itaque verticalem C Q agatur utcunque horizontalis K I E (quæ conſtantem axem æquilibrii denotet); fiatque ut pondus datum M ad pondus datum B, ita diſtantia breviſſima I H (quæ data eſt ob curvam datam A B) ad quartam I P, quæ ad partem contrariam ſumenda eſt; & ducenda parallela P M, quæ ſecabit arculum, centro C & radio C M (differentia funiculi totius & partis datæ C B) deſcriptum, in puncto M, quod erit ad curvam optatam L M. Hoc enim modo fit, ut centrum gravitatis commune ponderum B, M ſemper exiſtat in linea horizontali K I E, quæ cum ſit ad arbitrium ducta,

ſta, ita duci poteſt, ut curva optata tranſeat per quodlibet punctum datum.

Ad uberiorem confirmationem ſumatur pro curva data AB, circuli peripheria, quæraturque ex generali noſtra ſolutione æquatio analytica pro curva LM; quæ reperietur quam apprime conſpirare illi quam *Illuſtris Marchio* exhibuit; quæ tamen viis & principiis diverſiſſimis inventa ſunt, adeo ut vel maxime exinde conſpicere liceat, *Naturam*, ceu immutabilium ſuarum legum memorem, ſibi nunquam non conſtare.

Quod ſi principium ſupra allatum ad alia hujus modi problemata applicare lubeat, videbitur fœcundiſſimum illud eſſe; ut ſi ex. gr. funiculus non unam ſolam, ſed plures alias trochleas ambit, (quod in praxi ita fieri nonnunquam neceſſitas urget, quando nempe ob certas circumſtantias loci, vel alia impedimenta, curva æquilibrationis ponti ſublicio non immediate adaptanda, ubi obſtaculo foret, ſed ab eodem longius removenda & in locum commodiorem quemcunque libuerit transferenda eſt,) vel ſi plures dantur curvæ, in quibus plura pondera data, uni vel pluribus funiculis in diverſis diſtantiis alligata, per unum vel plura ſacomata ſint æquilibranda; vel ſi loco trochlearum ſunt vectes in quorum extremitatibus funiculi cum ponderibus, curvis datis incumbentibus, adnectuntur: vel qualiſcunque demum machinatio & quantumcunque compoſita ab Architecto excogitetur, curvæ æquilibrationis ſemper pari facilitate & quaſi ludendo conſtruuntur, cum alias in prolixitatem calculi inſuperabilem incideremus, ſi ad imitationem ſolutionis præcedentis, auferendo quod mechanicum eſt, haſce quæſtiones in pure geometricas mutare vellemus.

Hic itaque penitioris Geometriæ peritiſſimum LEIBNITIUM conſultum velim, an non certæ regulæ inveniri poſſint pro illis problematis, quæ in abſtracto propoſita communem Geometriam quidem reſpuunt, in concreto autem eandem admittunt; ita ut non opus ſit recurrere ad differentialium integraliumque calculum, cujus evidens exemplum habemus in *curvis* noſtris *æquilibrationis*: quod quodam modo confirmare poteſt, quod

Frater

Frater in *nupero Actorum Octobr.* aſſerit, problema nimirum implicans curvam quæ neceſſario ſit algebraica, etiam neceſſario reſolvi poſſe per vulgares algebræ regulas. Cui generaliter dicto ego non aſſentior: Si enim, verbi gr. alicujus figuræ quadratura, vel ex tangentium ſubtangentiumve conditione aliqua curva (quam licet neceſſario algebraicam eſſe aliunde conſtaret) determinanda eſſet, id aliam per methodum, quam differentialium, huicve analogam, effici poſſe vix putem. Equidem acutiſſimus CRAIGIUS, in novi ſui Tractatus *De quadraturis* * anno 1693 impreſſi prima parte, proponit methodum pro dimetiendis figuris algebraicis, quarum quadratices ſunt algebraicæ; quæ methodus, beneficio æquationum, quas *eminenter continentes* appellat, per communem Geometriam, nempe per comparationem terminorum, more *Carteſiano* inſtitutam, peragitur. Tantum autem abeſt, ut illa ſit generalis, ut infinita dentur exempla, ad quæ ſe non extendit. Ratio eſt, quia tacite ſupponit, quamlibet quantitatem differentialem, affectam quantitate quadam irrationali, habere (ſi quod habeat) pro integrali, vel ſummatorio, quantitatem aliam, quæ neceſſario affecta ſit eadem quantitate irrationali; ex quo ingenioſus *Author* in ſubſequentibus figurarum quadrabilitatis conditiones deducere vult. In eundem adeo impingit errorem, quem in alio † redarguit, *quod* (ut propriis verbis utar) *ex ſua methodo figuram aliquam, quadraturam indefinitam recuſare concluſit, priuſquam demonſtraſſet methodum ſuam ad omnes figuras indefinite quadrabiles extendere.*

Subtilem etiam, ſed pariter non generalem modum, in *poſteriori Parte* ſui *Tractatus* tradit inveſtigandi quadratrices tranſcendentes, vel quod eodem recidit, reducendi quadraturas ſpatiorum ad extenſiones curvarum: ſed quam ingens ſupputandi labor

* *Tractatus Mathematicus, de Figurarum curvilinearum quadraturis, & locis geometricis. Autore* JOH. CRAIG. 4°. Londini 1693.

† Dn. DE TSCHIRNHAUSEN. Sunt autem hic allegata verba deſumpta ex ejuſdem JOH. CRAIGE *methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehenſarum quadraturas determinandi*, 4°. Lond. 1685. pag. 38.

labor requiratur, etiam pro leviſſimis exemplis, qualia ſunt circuli & hyperbolæ, ex ipſo *Authoris* calculo, quem tamen non integrum appoſuit, videre licet; adeo ut hæc methodus in ſpeculatione quidem pereximia, ſed ad praxin parum ſit idonea. Ob hanc rationem opinor *Authorem*, poſt adductum quartum exemplum quadrandæ figuræ cujus natura $z = \surd(y^4 + a^4)$ ſubſtitiſſe, quia haud dubie jam præviderat, quod in exemplis paulo difficilioribus calculus foret immenſæ prolixitatis, cui abſolvendo non una, vel altera tantum, hora ſufficeret,

Commodiorem ego puto viam, qua uſus ſum in conſtructione curvæ paracentricæ, per extenſionem curvæ algebraicæ; quæ via conſiſtit in diviſione quadrati differentialis propoſitæ in duo alia quadrata, quorum latera ſint integrabilia. * Sic abſque omni calculo ſtatim apparet, quadraturam dictæ figuræ $z = \surd(y^4 + a^4)$, haberi per extenſionem curvæ parabolæ cubicalis primæ: quadratum enim elementi vel differentialis hujus figuræ $y^4 dy^2 + a^4 dy^2$ dividitur in hæc duo quadrata $y^4 dy^2$ & $a^4 dy^2$, quorum latera $yydy$ & $aady$ ſunt integrabilia: conſtructa ergo curva, cujus coordinatæ ſint ut integrabilia horum laterum, nempe ut $\frac{1}{3} y^3$, & aay (quæ utique eſt parabola cubicalis prima) & multiplicata per conſtantem, dimetietur figuram propoſitam $z = \surd(y^4 + a^4)$.

Scio quidem Celeberrimum *Dn.* LEIBNITIUM in ſua ſolutione Iſochronæ paracentricæ (*Act. m. Aug.* 1694. *pag.* 370.) eandem hanc quadraturam reducere ad extenſionem curvæ hyperbolicæ, cum ita loquitur: *Sane ſi quadranda eſſet figura ordinatarum* $\surd(a^4 + x^4)$, *per extenſionem curvæ hyperbolicæ res præſtaretur.* Verum Vir Celeb. demonſtrationem hujus publicare haud gravabitur: oſtenderetur enim curvas parabolæ cubicalis primæ, & hyperbolæ, ab invicem dependere, & unam alteram menſurare; id quod nobile prorſus, & omnino novum, eſſet inventum in Geometria.

Quantum ad ipſam paracentricæ ſolutionem *Leibnitianam*, multum gaudeo quod tam apte cum mea conveniat. Video

* Supra N°. XIX. *pag.* 121.

exinde Celeberrimum ejus *Authorem*, uno tempore, ſimiles fere meis, hac ſuper re, habuiſſe cogitationes. Infinitas eſſe paracentricas reſpectu unius puncti, vel centri, poſt deſcenſum ex data altitudine, neminem vel tantillum in calculo differentialium verſatum latere poteſt; ſi modo conſideret (quod in *Actis* jam paſſim innui) quamlibet quantitatem differentialem infinita habere integralia, ſed non reciproce: quod tamen unicæ mentionem fecerim, id ideo factum, quia hæc omnium ſimpliciſſima eſt, quam in praxi præ cæteris adhiberi præſtat. Siquidem omnes iſochronarum paracentricarum ſpecies ſub una generali ſolutione comprehenduntur; facile ex conſtructione mea demonſtrare poſſem, nullas dari ſub forma ſpiralium, quas *Nob. Dn.* HUGENIUS (*Act. Menſ. Septembr.* 1694) determinandas propoſuit.

TAB. VII. N°. XXIII *Fig.* 3.

Coronidis loco adjiciam ſolutionem problematis a *Fratre* propoſiti in nupero *Actorum Octobri.* * Quia curvæ H, I datæ ſunt, erunt earum curvedines datæ: ſunto ergo radius circuli oſculantis in $H = r$, radius circuli oſculantis in $I = s$, $HK = m$, $IK = n$, $GH = p$, $GI = q$, $HI\ [q - p] = t$. Abſcindatur ex GH, ſi opus producta, quædam HL, quæ ſit $= rspm^3 : (rqn^3 - spm^3)$, dico ductam lineam LK contingere curvam K in eodem puncto K. *Quod erat faciendum.*

* *His verbis*; Datis tribus Curvis algebraicis G, H, I, & quarta K, quam formant interſectiones rectarum HK, IK, tangentium curvas H & I in iiſdem punctis, in quibus tangens curvæ G ipſas ſecat; quærere tangentem quartæ K. *Act. Erudit.* 1694. Octob p. 394.

G. G. L.

N°. XXIV.

G. G. L. * NOTATIUNCULA

Ad conſtructiones Lineæ in qua Sacoma, æquilibrium cum pondere moto faciens, incedere debet, Februario *proximo datas. Et quædam de Quadraturis.*

JUcundiſſimum fuit ſolutionem *Dn. Marchionis* HOSPITALII egregiam problematis elegantis & utilis, tum Additiones ingenioſiſſimi *Dn. Johannis* BERNOULLII videre; quibus ſolutionem univerſaliorem & conſtructionem faciliorem reddit, meritoque rem notatu dignam cenſet, quod idem hic, & per differentiales, & per methodum Geometriæ communis, obtinetur: Cujus rei complura exempla & mihi occurrerunt. Et ſane in concreto ſæpe oſtenduntur rerum origines connexioneſque, in abſtractis terminis non æque apparentes. Conſideratio autem centri gravitatis, jam ipſa per ſe, compendium differentialium, ſeu ſummationem involvit; unde mirum non eſt, ſi per eam differentiales reſummentur. Quod ut clarius appareat, oſtendam, quomodo breviſſima illa conſtructio, etiam ex differentialibus, ſtatim & recta via, ſine interventu centri gravitatis, naſcatur. Nempe ex natura æquilibrii, quod ſemper manere ſupponitur, patet debere pondus M ductum in elementum ipſius I P, æquari ponderi B ducto in elementum ipſius I H: ita enim non plus deſcendetur quam aſcendetur; ſeu erunt elementa deſcenſuum, vel aſcenſuum, reciproce ut pondera. Quia ergo M in diff. IP æquale B in diff. IH; erit ſummando M in I P æquale B in I H; ſeu M ad B, ut IH ad IP; prorſus ut *Bernoulliana* conſtructio habet. Si intelligatur ipſa trochlea C non fixa manere, ſed lineam, durante motu ponderum & ſacomatum, (nam viciſſim ſibi ſunt pondus, vel ſacoma) deſcribere, eadem tamen methodus locum habebit. Quemadmodum & in aliis ſimilibus. Pulcherrimum autem eſt, quod notat, lineam a *Dn. Marchione* HOSPITALIO præſcriptam ex genere Epicycloidum eſſe.

Acta Erudit. Lipſ. 1695. April. pag. 184.

TAB. VII. N°. XXIII. *Fig.* 2.

Quod vero obſervat ſummationem ordinatarum, quæ ſunt ut $\sqrt{(a^4 + x^4)}$ pendere ex dimenſione curvæ parabolæ cubicæ; etiam Dn. *Marchio* me monuerat. Viſus autem mihi ſum, cum iſta ſub manibus haberem, connexionem videre cum dimenſione curvæ hyperbolicæ; ſed talia nunc reſumere non licet, quæ aliquando curatius tractare ſpero.

S 2 De

* *Gothofredi Gulielmi* LEIBNITII.

De cætero video doctiſſimum Dn. *Joh.* BERNOULLIUM non probare, quod Dn. CRAIGIUS tacite ſuppoſuit in Tractatu *de Quadraturis*, quantitatem irrationalem habere ſummatricem etiam irrationalem ſimilem. Et fateor hoc ſine demonſtratione illic fuiſſe poſitum; ſed quoniam mihi methodo ſimili nonnihil, univerſaliore tamen, ni fallor, & breviore, talia tractanti, *principium* innotuit nondum, quod ſciam, in hoc argumento conſideratum, unde demonſtratio ad rem pertinens haberi poteſt; proponere hoc loco placet. Dico igitur terminum ſummandum & terminum ſummatorem, vel, quod eodem redit, differentiam & terminum differentiandum (*Dni.* BERNOULLII integralem vocant) habere eaſdem ambiguitates, ſeu radicum varietates, cum quævis radix termini det propriam ſeriem, ſuas quoque proprias differentias habentem. Et proinde ſi ſit y, differentia vel ſummandus, & v ſumma vel differentiandus; ſeu, ſi ſit $S.ydx = v$; ſequitur in æquatione, quæ exprimit relationem inter y & x, & in æquatione, quæ exprimit eam inter v & x, ipſas y & v aſcendere ad eaſdem dimenſiones. Sequitur etiam irrationalitates ſe ſimili modo habere; quippe quibus itidem varietas radicum indicatur. Certe *Cl.* CRAIGIUS non pauca attulit egregia; quæ faciunt, ut incrementa adhuc majora his ſcientiis ab eo ſperem. Multumque ejus ingenuitati debeo, quod meis meditationibus aliquid debere voluit. Si conſilium ejus ſciviſſem; potuiſſem fortaſſe aliqua ad methodi incrementum ſuppeditare. Utinam tantum illis abſtinuiſſet, quæ acerbe in Virum excellentis ingenii & doctrinæ dixit; cui, quæ ipſe innuit, imputare mihi nunquam in mentem venit.

N°. XXV.

EXCERPTA EX LITTERIS

Illuſtris D. Marchionis HOSPITALII *ad Joh.* BERNOULLI, *addenda ejus ſolutioni problematis æquilibrii in Actis Eruditorum Lipſienſibus An.* 1695. *pag.* 56 *inſerta.*

Acta Erud. Suppl. Tom. II. Sect. VI. pag. 289.

VIXDUM accepi poſtremas tuas, in quibus ſignificas eſſe tibi methodum conſtruendi generaliter per communem Geometriam *Problema æquilibrii*, cum & ipſe e veſtigio hujuſmodi conſtructionem eruerem; quam mitto, ut videas quouſque tuæ conſpiret, eamque Actis Lipſienſibus inſeri cures.

Eſto

Eſto in plano verticali data curva quæcunque V B H ; *quæritur altera* C M N, *ita ut duo pondera data* B, M, *alligata communi filo* B C M *ambienti trochleam fixam* C, *curvis ubivis impoſita æquilibrentur.* TAB. VII. N°. XXV. *Fig.* 1.

Conſtr. Centro C, & radio C Q æquali filo B C M, deſcripto circulo Q D, ac per quodvis curvæ punctum B ductis applicata B E, radioque C B D; fiat, ut pondus M ad pondus B, ita abſciſſa A E ad abſciſſam C P, & agatur P M parallela ipſi B E: quo facto, deſcriptus centro C, & intervallo B D arcus circuli ſecabit P M in puncto M, quod erit in curva quæſita.

Demonſtr. Concipiantur pondera B, M per minimum moveri, ita ut filum ſumat ſitum *b* C *m*, & ductis applicatis B E, *b e*, & M P, *m p*, deſcribantur centro C arculi minimi B T, M O; & agantur axi parallelæ rectæ minimæ B S, M R, curvæque perpendicularis B K. Ex conſtructione, pondus M eſt ad pondus B ut A E ad C P, ut A *e* ad C *p*, ut A *e* — A E, ſeu E *e*, aut B S, ad C *p* — C P, ſeu P *p*, aut M R; ideoque B × B S = M × M R : quoniam vero B C M = *b* C *m*, ſequitur T *b* = O *m* & proinde B × B S : T *b* = M × M R : O *m*. Jam ab angulis C B T, K B b rectis, ablato eodem C B *b*, relinquuntur æquales T B *b*, C B K. Ita etiam angulus S *b* B vel E B *b* = C K B, quia uterque cum angulo E B K conſtituit rectum. Ergo T *b* eſt ad B S, ut ſinus anguli C B K ad ſinum anguli C K B: unde, ex ſtaticis regulis, colligitur B × B S : T *b* exprimere conatum, quo pondus B agit in pondus M, & viciſſim demonſtrabitur M × M R : O *m* eſſe conatum, quo hoc agit in illud. Cumque hi conatus ſint æquales, æquilibrium fiet. *Q. E. D.*

Exinde ſatis liquet, punctum fixum trochleæ C cadere poſſe & ſupra, & infra, & in ipſum verticem curvæ V B H; adeoque originem abſciſſarum A E ad arbitrium infra horizontem A H eſſe ſumendum.

Coroll. Exiſtente curva V B H geometrica, erit & C M N geometrica.

JOH. BERNOULLI ADDITIO.

HAC occaſione proponam Geometris aliud jucundum Problema, curvæ, quæ cum Iſochrona tam *Hugeniana*, quam *Leibnitiana*, non parum affinitatis habet. Quæritur nimirum in plano verticali curva A B C, in qua corpus B, propria gravitate & libere deſcendens, premat curvam ſemper æquali vi centrifuga; vel, quod eodem redit, ut curvæ D E, ex cujus evolutione progignitur quæſita A B C, circumplicatum filum

B E, ſeſe evolvendo, a pondere appenſo B æquales vires tendentes patiatur, adeoque quovis momento eadem fili firmitas requiratur.

Problemati huic ſatisfaciunt plures variorum graduum curvæ.

NB. *Ejus Problematis ſolutionem ab* HOSPITALIO *elaboratam videſis in* Comment. Acad. Reg. Scient. Pariſienſis *ad Annum* 1700. *pag.* 9. *Edit. Pariſ.*, *pag.* 11. *Edit. Amſtel.*

N°. XXVI.

JOANNIS BERNOULLI

Meditatio de Dimenſione linearum curvarum per circulares.

Acta Erud. Lipſ. 1695. Auguſt. pag. 374.

ELEGANS eſt non minus quam ſubtile inventum, quod Nobiliſſimus HUGENIUS in pererudito ſuo Tractatu *De Horolog. Oſcillat.* pag. 76 publicavit; ubi modum tradit, *Dato ſphæroide lato, conſtruendi conoidem hyperbolicum; vel contra, dato conoide hyperbolico, conſtruendi ſphæroidem latum ejus modi, ut utriuſque ſimul ſuperficiei exhibeatur circulus æqualis:* poſtquam in præcedentibus oſtendiſſet, neutri ſeparatæ dari poſſe æqualem circulum, niſi poſita hyperbolæ quadratura. Optandum foret, ut Nob. Author inventum ſuum reddidiſſet univerſale; hoc eſt, methodum exhibuiſſet, data ſuperficie convexa quavis, conſtruendi aliam, quæ cum data æquetur ſpatio circulari. Ad cujus imitationem exhibituri ſumus modum generalem *ad datam curvam quamcunque e veſtigio aliam deſcribendi, quarum ſumma, vel differentia, æqualis ſit arcui circulari:* præliminata, pro hoc, inſigni & utiliſſima evolutarum proprietate.

TAB. VII. N°. XXVI. Eſto curva quæcunque ABC, ſuper qua incedere intelligatur recta rigida, vel regula DAE, ita ut partes regulæ partibus curvæ ſucceſſive applicentur: Dico duas curvas DLG, EMF, extremitatibus D, E, vel quibusvis aliis regulæ punctis

tis oppoſitis, hac rotatione deſcriptas, & ſimul ſumtas, fore æquales arcui circulari EO, radium habenti DE, & angulum ſubtendenti EDO æqualem angulo EPF, quem duæ in extremitatibus A & C tangentes conſtituunt.

DEM. Habeat enim regula ſitum quemcunque LBM, huicque proximum *l*B *m*; & ductæ concipiantur DN, D*n* parallelæ ipſi LM, L*m* : fient triangula LB*l*, MB*m*, & ND*n* ſimilia, ob LM, *lm* normales ad curvas DLG, EMF, & ob angulos LB*l*, MB*m*, ND*n*, æquales. Ideoque BL:BM = L*l*: M*m*; *componendo* LM : BL = L*l*+ M*m*: L*l*, & *permutando* LM: L*l*+M*m* = BL : L*l*; quoniam autem LM, DN ſunt æquales (*per hyp.*) erit etiam L*l*+M*m* = N*n*. Ergo omnes L*l* & omnes M*m*, id eſt curvæ DLG & EMF, una ſumtæ, æquantur omnibus N*n*, id eſt arcui circulari ENO. Q. E. D.

Si alterutrum punctum deſcribens, ut E, ſumatur inter D & A; pari ratione demonſtrabimus, differentiam curvarum DLG & EMF eſſe æqualem arcui ENO.

Hinc oppido liquet propoſitum noſtrum, quo pacto nempe, ad datam curvam, promtiſſime infinitas alias conſtruere liceat, quarum quælibet, cum data, reducibilis ſit ad arcum circuli. Ut, ſi DLG ſit curva, vel portio curvæ data, in punctis ejus L ducendæ erunt rectæ perpendiculares ad curvam, & inter ſe æquales, LM; formabunt earum extremitates M curvam quæſitam EMF. Quam etiam motu continuo, ope fili, deſcribere poterimus, ſi nimirum curvæ datæ DLG evolutam ABC inverſe involvamus. Sic in univerſum verum eſt, duas quaſlibet curvas, una evolutione condeſcriptas, ſi concavitates obverſas habeant, facere ſummam; ſi vero concavitas unius convexitati alterius ſit obverſa, facere differentiam arcui æqualem.

Ex his patere arbitror, utrum curva quædam propoſita connexionem habeat cum dimenſione arcus circularis. Omnis enim curva, cujus evoluta ABC duas habet partes BA, BC ſimiles & æquales, erit comparabilis cum arcu; quia, eo

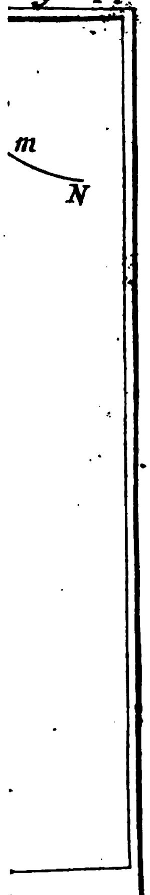
eo in caſu, ſi ſit CF=AD, curva FME congruit cum DLG; & ſic ipſa DLG efficiet dimidium arcus ENO. Et contra, omnis curva genita ex evolutione curvæ duarum partium ſimilium & æqualium, eſt reducibilis ad circularem. Animadverſione etiam dignum inde fluit, quod, ſi ex infinitis evolutione condeſcriptis unica reperiatur rectificabilis, vel abſolute, vel ſuppoſita extenſione circularis; cæteræ omnes pariter per arcum circuli menſurabuntur. Plura alia, eaque non contemnenda, ex dictis facile deducuntur; quæ generali dimenſioni curvarum indagandæ non mediocre lumen afferre poterunt.

Quod Celeberrimus LEIBNITIUS in nupero *Actorum Martio* * animadvertit, quantitatem irrationalem habere ſummatricem etiam irrationalem ſimilem; plane nihil derogat objectioni meæ acutiſſimo CRAIGIO factæ. Sum enim & ego in eadem opinione cum D. LEIBNITIO; quod terminus ſummandus, & ſummator, iiſdem lateribus, ſeu radicum ſignis, conſtare debeant. Sed ex hoc non ſequitur, etiam ipſas quantitates lateribus involutas eſſe eaſdem; & hoc eſt quod Dn. CRAIGIUS ſupponere videtur, & contra quod objectio mea dirigitur. Complura in hanc rem exempla habentur, in quibus quantitates, licet ſummabiles, methodo tamen *Craigiana* ſummari non poſſunt; etiamſi quantitas y, more Authoris, quantum fieri poteſt, liberetur a vinculo, ſeu ſigno radicali. Ratio hujus eſt, quod interdum, præter hanc liberationem, etiam ipſa quantitas poſt ſignum radicale dividenda ſit per aliam quantitatem: alias methodus iſta non ſuccedet. Verum de hac cautela in toto CRAIGII Tractatu altum ubique ſilentium.

* Supra N°. XXIV.

JOHAN-

pag. 144.



N.XXVI.



N°. XXVII.

JOHANNIS BERNOULLI

Demonſtratio Analytica & Synthetica ſuæ Conſtructionis Curvæ Beaunianæ, *in* Actis Erud. A. 1693. *pag.* 234. *exhibita.* *

QUos diu ante deſideraveram, *D. Bernhardi* NIEUWENTIIT bini tractatus de Analyſi infinitorum nuper mihi Amſtelodamo tranſeunti in manus inciderunt; quorum alter, quem *Conſiderationes circa calculi differentialis uſum* inſcribit, in eum tantum finem videtur factus, ut Clariſſimus Auctor difficultates, quas, in inſolita noſtra methodo, multis in locis ſibi remoram injicere queritur, adimendas nobis proponeret. Eas revera tanti momenti non puto, ut vel minimum illius præſtantiæ derogare, vel quempiam remorari queant. Quemadmodum enim, ex ſola non ſatis clare intellecta methodo ſuboriuntur; ſic nullus dubito, quin debita mentis attentione adhibita ſponte diſpareant. Ideoque relictis illis (ad quas quidem in univerſum celeberrimus LEIBNITIUS ſolide reſpondit in ultimo *Actor. Julio*) illud duntaxat tangam, quod me ſpeciatim concernit. *Acta Erud. Lipſ. 1696. Febr. pag. 82.*

Pag. 41. ſuarum *Conſiderationum*, ad diverſitatem oſtendendam ſuam inter & meam methodum, quaſi per digreſſionem, & nulla neceſſitate urgente, ſibi impugnandam ſuſcipit meam in *Actis* Anno 1693, menſe *Maio* publicatam conſtructionem problematis CARTESIO olim propoſiti. Quod (quamvis optaſſem, ut exhibuiſſet ſolutionem meliorem, quo luculentius conſtitiſſet, an eo uſque ſua ſeſe extenderet methodus, noſtræque proin anteferenda, & ab ea diverſa eſſet) adeo non ægre fero, præſertim cum id ſumma modeſtia faciat, ut potius gaudeam, mihi occaſionem ſuppeditari ſatisfaciendi ejus deſiderio, quo hanc ſui ſcrupuli enodationem

* Supra N°. XL

efflagitare videtur. Laudanda enim eſt eorum ingenuitas, qui quod ſibi obſtaculo eſt candide fatentur, ut, illo ſublato, eo tutius progredi poſſint; non vero tot alii imitandi ſunt, qui malunt ignorare præclariſſima quæque, quam edoceri ab aliquo, quem vel ætate, vel dignitate, vel imaginaria quadam nominis celebritate, ſe inferiorem putant, & proin ipſam, quam nequeunt aſſequi, artem miſere traducunt. Eadem hæc ſors inevitabilis fuit novæ noſtræ Analyſi, quæ, ut ſui ignorantes ubique, ita etiam ſui oſores, quorum quoſdam ipſe novi, reperit. Quod præſtantiſſimus NIEUWENTIIT æquius animatus ſit, & nobis & arti noſtræ gratulor: ſpero enim illum, ubi celeberrimi LEIBNITII reſponſiones, & meam difficultatis ſuæ illuſtrationem mature perpenderit, ultro noſtram amplexurum methodum; ita ut forte brevi notabile incrementum hiſce ſtudiis acceſſurum ſit; præprimis ſi, junctis viribus, eo adnitamur.

Sed ne longius a ſcopo recedam; tantum abeſt, ut calculus ipſe, quem inſtituit, meam deſtruat conſtructionem, ut illam potius mirifice confirmet: cauſa autem erroris in hoc præcipue conſiſtit, quod, falſa hypotheſi nixus, credidit æquales differentiales habere etiam æquales integrales, vel ſummas; id quod abſolute dictum non ita ſe habet. Una enim eademque quantitas differentialis, ut jam ſæpius innui, infinitas habet integrales; veluti integralis ipſius dx non ſolum eſt x, ſed etiam poteſt eſſe x plus, vel minus, quavis alia quantitate data; idem quoque valet in omnibus aliis. Hinc, ſi reſolvendo aliquod problema pervenitur ad æquationem differentialem, infinitæ ſemper diverſæ, niſi omnes coincidant, ſolutiones ſatisfacient; quod Dn. LEIBNITIUS in paracentrica egregie obſervavit.

TAB. IV. N°. XI. & XXVII. *Fig.* 1. Nunc ut applicatio hujus eo melius perſpiciatur: Sit AIP curva, eo modo conſtructa, quo in *Actis* docui; ita nempe ut ad aſymptoton AB perpendicularem ad axem AK deſcripta Logarithmica DC, cujus ſubtangens AF ſit æqualis datæ r, & abſciſſa AK, vel BI, ſit æqualis portioni CH ipſi

AB

AB parallelæ & inter C & tangentem DF interceptæ. Evin) cam ex calculo *Nieuwventiitiano* (quem hîc paucis repetam - hanc noſtram curvam eſſe eam ipſam quæ quæritur; cujus nimirùm applicata IK ad ſubtangentem KM rationem habet, ut data r ad portionem applicatæ IL, reſectam a recta AL faciente angulum ſemirectum cum axe.

Vocentur (ductis lineis, ut apparent in Schemate) KI, y; KM, t; CB, z; AD, k; AK, x; IL, $y - x$; erunt, ex mea conſtructione, AF $=$ QB $= r$, & CH $=$ BI $=$ AK $= x$, unde & HG $= y - x$, & DG $= k - z$: tum ſit PO $=$ NB $=$ RS $= dy$, IO $= dx$, CS $= dz$, Hiſce poſitis, ex problematis conditione $y : t = r : y - x = dy : dx$, elicitur $xdy = ydy - rdx$; adeoque ſumtis integralibus, *omnia* $xdy = \frac{1}{2}yy - rx =$ trilineo BIA. Sed ex conſtructione problematis $k : r = k - z : y - x$. *Unde* $ky - kx = kr - rz$, & ductis omnibus in dy, fiet $ydy - rdy + rzdy : k = xdy$; ac tandem, ex natura Logarithmicæ, facto $rdz = - zdy$ (hic ſumitur ſignum —, quia creſcente z decreſcit y) erit $ydy - rdy - rrdz : k = xdy$.

Hùc uſque optime ratiocinatur Clariſſimus NIEUWENTIIT; ſed conſequentia, quam inde petit, claudicat; concludit enim quantitatem $ydy - rdy - rrdz : k$ unicam habere quantitatem integralem $\frac{1}{2}yy - ry - rrz : k$, quando facit $\frac{1}{2}yy - ry - rrz : k = omn : xdy = \frac{1}{2}yy - rx$. Ego autem dico, quod hoc loco $\frac{1}{2}yy - ry - rrz : k$ non poteſt eſſe $= omn : xdy$. Evaneſcente enim trilineo BIA, ſeu $omn : xdy$, quantitas $\frac{1}{2}yy - ry - rrz : k$ non evaneſcit, ſed fit $= - rr$. Quod arguit, quod hoc ipſum, quod reſtat, $- rr$ ſub ſigno contrario addendum ſit, ut habeatur vera quantitas integralis hæc $\frac{1}{2}yy - ry - rrz : k + rr = omn : xdy$. Sed regeret forſan, qui fit, ut priori integratione $omn : xdy = \frac{1}{2}yy - rx$ non pariter aliqua quantitas data addenda vel demenda ſit? Hoc, inquam, fit, quia evaneſcente trilineo BIA, & ipſa quantitas $\frac{1}{2}yy - rx$ jam per ſe evaneſcit, abſque ut quadam data vel diminuatur, vel augeatur. Hoc ſi animadvertiſſet, non ſolum in hoc, ſed

[illegible] aliis locis, & præcipuis ſuis difficultatibus ſe facile [illegible], & vidiſſet noſtram conſtructionem ad nihil plane [illegible] quod a veritate ſit alienum: Si enim æquetur $\frac{1}{2}yy$ [illegible] $rz : k + rr$ cum ſuperius inventa $\frac{1}{2}yy - rx$, & dein [illegible] membra; prodibit $ky - kx = kr - rz$, quæ om[illegible]n eſt æquatio, quam ex conſtructione problematis [illegible]go &c.

[illegible] anſam habeat, abſurditatem quam exinde emergen[illegible]dit, ſi non publice revocandi, ſaltem probitatem [illegible]thodi tacite agnoſcendi; ſubnectam hic Demonſtra[illegible]ntheticam, quam ab illis etiam, qui vix communis [illegible] limina ingreſſi, nedum qui penitioris noſtræ princi[illegible] degustarunt, intelligi poſſe puto.

[illegible] omnibus lineis, quas jubet in figura ſua huc tranſla[illegible] inſuper HE parallela axi DAK. Jam CG = IK, [illegible] CH = (*per conſtr.*) BI = AK = (*per hyp.*) KL, [illegible]ua HG, vel EA, = IL. Quoniam autem, *per* [illegible] NP = RX, & BI = CH; erit NP — BI, ſeu [illegible] RX — CH, ſeu RS — XV; ideoque PO : IO [illegible] RS — XV = QB (ex proprietate Logar. AF) : [illegible] E (EA, ſeu IL). Ergo PO : IO (= IK : KM) [illegible]ata *r*) : IL. Q. E. D.

[illegible] XVIII.

N°. XXVIII.

NOVA ET SINGULARIS GEOMETRIÆ PROMOTIO.

Circa dimenſionem quantitatum curvarum, *per* D. T. *

CUM variæ in Matheſi dentur viæ ad eaſdem veritates invenien- das ducentes; plurimum in eo ponendum eſt ſtudii, ſimpliciſſima ut inveſtigetur. Quamvis enim hoc ipſum non ſit apprime neceſſarium in omnibus difficultatibus particularibus; maxime tamen requiritur in principiis fundamentiſque ponendis, quæ ita ſunt generalia, ut tota iiſdem Matheſis innitatur; ad quæ pertinet *Geneſis omnium curvarum*. Quapropter, poſtquam harum omnium facillimam deſcriptionem *per focos* reperi! ſtatim eandem cum publico communicavi, in *Medicina mentis* †; oſtendens, quam latum hæc campum nobis aperiat, infinitorumque novorum, ſingularium, & facillimo negotio decerpendorum inventorum feracem; ut augmentum veritatis, quod non unius eſt hominis, conjunctis viribus ab eruditis Viris eo melius promoveretur. Neque parvam mihi attulerunt lætitiam ea, quæ Dominus LEIBNITIUS, & doctiſſimorum nobile par fratrum BERNOULLIORUM jam præſtiterunt, *Actiſque* inſeruerunt *Eruditorum*. Sed cum hæc curvarum geneſis per focos nimiam præ ſe ferat ſimplicitatem, tantique momenti non videatur, ut ex ea tanta tamque præclara & utilia poſſint derivari; non ipſe ſolum alia nova inventa in *Actis Eruditorum* exhibui: ſed in poſteriori quoque *Medicinæ mentis* editione, alia quædam corollaria non vulgaria adjeci, ut alios quoque ad hanc rem penitius penſitandam excitarem. Nota mihi quidem plura, elegantia præſtantiaque, ſunt conſectaria, quorum hactenus nullam, niſi privatim apud Viros maximi ingenii, feci mentionem; arbitratus illa quondam, ob novitatem uſumque ſingularem, fore gratiora, cum publici juris ea faciendi mihi dabitur occaſio. Quoniam vero, an brevi hoc futurum ſit, cum eo non vivam in otio, quod hæc ſtudia vel maxime requirunt, neſcio; nonnulla ex his in publicum producere conſtituit, ejus quidem momenti, ut non diſplicitura credam Geometris: eo fine ut, vel hoc ipſo, aug-

Acta Erudit. Lipſ. 1695. Nov. pag. 489.

* DE TSCHIRNHAUSEN.

† *Medicina mentis & Corporis.* Lipſiæ. 1695. 4°.

mentum veritatis, ſin minus per me ipſum, per alios tamen, qui magis abundant otio, promoveatur.

I. Ex hac ergo curvarum geneſi per focos intellexi, præter unicam & ſimpliciſſimam *Hugenianam* evolutionem, dari innumeras alias, ita ut quælibet curva infinitis poſſit modis evolvi, ſequanturque hinc dimenſiones curvarum infinitis modis, ut alio tempore oſtendi. Perſpexi etiam, ipſam ſpatiorum curvilineorum dimenſionem generaliſſime hinc derivandam, & ea quidem ratione, quæ admodum ſimplex eſt, & in qua ſingularia hæc occurrunt. 1°. Uti notum pervulgatumque eſt, ſpatiorum circularium dimenſiones abſolvi ductu lineæ cujuſdam rectæ in arcum circuli: ita univerſaliter hoc ipſum omnibus competit *ſpatiis curvilineis*, ut ſcilicet ſint *æqualia producto alicujus rectæ in arcum curvæ alicujus*, occurruntque hic plurima circulari dimenſioni analoga. 2° *Curvæ, quarum ope reliquarum curvarum metior ſpatia*, quæque primæ quaſi curvæ exiſtunt, & præcipue ſunt conſiderandæ, proprietates habent valde notabiles; & in his, quod multis erit inexpectatum, *curvæ quoque ſunt mechanicæ*, quas CARTESIUS ex Geometria perperam, ut in *Medicina mentis* clare probavi, eliminavit, quarum proinde uſus hinc redditur in Geometria manifeſtior. 3°. *Curvæ illæ*, per quas menſurantur reliqua ſpatia, *in lineas rectas abeunt, cum ſpatium aliquod abſolute eſt quadrabile*. Unde facile ex ipſa geneſi dijudicari poteſt, utrum aliquod ſpatium quadrabile ſit, nec ne. Derivatur quoque inde, figuras clauſas non admittere quadraturam, intellige ordinariam; id quod conſentit cum iis, quæ habet Dominus NEWTON *; neque difficulter cognoſci poteſt, quænam figuræ clauſæ ſint; cum alias multa poſſint earum figurarum afferri exempla, quæ videntur quidem, nullatenus tamen ſunt clauſæ.

TAB. VII. N°. XXVIII. *Fig.* 1. Ut autem mens mea eò melius poſſit intelligi, exemplo, quod dictum eſt illuſtrabo. Sit ellipſis AFGE, ſumtoque radio, æquali ſemidiametro minori, deſcribatur ex centro C circumferentia BFD, tandemque pro lubitu ducatur ex C recta CG, & HG parallela AE; dico rectangulum ex recta AE in arcum circularem HD eſſe ſemper quadruplum ſectoris elliptici CGE; ac proinde hoc modo facile *ſpatium ellipticum in æquales partes ex puncto* C *dividi poteſt*. Idem obtinet in parabola & hyperbola, ſi his omnia, ut decet, adplicentur; ea tamen cum differentia, ut quemadmodum in ellipſi, prout jam vidimus, dimetienda adhibetur arcus curvæ circularis HD, talis curvæ, ubi normalis ad tangentem eſt conſtans, ſeu datæ rectæ æqualis; ita in hyperbola qualibet menſuranda adhibendus ſit arcus curvæ, in qua tangens ipſa eſt conſtans, ſeu datæ rectæ æqualis, adeoque curvæ, quæ ex mente CARTESII eſt mechanica; in parabola vero alia curva, ubi normalis ad tangentem & ipſa

* *Phil. Naturalis Principia Mathem.* Lib. I. Sect. VI. *Lemm.* 28.

ipſa tangens ſunt æquales conſtanti quantitati, hoc eſt, linea recta, aſſumatur. Atque ſic, unico theoremate, omnium Sectionum conicarum, per rectangulum ex conſtante recta in aliam curvam, aut rectam, ducta, traditur dimenſio. Quæ quidem ſpero Geometris non minus grata futura, quam monitum HUGENII, quo ſimile quid in hyperbola æquilatera a ſe deprehenſum indicavit; cum hæc omnia, modis plane diverſis eruta, multoque ſint univerſaliora, nec ſolum omnibus hyperbolis, ſed infinitis aliis curvis applicari poſſint.

Quænam autem porro hinc concluſiones in curvis ſuperiorum graduum, quæ tres pluresve focos habent, conſequantur, periti harum rerum, inſigni cum voluptate, per ſe ipſos facile experientur. Poſſem enim plura huc elegantia & univerſalia theoremata adferre; ſed ne ipſis deſiderium minuam hæc ſuo marte indagandi, unico tantum exemplo aſſertioni meæ fidem faciam.

Sit curva F G, quæ deſcripta ſit ope *quatuor focorum* A, B, C, D; ſitque E centrum gravitatis quatuor punctorum A, B, C, D; dico, ſi ex quinque his punctis verſus duo puncta F & G, pro lubitu aſſumta in curva, ducantur rectæ, *ſpatia AFG, BFG, CFG, DFG, quadrupla eſſe ſemper ſpatii EFC; ſi autem quinque eſſent foci, fore quintupla; & ſic porro in infinitum.* Sed de his ſatis. TAB. VIII. N°. XXVIII. *Fig.* 2.

II. Notum eſt in circulo circumferentias eſſe inter ſe ut diametros, & ſpatia circularia ſimilia ut diametrorum quadrata; non autem pervulgatum eſt, quod animadverti, dari unicum tale theorema pro omnibus curvis ejuſdem ſpeciei; ex quo *v. g.* curvarum ellipticarum & hyperbolicarum ratio ad invicem innoteſcit, quæ nos hactenus latuit, poſſuntque infinita nova & ſingularia circa omnes curvas derivari. Id quod ſpecimine aliquo illuſtrabo.

Sint duæ parabolæ A E & BD, quarum focus C, ducaturque recta CDE. Dico *curvam parabolicam AE eſſe ad curvam parabolicam BD, ut minoris latus rectum ad majoris latus rectum.* Unde, ſi ratio laterum rectorum ſit dupla, curva A E dupla curvæ BD. Neque abſolute neceſſe eſt, ut eundem focum C habeant; poteſt enim punctum ad libitum aſſumi, & nihilominus tamen ratio, quam curvæ ad ſe invicem habent, determinari. TAB. VIII. N°. XXVIII. *Fig.* 3.

III. Cognita quoque eſt ratio, quam partes curvæ circularis ad ſe invicem habent; ſed circa quaſvis alias curvas, hæc nondum oſtenſa fuit a Geometris. Illis ergo forte non ingratum accidet, ſi ipſis ſignificavero, me methodi univerſalis eſſe compotem, *in qualibet curva, data portione ejuſdem, aliam ſemper aſſignandi, quæ datam rationem ad priorem obtinet;* cujus rei ſpecimen quoque exhibebo.

Sit parabola ACDEF, cujus focus B; ſitque data portio curvæ CD, & alia aſſignanda EF, ita ut CD ſit ad EF, ut data linea GH ad TAB. VIII. N°. XXVIII. *Fig.* 4.

ad IK. Ductis lineis BC & BD, fiat ut quadratum GH ad quadratum IK, ita recta BC ad rectam BE, & BD ad BF: Dico curvæ parabolicæ portionem CD ad EF eſſe in ratione data. Sit ex. gr. GH ad IK ut 1 ad 2, & fiat BE quadrupla BC, & BF quadrupla BD; erit portio curvæ EF dupla partis CD. Occurrit hic quidem caſus, ubi peculiaria quædam obſervanda; ſed cui demonſtratio præcedentium nota, facile videbit, quid ſibi agendum, aliaque egregia hinc eliciet, verbi gr. modum *in curvis aſſignandi ſpatia datam rationem habentia, licet ipſorum dimenſio ſit incognita*; prout hoc, in ſpecie circa præſens exemplum, in hyperbola æquilatera, cujus dimenſio analoga eſt parabolicæ, nova & hactenus incognita ratione fieri poteſt, ut aſſignentur ſpatia, quæ datam lineæ ad lineam rationem inter ſe habent; multaque inveniet alia præclara & plane nova theoremata, vel circa ipſas conicas ſectiones, quæ tamen hactenus nocturna diurnaque manu quaſi verſatæ fuerunt a Geometris. Demonſtrationes enim horum omnium afferre, & prolixum nimis foret & ſupervacuum, cum hæc inventa præcipue dicata ſint Geometris primi ordinis, quibus jam notum eſt, quomodo ex datis concluſionibus univerſalibus circa dimenſionem quantitatum, demonſtrationes via retrograda facile poſſint inveſtigari.

IV. Conſtitueram hic ſubſtinere, ſed commodum incidit in manus meas *Joh.* BERNOULLII *Meditatio de dimenſione linearum curvarum per circulares*; * quod egregium inventum & mirifice me delectavit, & effecit, ut hæc pauca adjicienda duxerim. Vir hic celeberrimus præcipue reſpexit, in eruendo hoc problemate, ad evolutionem *Hugenianam*: ſed quia juxta deſcriptionem meam curvarum per focos, quælibet curva infinitis modis poteſt evolvi; hinc ejus doctrina infinities amplificari poterit, adeoque Geometria ſingulare hoc modo augmentum recipiet. Addam vero & aliud, quod in tempus aliud reſervaveram. Notum eſt, quod dato cuilibet ſpatio infinita alia ſpatia, diverſæ naturæ, æqualia perfacile inveniri poſſint; ſed idem in curvis lineis efficiendi nemo adhuc oſtendit rationem, Si enim via ordinaria aggrediamur, ad tangentium methodum inverſam deducimur, cujus ingenioſiſſima nobis ſpecimina dedit illuſtriſſimus Vir *Marchio* HOSPITALIUS. Licet autem hanc quoque methodum probe excoluerim, & mihi fere omnimode ſatisfecerim, non tamen ea hic præſtat, quod comparari poſſit cum methodo univerſali, quam non ita pridem inveni, ope cujus *infinitæ diverſæ curvæ poſſunt deſignari datæ curvæ abſolute æquales*. Specimina hujus rei alio tempore exhibiturus ſum: jam enim vix licuit, ob circumſtrepentia negotia, ad amicorum inſtantiam præcedentia literis conſignare.

* N°. XXVI.

NB. *Videatur Num.* XXX.

N°. XXIX.

G. G. L. * DE NOVO USU CENTRI GRAVITATIS AD DIMENSIONES,

Et ſpeciatim pro areis inter curvas parallelas deſcriptis, ſeu rectangulis curvilineis ; ubi & de parallelis in univerſum.

PAPPUS * ſubindicaverat, quod GULDINUS †† expreſſius oſtendit, aream, motu debito generatam, æquari facto ex ductu mobilis generantis in viam ejus centri gravitatis. Hac regula potiſſimum uſi ſunt Geometræ, in motu rotationis circa certum quendam axem, pro metiendis ſolidis ac ſuperficiebus, quæ ſic generantur. Sed non minus ſuccedit negotium, ſi axis vel centrum continue mutetur, durante motu generantis; ut fit in evolutionibus curvarum & ſuperficierum. Itaque ſi curva AB ope fili DAB evolvatur, tunc pars fili, id eſt, initio recta DA, deſcribet aream DA(A)(D), vel brevius deſignando, D(A), duabus curvis parallelis condeſcriptis, D(D) & A(A) comprehenſam; quæ æquabitur rectangulo ſub recta AD, & recta æquali curvæ E(E) (iiſdem parallelæ) a centro, ſeu puncto rectæ AD medio E, deſcriptæ. Quin amplius, etiamſi pars ipſius mobilis ſucceſſive quieſcat & moveatur; tamen productum ex toto in viam centri gravitatis totius, areæ generatæ æquatur; quod & hic locum habet. Nempe totius fili DAB centrum gravitatis ſit G, in ſtatu primo; & (G) in ſtatu, ſeu ſitu ultimo, cum filum totum in rectam B(D) abiit. Sit linea G(G) locus continuus hujus centri; dico B(D) filum, in G(G), æquari DAB(D)D. Horum ut recordarer, fecit elegans theorema Dn. *Joh.* BERNOULLII, qui notavit duorum arcuum, evolutione condeſcriptorum, ut D(D) & A(A), differentiam, ſi convexitatem vertant ad eaſdem partes, ſummam, ſi ad contrarias, æquari arcui AH, ſectoris circularis, intercepti inter duos radios, DA, DH, æquales filo, vel regulæ, extremis ſuis punctis binos illos arcus deſcribenti, & parallelos ipſis DA, & (D)(A) extremis ſitibus fili. Videan-

Acta Erudit. Lipſ. 1695. Nov. pag. 93.

TAB. VIII. N°. XXIX.

* *Gothofredus Gulielmus* LEIBNITIUS.

† *Collect. Math.* ſub finem Præfationis ad Librum VII.

†† *Pauli* GULDINI, De centro gravitatis. Lib. II. p. 147.

Videantur Acta Auguſti 1695. * His cum meo theoremate conjunctis, ſequitur differentiam (vel, collatis oppoſitis evolutionibus, ſummam) duorum (ut ſic dicam) rectangulorum (bicurvilineorum) condeſcriptorum, velut D (K) & L (A), modo ſint æquialta (nempe ſi DK = LA) poſſe menſurari ope dimenſionis circuli. Nam collocetur ipſi DK, vel LA, æqualis MN in recta DA, medio loco inter D & A; & deſcribantur ſimul parallelæ M (M) & N (N). Jam DL = KA, & DL in M (M) = D (L), & KA in N (N) = K (A). Ergo D(L) — K (A), id eſt, D (K) — L (A) = DL in M(M) — N (N) = DL in NP; poſito NP eſſe arcum circularem, centro M dicto modo deſcriptum, ſcilicet ut ſit MP parallela & æqualis ipſi (M) (N). Unum adhuc addam: quæ de parallelis noſtro more, id eſt generaliter acceptis, diximus, tam univerſalia eſſe, ut non tantum parallelis evolutione deſcriptis, ſed & rectis ac circularibus quadrent: licet in circularibus linea evolvenda evaneſcat in punctum; & pro rectis hoc punctum concipiendum ſit infinite remotum. Generaliter autem *parallelas* definio (lineas, vel ſuperficies) quarum intervalla (minima ſcilicet) ubique ſunt æqualia. Et cum *rectangulum*, (late ſumtum) figura ſit, quæ ſolos angulos rectos habet; conſequens eſt, figuram hic inter duas parallelas, earumque intervalla extrema (minima) contentam ut D (K) merito rectangulum appellari. Cæterum, ut hoc quoque adjiciam: *Data linea* (curvæ, vel rectæ) *parallelam ducere lineam*, problema eſt, quod etiam ſine evolutione conſtrui poteſt. Nempe ducatur recta perpendicularis ad lineam datam, & ex puncto ejus aliquo, tanquam centro, ac pertingente ab eo ad curvam perpendiculari, tanquam radio, deſcribatur circulus lineam datam tangens; qui, ſi volvatur ſuper ipſa, deſcribet centro ſuo lineam datæ parallelam. In eo tamen præſtat evolutio, quod ejus ope duci poteſt parallela datæ per punctum datum. Tantum enim opus eſt ex hoc puncto duci tangentem ad generatricem datæ, quæ ſimul & generatrix erit quæſitæ; tangente ducta partem fili faciente.

* Supra N°. XXVI.

JOHAN-

N°. XXX.

JOANNIS BERNOULLI

Supplementum defectus Geometriæ Carteſianæ *circa Inventionem Locorum.*

Annotata quædam in Schediaſmata Leibnitianum *&* Tſchirnhauſianum, *in ultimo Actorum Novembr. edita.*

De Complanatione ſuperficierum Conoidearum & Sphæroidearum.

Problema novum Mathematicis propoſitum.

I. QUANTUM Geometriæ incrementum acceſſerit, ex quo variæ infinitorum Methodi, inter quas Differentialis Calculus, nemine invidente, primas tenebit, inclaruerunt, mille inventorum exempla comprobant; quæ, ſi verum dicere fas eſt, noſtro hoc ævo, ut ſuperiora taceam, etiamnum pro deſperatis habebantur: quemadmodum ex plurimis modernorum Mathematicorum ſcriptis conjicere licet. Non quidem deſunt, qui meliora non edocti audacter nimis aſſerunt, nihil eſſe in tota Matheſi, pro quo communis Geometria, a CARTESIO aliiſque tradita, non ſufficit. Alii paulo æquioris judicii ab ea *infiniti* tantum conſiderationem excludunt; & hac in parte ejus imbecillitatem lubenter agnoſcunt, admittentes interim indiſcriminatim omnia, quæ circa finitas & ordinarias quantitates verſantur. Sed quid ſi oſtendam, etiam hic, multa deſiderari, quæ vulgarem Geometriam mirum quantum imperfectam relinquunt? *Acta Erud. Lipſ. 1696. Jun. pag. 264.*

Notum eſt, potiſſimam *Carteſianæ* partem conſcriptam eſſe, pro inveniendis Locis & natura curvarum, tanquam materia in Geometricis ſummi momenti: Notum vero etiam eſt, quod methodus Auctoris ſemper ſupponat, certam quandam dari re-

lationem punctorum in curva, ad puncta in recta poſitione data, quam axem vocat; pro qua relatione invenit æquationem algebraicam, unde curvæ naturam & conſtructionem determinat. Verum, ſi ex ſola mutua relatione ipſorummet curvæ punctorum, (nullis aliis conſideratis, vel datis) natura, vel conſtructio curvæ eruenda ſit; non video, qua ratione id obtinere liceat per regulas CARTESII. Nec etiam methodus infiniteſimalis ibi quicquam præſtare poterit. Non itaque ingratum Geometris fore puto, ſi novam, pro his & ſimilibus, mihi repertam eſſe, per ſolutionem unius vel alterius exempli, oſtendero.

Primum quod huic meditationi anſam dedit, erat decantatiſſima illa proprietas circuli, demonſtrata Propp. 35 & 36 Lib. III. EUCLIDIS. *Quod omnis recta per punctum datum ducta, & a circumferentia circuli terminata; habeat rectangulum ſegmentorum dato conſtanti æquale.* Quis eſt, qui non ſtatim pronuntiaret, hanc proprietatem eſſe circulo eſſentialem; & concluderet reciproce: *Ergo curva faciens rectangulum ſub ſegmentis cujusvis recta, per punctum datum ducta, dato æquale, eſt peripheria circuli.* Ego vero contrarium ſtatuo, & dico ſic argumentantem enormiter hallucinari; ut pote reperiens, quod infinita dentur genera curvarum, quæ, non minus quam circumferentia circuli, dicta proprietate gaudeant; cum hoc ſolo diſcrimine, quod, in hac, ob ſimilitudinem partium ſuarum, punctum datum ubivis; in cæteris vero certo tantum loco poſſit ſumi. Quod ut clarius explicem, ſuppono, me hucuſque ignorare, quod ſit circulus, cui iſta proprietas conveniat, ſed mihi problematice proponi: *Invenire & conſtruere curvam ABC, 2. ita ut, ex puncto dato D ducta quævis recta DEC, ſecante curvam in punctis E & C; rectangulum ſub ſegmentis DE, & DC ſit ſemper æquale eidem conſtanti dato.* Cui problemati, ut jam dixi, infinitis modis ſatisfieri poteſt: Ducta enim utcunque recta DAG, pro diametro, in qua abſciſſa DF, & ad hanc ordinatim applicata in quocunque angulo BF; aſſumatur quædam recta pro unitate; junctaque DB, vocetur DB, *x* & BF, *y*,

TAB. VIII. N°. XXX. *Fig. 1.*

Dico

Dico ſi fiat $y = ax^{\alpha} + ax^{2-\alpha}$, vel $y = ax^{\alpha} + ax^{2-\alpha} + bx^{\beta} + bx^{2-\beta}$, vel $y = ax^{\alpha} + ax^{2-\alpha} + bx^{\beta} + bx^{2-\beta} + cx^{\gamma} + cx^{2-\gamma}$, vel $y =$ quantitati hoc modo quouſque libuerit continuatæ; fore ſemper punctum B in curva ABC, quæ quæritur. Ubi notandum, quod coefficientes a, b, c, &c. ut & poteſtates α, β, γ, &c. ſint conſtantes & arbitrariæ, affirmativæ, ſive negativæ; unde pateſcit, curvam ABC non ſolum, quoad dimenſionem, variare in infinitum, ſed etiam poſſe fieri tranſcendentem, ſi pro α, β, γ, &c. ſumantur numeri irrationales. Quod ſi eligamus æquationem ſimpliciſſimam, faciendo nempe $y = ax^{\alpha} + ax^{2-\alpha}$ & ponendo $\alpha = 0$, habebimus $y = axx + a$, vel ſuppletis homogeneis per quadratum unitatis, quod ſit an, erit $ny = xx + an$; quæ æquatio, ſi examinetur, videbitur eſſe ad circulum: adeo ut nunc ſatis liqueat, quod aſſerui, præter circulum, qui generaliſſimæ noſtræ ſolutionis ſpecialiſſimus exiſtit caſus, innumeras alias altiorum graduum curvas conſtrui poſſe, quibus æqualitas rectangulorum ſub ſegmentis competit.

Sed nunc ad aliud progredior non minus curioſum: *Quæritur curva FHG, ita ut, ducta quavis recta GFB, ad poſitione datam DC in angulo dato; rectangulum ſub ſegmentis BG & BF ſit ſemper æquale conſtanti dato.* Ex Conicis patet, hyperbolam reſpondere quæſito; ſed præter illam, ſequentes infinitas curvas habe: Sumpta quadam recta pro unitate, ſit DC, y & CE, x; & facias $y = ax^{\alpha} + ax^{-\alpha}$, vel $y = ax^{\alpha} + ax^{-\alpha} + bx^{\beta} + bx^{-\beta}$, vel $y = ax^{\alpha} + ax^{-\alpha} + bx^{\beta} + bx^{-\beta} + cx^{\gamma} + cx^{-\gamma}$, vel $y =$ quantitati hoc modo ad lubitum continuatæ; atque ſic obtinebis ſolutiones infinitas. Hinc, ſumpta æquatione ſimpliciſſima, $y = ax^{\alpha} + ax^{-\alpha}$, & poſito $\alpha = 1$, prodibit æquatio $xy = axx + a$, pro hyperbola; quæ, ut circulus in ſuperiori exemplo, ſimpliciſſimi gradus eſt omnium reliquarum. TAB. VIII. N°. XXX. *Fig.* 2.

Sed nimis prolixus ſim in exemplis, quorum duo jam prolata probitatem methodi ſatis ſuperque manifeſtant; tranſeo tandem ad problema, quod olim mihi, ſi bene memini, aliquis

TAB. VIII. N°. XXX. *Fig.* 3. non infimæ notæ Geometra propoſuerat: Erat autem tale. *Quæritur qualis ſit curva ABCDE ita ut ducta per verticem A tangente AC, & alia utcunque ſecante curvam in punctis B & D, ſumma ſegmentorum DA & BA ſit ubique dupla ipſius tangentis AC.* SOLUT. Accepta quadam AE pro unitate, ex qua abſcindatur indeterminata AF, & ad AE, AF tertia proportionalis AG; Fiat ut AE ad AF, ſic FG ad quartam HD, quæ erigatur perpendiculariter ſuper AE, ita ut ſit ſinus arcus FD centro A & radio AF deſcripti, erit punctum D in curva optata. Vel ſi mavis expreſſionem litteralem, idem infinitis ſolutionibus præſtari poteſt, ſi fiat (poſitis AE $= 1$, AF, vel AD, $= x$, DH $= y$) $y = x(x - xx)^n$; ubi n numerum quemvis conſtantem denotat.

Si qui alii in hiſce ſuarum methodorum vires experiri velint, quærant (*Fig. I.*) curvam ABC, ejus proprietatis, ut ducta a puncto dato D recta utcunque DEC, ſolidum ſub uno ſegmento DC, & quadrato alterius FB ſit conſtanti dato æquale.

II Cum hæc meditarer, accepi cum aliis ultimum horum *Actorum Novembrem*, ubi non ſine magno delectamento legi, quæ Illuſtre Virorum par LEIBNITIUS * & TSCHIRNHAUSIUS † publico impertierunt. Et quidem utrique vidi novum meum theorema menſi *Auguſto* ſuperioris Anni inſertum †† anſam ſuppeditaſſe, ut nova novis augerent: Celeb. LEIBNITIO perbene notante, differentiam vel ſummam rectangulorum curvilineorum & æquealtorum, una evolutione condeſcriptorum, æquari ſpatio circulari. Quæ inſuper habet de rectangulis curvilineis, & de curvis parallelis, pro more ejus ingenioſe excogitata ſunt. Omnino mihi placet ejus conſtructio ducendarum parallelarum, non adhibita evolutione; quam etiam, contra ac ipſe ſentit, præfero alteri illi per evolutionem factæ; tum, quod facilius circulus conſtruatur quam evoluta; tum etiam, quod per rotationem, non minus quam per evolutionem, parallela per punctum datum duci poſſit, ſi modo radius circuli fiat æqualis perpendiculari ex puncto dato ad curvam ductæ.

Quæ

* N°. XXIX. † N°. XXVIII. †† N°. XXVI.

Quæ Nob. TSCHIRNHAUSIUS ex contemplatione focorum in curvis nobis dedit, ſatis oſtendunt, quantum hæc materia mereatur ut diligentius tractetur; fateor enim ſtupenda theoremata, & veritatis alioquin indaginis abſtruſiſſimæ, nullo interdum aut levi negotio, inde erui. Interim non perſcipicio, quomodo per aliam evolutionem quam *Hugenianam*, theorema meum de condeſcriptarum dimenſione demonſtrari, nedum ejus doctrina amplificari poſſit; cum, in demonſtratione neceſſario reſpiciendum ſit ad normalitatem radii evolventis ad curvam, quæ normalitas in ſola evolutione *Hugeniana* contingit. Adde, quod Vir acutiſſimus nondum docuerit modum generalem deſcribendi curvam quamlibet, per focos ſimplices, non lineares: quem ſi premit, rogandus eſt, ut communi bono illum in lucem emittat, eumque ex. gr. parabolæ cubicali per focos deſcribendæ applicet. Ardenter quoque deſideramus publicationem methodi univerſalis, cujus ſe compotem dicit Art. III, *In qualibet curva, data portione ejuſdem, aliam ſemper aſſignandi, qua datam rationem ad priorem obtinet.* Quin imo totum Mathematicorum Orbem ſibi obſtringet, & æternam laudem merebitur; ſi dabit demonſtrationem ſpeciminis, quod ibidem exhibuit, pro aſſignandis in curva parabolica portionibus in data ratione. Miror Celeb. Auctorem, pro perſpicacite ſua, non animadvertiſſe, quod hoc ſpecimen longe plus in receſſu habeat quam apparet. Det enim mihi demonſtrationem conſtructionis ſuæ; & ego ipſi dabo quadraturam hyperbolæ, & poinde rectificationem curvæ parabolicæ geometricam, in qua indaganda omnes, quotquot extiterunt Mathematici, hactenus fruſtra deſudarunt.

Cætera, quæ Nob. TSCHIRNHAUSIUS in dicto Schediaſmate profert, pereximia ſunt. Præprimis Art. I. notatu digniſſima eſt reductio ſectorum ellipticorum ad ſectores circulares; ex qua commode deducit diviſionem ſpatii elliptici in parres æquales; quamvis alias ſector ellipticus, & hyperbolicus, commodiſſime bifariam dividatur, biſecando tantum ſubtenſam arcus ſectoris per rectam e centro eductam. Obſervo inſuper, conſtru-

TAB. VIII. N°. XXV. *Fig. 1.* conſtructionem Viri Nobiliſſimi etiam locum habere, ſi pro radio circumferentiæ BFD ſumatur major ellipſeos diameter, id eſt, quando ellipſis AFE cadit intra circulum BFD: Dico enim, etiam tunc rectangulum ex recta AE in arcum circularem HD eſſe ſemper quadruplum ſectoris elliptici CGE. Mirari hic ſubit quod, pro menſuranda hyperbolæ area, velit adhibere arcum curvæ mechanicæ; cum tamen id fieri queat commodiſſime, ex ductu rectæ conſtantis in arcum curvæ geometricæ, nempe parabolæ, ceu notum eſt.

In fine Articuli primi elegans habetur theorema, quod tamen, meo judicio, non fluit ex natura focorum; quoniam longe univerſalius eſt, quam Celeb. Auctor illud proponit, ſeſe extendens ad omnes curvas, ſive ſint per focos, ſive aliter, quomodocunque, & ſi vis, libera manu deſcriptæ. Sit enim TAB. VIII. No. XXV. *Fig. 2.* Curva quæcunque FG, ſitque E centrum gravitatis quotcunque punctorum A, B, C, D, ad arbitrium ſumtorum: ſi ex ſingulis hiſce punctis ducantur rectæ ad duo quælibet puncta curvæ F & G; erit ſumma ſectorum AFG, BFG, CFG, DFG, ad ſectorem EFG, ut numerus punctorum ad unitaetm. *

Quod ſupereſt; non poſſum, quin hic, ex occaſione utiliſſimi condeſcriptarum theorematis, inſinuem me poſſidere modum generalem complanandi ſuperficies omnes conoideas & ſphæroideas, habentes axem ad baſin rectum; & ex illis abſcindendi portionem dato ſpatio, ſive rectilineo, ſive curvilineo, æqualem; utrumque ope ſolius quadratricis vulgaris. Ubi monendum tamen eſt, quod in aliquibus, ut in ſphærica, conica, conoidea, parabolica, aliiſque, abſolute, & ſine quadratrice, id præſtari poſſit. Hinc ænigma Florentinum non ſolum in ſuperficie ſphærica, ſed in quavis alia conoidea, vel ſphæroidea, nullo labore & diverſimode ſolvere licet. Hinc etiam emergit inſignis coni recti proprietas; quam, quia a nemine hactenus animadverſam ſcio, huc refero: *Si ſuper baſi coni recti elevetur priſma rectum, habens pro baſi figuram quamcunque, ſive rectilineam, ſive curvilineam; abſcindet hoc priſma*

ex

* Videatur Nus. XXXIV.

ex ſuperficie conica portionem, quæ erit ad baſin priſmatis, ut latus coni ad radium baſis coni. Ex quo ultro patet, cuilibet ſpatio plano, ſive quadrabili, ſive non quadrabili, poſſe ſumi abſolute ſpatium æquale ex ſuperficie coni recti, & viciſſim. Item omnis portio ſuperficiei conicæ rectæ, terminata a tribus pluribuſve hyperbolis in cono factis, quorum axes ſunt paralleli axi coni, eſt quadrabilis, utpote æqualis figuræ rectilineæ.

PROBLEMA NOVUM

Ad cujus ſolutionem Mathematici invitantur.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B, aſſignare Mobili M viam AMB, per quam gravitate ſua deſcendens, & moveri incipiens a puncto A, breviſſimo tempore perveniat ad alterum punctum B. TAB. VIII. N°. XXX. *Fig.* 4.

Ut harum rerum amatores inſtigentur, & propenſiori animo ferantur ad tentamen hujus problematis; ſciant non conſiſtere in nuda ſpeculatione, ut quidem videtur, ac ſi nullum haberet uſum; habet enim maximum, etiam in aliis ſcientiis quam mechanicis, quod nemo facile crediderit. Interim, (ut forte quorundam præcipiti judicio obviam eam,) quanquam recta AB ſit breviſſima inter terminos A & B, non tamen illa breviſſimo tempore percurritur; ſed eſt curva AMB Geometris notiſſima; quam ego nominabo, ſi, elapſo hoc anno, nemo alius eam nominaverit.

N°. XXXI.

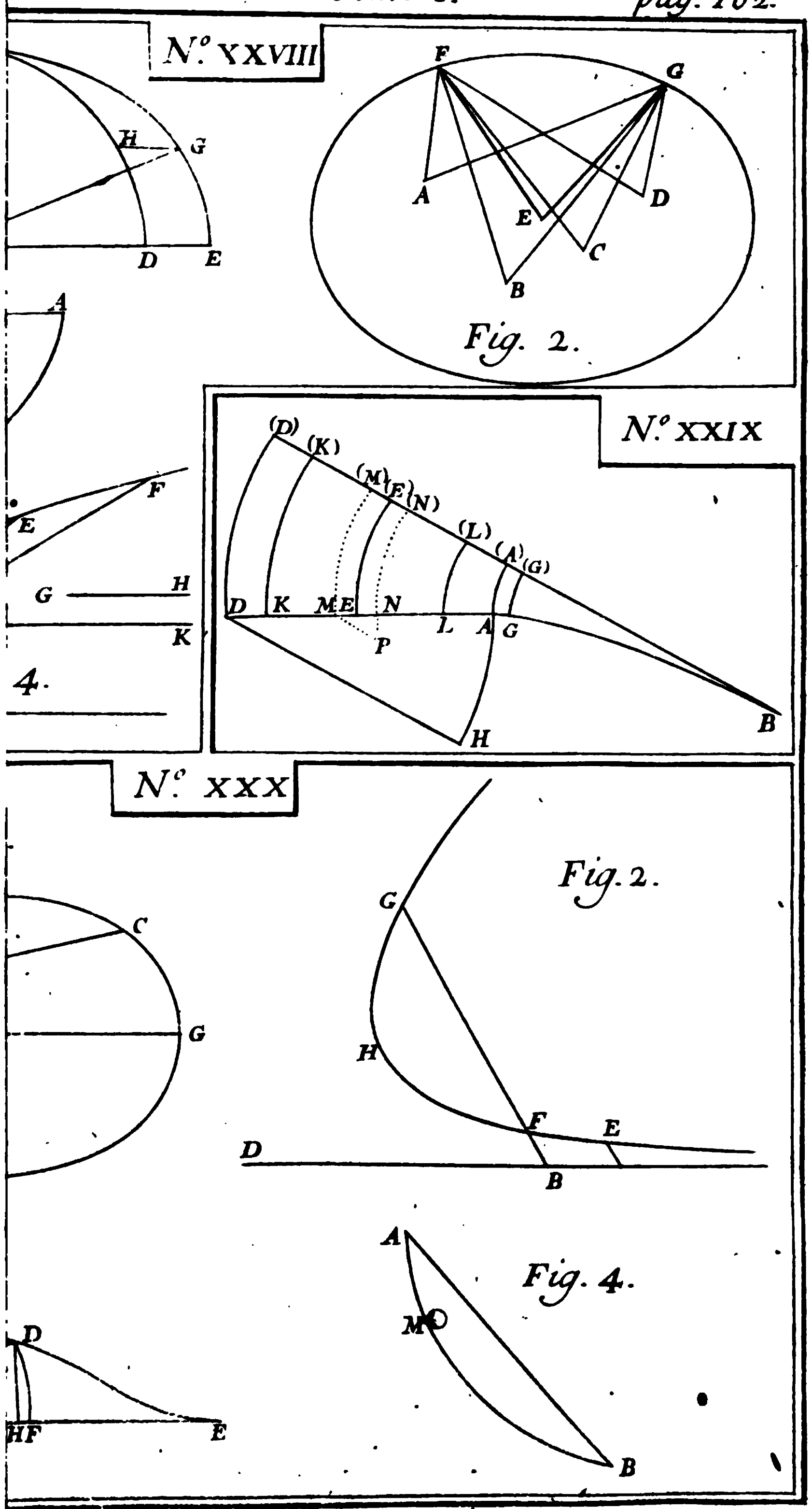
JOHANNIS BERNOULLI

Tetragoniſmus univerſalis Figurarum Curvilinearum, per Conſtructionem Geometricam continue appropinquantem.
Addatur ad ea quæ in *Actis 1694 menſe Novembr.* * de eadem materia habentur.

Acta Erud. Lipſ. 1696. Decemb. p. 551.

QUOD rarum olim & inuſitatum fuerat, nunc a duobus tribusve luſtris nihil vulgarius, nihil tritius eſt apud Geometras, quam quadraturas ſpatiorum (algebraice non determinabiles) ad ſeriem infinitam, quod ultimum eſt refugium, revocare. Primus ego, & forte ſolus, publicavi *Act. 1694 menſe Novembr.* ſeriem univerſalem pro omnibus, ſine diſcrimine, ſpatiis quadrandis curviſque rectificandis; quam neque irrationalitas, neque implicatio indeterminatarum impedit. Non moror, multoque minus reſponſione dignor, quicquid quidam abganniat: Sufficit tanto applauſu præſtantiſſimorum Mathematicorum exceptam fuiſſe, quod privatæ ipſorum literæ teſtatum reddunt, ut non ſit, cur ejus me pœniteat; quin potius & in publicum, & in me, injurius eſſem, ſi diutius in chartis meis latitare paterer hanc ſecundam methodum, quæ alteri priori multis occaſionibus commode ſuccenturiari poteſt; eo quod prior illa, analytice expreſſa, applicatu difficilis evadit, in exemplis, ubi perplexus requiritur calculus; hæc vero, quam nunc traditurus ſum, nullam analyſin reſpiciens, ſpatiorum magis minuſve compoſitorum quadraturas pari ſimplicitate expedit; ſuppoſito tantum curvarum datarum datas eſſe, vel dari poſſe tangentes, ipſamque curvam propoſitam jam deſcriptam eſſe: hic enim nullas expeditiones analyticas, quibus ſeriei termini explicentur, adhibeo; ſed, quod inſoli-

* *Supra* N°. XXI.


N° XXVIII
Fig. 2.
N° XXIX
N° XXX
Fig. 2.
Fig. 4.
4.

ſolit um hactenus fuit quadraturas ita determinare, ipſa conſtructio geometrica, conſtanti lege, eaque valde ſimplici, in infinitum continuata, exhibet veram rationem figuræ curvilineæ quadrandæ ad rectangulum circunſcriptum.

Sit propoſita figura curvilinea quæcunque A C B, cujus coordinatæ A B, B C; quæritur quam habeat rationem ad circumſcriptum rectangulum B L? cui quæſito ego ſic generaliter ſatisfacio. Ob datam curvam A B, datur ejus tangens C M; deſcribatur ergo nova curva A D, hac lege, ut ubique B D ſit = ſemiſſi ipſius A M; hinc & hæc nova datur. Jam fiat tertia A E, quæ eodem modo conſtruatur ex A D, quo hæc ipſa A D conſtructa eſt ex A C, nimirum ut B E ſemper ſit = ½ A N. Eadem hac lege, ex inventa tertia curva A E, deſcribatur quarta A F; & ex hac quinta A G; tum ſexta, ſeptima, & hoc in infinitum continuari intelligatur. Habebit rectangulum circumſcriptum B L ad ſpatium curvilineum A C B eam rationem, quam dupla B C ad B C + B D + B E + B F + B G + &c. TAB. IX. N°. XXXI.

Quod ſi alternatio ſignorum magis arrideat; en, ex pluribus qui excogitari poſſunt, modum hunc alterum: Curvæ A D; A E, A F, A G, &c. deſcribantur hac conditione, ut ubique B D ſit æqualis ipſi L M, ſeu A C — A M; B E = B D — A N; B F = B E — A O; & ita conſequenter: quibus factis, dico rectangulum B L fore ad figuram curvilineam A C B, ut B C ad B C — B D + B E — B F + &c.

Notare convenit, non opus eſſe integras deſignare curvas A D, A E A F, &c. quas majoris intelligentiæ gratia ita repræſentavi: minimæ enim earum portiunculæ, prope B C ductæ, ſufficiunt ad determinandum interſectiones D, E, F, G, &c.

Hoc etiam monendum, quando methodum ad praxin deducere lubet, in nonnullis exemplis, ut in ipſo circulo, accidere ut, delineatis jam aliquot ex curvis A D, A E, A F, reliquæ interſecent applicatam B C infra punctum B, & quidem ita ut punctum interſectionis magis magiſque recedens a B, tandem ab eodem infinite diſtet; unde nihil determinati habe-

bitur. Ne tamen, hiſce in caſibus, regula noſtra fiat inutilis, ſuumque non ſortiatur effectum; multis modis huic inconvenienti remederi licet: quorum tutiſſimus eſt, ut figura propoſita transformetur (quod quomodo fieri debeat, jam omnibus, & vel tyroni, notum eſt) in aliam, quæ terminetur curva aſymptotica. Sciendum enim, hujus modi ſpatia modo memoratæ incongruitati nunquam eſſe obnoxia.

Cæterum, non prætereundum puto, quod notavi, interdum, ubi ſpatia ſunt abſolute quadrabilia, ſeriem BC + BD + BE + BF &c. in priori modo; vel BC — BD + BE — BF + BG, &c. in altero, fieri manifeſte ſummabilem; unde quadratura terminis finitis ſponte prodit: Ut quando curva propoſita AC eſt ex parabolarum genere cujuſvis gradus n, erit, ex proprietate parabolarum, BC ad AM in ratione conſtante n ad $n - 1$, & propterea curva AD, ut & omnes reliquæ AE, AF, AG, erunt parabolæ ejuſdem gradus cum AC. Hinc per priorem modum ſeries BC + BD + BE + BF &c. conſtituit vulgarem hanc progreſſionem geometricam in infinitum deſcendentem, $\frac{1}{1}BC + \frac{n-1}{2n}BC + \frac{(n-1)^2}{4nn}BC + \frac{(n-1)^3}{8n^3}$ &c. cujus ſumma, per communes regulas invenitur $= \frac{2n}{n+1}BC$. Dico itaque, rectangulum circum ſcriptum eſſe ad ſpatium parabolicum ACB, ut 2BC ad $\frac{2nBC}{n+1}$ id eſt, ut $n+1$ ad n; & hoc perfecte congruit cum eo, quod per infiniteſimalem calculum jam diu repertum habemus; non enim ut aliquid novi, ſed quatenus methodi hujus univerſalitatem commendat, huc refero. Pariter per poſteriorem modum, ſeries BC — BD + BE — BF &c. hanc producit progreſſionem geometricam $\frac{1}{1}BC - \frac{1}{n}BC + \frac{1}{nn}BC - \frac{1}{n^3}BC$ &c. cujus ſumma $= \frac{n}{n+1}BC$. Habebit ergo rectan-

tangulum BL ad ſpatium ABC rationem, quam BC ad $\frac{n}{n+1}$ BC, id eſt n ad $n+1$, ut ante.

N°. XXXII.

LECTORI BENEVOLO,

Profundioris in primis Matheſeos cultori, Salutem!

PRopoſuit in hiſce *Eruditorum Actis menſe hujus Ann. Junio*, pag. 269*. Vir Clariſſimus Dn. *Joh.* BERNOULLI, Mathematum hoc tempore in Academia Groningenſi Profeſſor publicus, Problema novum, & ad ejus ſolutionem Mathematicos invitavit; pollicitus ſemet eam publicaturum, ſi elapſo hoc anno, nemo alius eam promulgaverit. Cum vero hactenus nemo quicquam ad nos tranſmiſerit, quod ad Problematis illius ſolutionem ſpectaret, & dignum tamen Problema videretur, quod aliorum, ad quos forte *Junius Actorum noſtrorum* nondum pervenit, ingenia exerceret; atque perſuaſum inſuper haberemus, in Gallorum etiam & Italorum Ephemeridibus idem Problema propoſitum interea fuiſſe, & ad plurium adeo notitiam perveniſſe; prorogandum termimum Celeberrimus BERNOULLIUS cenſuit, ſolutionem ſuam ad feſtum uſque Paſchatis Anni proximi ſuppreſſurus. Itaque ſpatium Mathematicis ſuppetit experiendi vires ſuas, & Problematis, ubi eam conſecuti fuerint, ſolutionem, ſeu in *Actis* hiſce noſtris, ſeu in exterorum *Diariis* eum publico communicandi.

Acta Erudit. Lipſ. 1696. Dec. pag. 560.

* *Supra* N°. XXX. pag. 161.

N°. XXXIII.

PROGRAMMA

Editum Groningæ *A°.* 1697.

Acutiſſimis qui toto Orbe florent Mathematicis S. P. D.

JOHANNES BERNOULLI,
Math. P. P.

Cum compertum habeamus, vix quicquam eſſe quod magis excitet generoſa ingenia, ad moliendum quod conducit augendis ſcientiis, quam difficilium pariter, & utilium quæſtionum propoſitionem; quarum enodatione, tanquam ſingulari ſi qua alia via, ad nominis claritatem perveniant, ſibique apud poſteritatem æterna extruant monumenta: Sic me nihil gratius Orbi Mathematico facturum ſperavi, quam ſi imitando exemplum tantorum Virorum Mersenni, Pascalii, Fermatii, præſertim recentis illius Anonymi Ænigmatiſtæ Florentini, * aliorumque, qui idem ante me fecerunt, præſtantiſſimis hujus ævi Analyſtis proponerem aliquod Problema, quo, quaſi lapide Lydio, ſuas methodos examinare, vires intendere, &, ſi quid invenirent, nobiſcum communicare poſſent; ut quiſque ſuas exinde promeritas laudes a nobis, publice id profitentibus, conſequeretur.

Factum autem illud eſt ante ſemeſtre in *Actis Lipſ. m. Jun.*

pag.

* *Vincentius* Viviani A°. 1692. Ænigma Geometricum propoſuit, de miro opificio Teſtudinis quadrabilis Hemiſphæricæ; Videantur *Acta Eruditorum* hujus anni, menſ. Junio, *pag.* 274. vel Vita Viviani in Hiſt. Acad. Reg. Scient. Pariſ. A°. 1703.

pag. 269, * ubi tale Problema propoſui, cujus utilitatem, cum jucunditate conjunctam, videbunt omnes, qui cum ſucceſſu ei ſe applicabunt. Sex menſium ſpatium a prima publicationis die Geometris conceſſum eſt, intra quod, ſi nulla ſolutio prodiret in lucem, me meam exhibiturum promiſi. Sed ecce elapſus eſt terminus, & nihil ſolutionis comparuit; niſi quod Celeb. LEIBNITIUS, de profundiore Geometria præclare meritus, me per literas certiorem fecerit, ſe jam feliciter diſſolviſſe nodum pulcherrimi hujus, uti vocabat, & inauditi antea Problematis; inſimulque humaniter rogavit, ut præſtitutum limitem ad proximum Paſcha extendi paterer; quo interea apud Gallos, Italoſque, idem illud publicari poſſet, nulluſque adeo ſupereſſet locus ulli de anguſtia termini querelæ. Quam honeſtam petitionem non ſolum indulſi, ſed ipſe hanc prorogationem promulgare decrevi; viſurus num qui ſint, qui nobilem hanc & arduam quæſtionem aggreſſuri, poſt longum temporis intervallum, tandem Enodationis compotes fierent. Illorum interim in gratiam, ad quorum manus *Acta Lipſienſia* non perveniunt, propoſitionem hic repeto.

PROBLEMA
MECHANICO-GEOMETRICUM
De Linea celerrimi deſcenſus.

Determinare lineam curvam data duo puncta, in diverſis ab Horizonte diſtantiis, & non in eadem recta verticali poſita connectentem, ſuper qua mobile, propria gravitate decurrens, & a ſuperiori puncto moveri incipiens, citiſſime deſcendat ad punctum inferius.

SEnſus Problematis hic eſt: Ex infinitis lineis, quæ duo illa data puncta conjungunt, vel ab uno ad alterum duci poſſunt,

* Supra N°. XXX. pag. 161.

poſſunt, eligatur illa, juxta quam, ſi incurvetur lamina tubi canaliſve formam habens, ut ipſi impoſitus globulus, & libere dimiſſus, iter ſuum ab uno puncto ad alterum emetiatur tempore breviſſimo.

Ut vero omnem ambiguitatis anſam præcaveamus; ſcire B. L. volumus, nos hic admittere GALILÆI hypotheſin, de cujus veritate, ſepoſita reſiſtentia, jam nemo eſt ſaniorum Geometrarum qui ambigat, *Velocitates ſcilicet acquiſitas gravium cadentium eſſe in ſubduplicata ratione altitudinum emenſarum*; quanquam alias noſtra ſolvendi methodus univerſaliter ad quamvis aliam hypotheſin ſeſe extendat.

Cum itaque nihil obſcuritatis ſuperſit; obnixe rogamus omnes, & ſingulos hujus ævi Geometras, accingant ſe promte, tentent, diſcutiant quicquid in extremo ſuarum methodorum receſſu abſconditum tenent. Rapiat qui poteſt præmium, quod Solutori paravimus; non quidem auri, non argenti ſummam, quo abjecta tantum & mercenaria conducuntur ingenia, a quibus ut nihil laudabile, ſic nihil, quod ſcientiis fructuoſum, expectamus; ſed cum virtus ſibi ipſi ſit merces pulcherrima, atque gloria immenſum habeat calcar, offerimus præmium, quale convenit ingenui ſanguinis Viro, conſertum ex honore, laude, & plauſu; quibus magni noſtri Apollinis perſpicacitatem, publice & privatim, ſcriptis & dictis coronabimus, condecorabimus, & celebrabimus.

Quod ſi vero feſtum Paſchatis præterierit, nemine deprehenſo, qui quæſitum noſtrum ſolverit; nos quæ ipſi invenimus publico non invidebimus: Incomparabilis enim LEIBNITIUS ſolutiones tum ſuam, tum noſtram, ipſi jam pridem commiſſam, protinus, ut ſpero, in lucem emittet; quas ſi Geometræ, ex penitiori quodam fonte petitas perſpexerint, nulli dubitamus, quin anguſtos vulgaris Geometriæ limites agnoſcant, noſtraque proin inventa tanto pluris faciant, quanto pauciores eximiam noſtram quæſtionem ſoluturi extiterint, etiam inter illos ipſos, qui per ſingulares, quas tantopere commendant, methodos, interioris Geometriæ latibula non

ſolum

ſolum intime penetraſſe, ſed etiam ejus pomœria, Theorematis ſuis aureis, nemini ut putabant cognitis, ab aliis tamen jam longe prius editis, mirum in modum extendiſſe gloriantur.

PROBLEMA ALTERUM
PURE GEOMETRICUM

Quod priori ſubnectimus, & Strenæ loco Eruditis proponimus.

AB EUCLIDIS tempore vel Tyronibus notum eſt; Ductam utcunque a puncto dato rectam lineam, a Circuli peripheria ita ſecari, ut rectangulum duorum ſegmentorum, inter punctum datum & utramque peripheriæ partem interceptorum, ſit eidem conſtanti perpetuo æquale. Primus ego oſtendi, in eodem *Actorum Jun.* pag. 265, * hanc proprietatem infinitis aliis Curvis convenire, illamque adeo Circulo non eſſe eſſentialem: Arrepta hinc occaſione, propoſui Geometris determinandam Curvam, vel Curvas, in quibus non rectangulum, ſed ſolidum ſub uno & quadrato alterius ſegmentorum æquetur ſemper eidem: ſed a nemine hactenus ſolvendi modus prodiit; exhibebimus eum, quandocumque deſiderabitur. Quoniam autem non niſi per Curvas tranſcendentes quæſito ſatisfacimus; en aliud, cujus ſolutio per mere algebraicas in noſtra eſt poteſtate.

Quæritur Curva ejus proprietatis, ut duo illa ſegmenta, ad quamcunque potentiam datam elevata & ſimul ſumta, faciant ubique unam eandemque ſummam.

Caſum ſimpliciſſimum, exiſtente ſc. numero potentiæ 1, ibidem in *Actis*, pag 266. † jam ſolutum dedimus; generalem vero ſolutionem, quam etiamnum premimus, Analyſtis eruendam relinquimus.

Dabam Groningæ, ipſis Cal. Jan. 1697.

NB. *Videatur Nus.* XXXVII.

* Supra N°. XXX.

† N°. XXX.

Nº. XXXIV.

RESPONSIO AD OBSERVATIONES DOMINORUM BERNOULLIORUM,

Quæ in Actis Eruditorum *menſe* Junio *hujus anni continentur*, per D. T. *

Acta Erud. Lipſ. 1696 Nov. p. 519. PErſpexi, paucas ante hebdomadas, in *Actis Erud.* menſis *Junii*, quæ Celeberrimi BERNOULLII, circa meditata mea Geometrica, quæ menſe *Novembr.* 1695. † publicata ſunt, annotarunt; in quæ utinam incidiſſem tali tempore, quo Viris, tam ſingulari præditis eruditione, eo potuiſſem, quo ipſi deſiderant, modo ſatisfacere. Verum enim vero, continuis itineribus, & ejus generis occupationibus, quæ ab hoc argumento diverſiſſimæ ſunt, diſtractus fui; facileque prævidi, vix mihi conceſſum iri ante hyemem inſtantem his ſtudiis dare operam. Quo factum eſt, ut ſatius duxerim pauca interim, quam nihil, reſpondere.

Primum ergo ea in ſententia me fuiſſe profiteor, recte & ex ordine me facturum, ſi facilia & nova exempla mearum Methodorum generalium exhiberem; ut alii ex his intelligerent, quo modo illas ad omnes alias curvas applicare, &, ſi ipſis ita viſum foret, mecum augmentum veritatis promovere poſſent. Qua propter, etſi theorema circa *Fig.* I. de Ellipſi, aliis, imo infinitis modis demonſtrari poteſt, nihil tamen hoc theſi meæ officit, qua novum hoc eſſe theorema, quod ad omnes pertinet ſectiones conicas, & (quod præcipuum eſt) ejusmodi via omnes curvas menſurari aſſero. Quam quidem methodum ſingularem plane eſſe puto; neque miror Cl. *Joh.* BERNOULLIUM hujus theorematis momentum pro ea, qua pollet, ingenii acie, bene perſpexiſſe. (TAB. VIII. Nº. XXVIII. *Fig.* 1.)

Quod attinet ad theorema *Fig.* 2........ D. *Joh. Bernoullii* verba. *Seſe extendens ad omnes curvas, ſive ſint per focos, ſive aliter quomodocunque, & ſi vis, libera manu deſcriptæ*, innuere videntur in ea ipſum eſſe ſententia, non omnes curvas per focos deſcribi poſſe, ejus contrarium facile demonſtrari poteſt............ (TAB. VIII. Nº. XXVIII. *Fig.* 2.)

Methodum tangentium inverſam ante aliquot annos magno in pretio me habuiſſe, jam vero eandem non leves ob cauſas, eo loco non amplius

* DE TSCHIRNHAUSEN. † Supra Nº. XXVIII.

a me haberi fateor : neque tamen quemquam, cujus ingenium ad eam excolendam fertur, animus eſt retrahere. Et quamvis, ante annos bene multos, methodum illam eo deduxi, ut nihil hactenus propoſitum viderim, quod ejus ope, cum operam dare ei licuit, non potuerim determinare, ipſaſque adeo non ita pridem proprietates tangentium, quæ pluribus curvis ſunt communes : in ea tamen opinione ſemper fui, non eſſe hanc genuinam viam determinandi curvarum deſcriptiones & dimenſiones : & quia nunc mihi tantum temporis non relinquitur vacuum ad hæc ſtudia perſequenda, lubenter hæc aliis relinquo, & quod mihi ſuppetit otium tribuo hujus generis ſtudiis eo ordine tractandis, qui mihi pariter & publico maxime conducere videtur.

Quæ pertinent ad focos in qualibet curva ſpeciali, jam in *Medicina mentis* pertractavi, oſtendique, quantum ſufficit harum rerum peritis, quomodo omnes certo ſint determinandi. Quamvis enim, mea ſententia, quælibet curva, ex. gr. circulus, infinitos habet focos, omnes tamen ita poſſunt inveniri ; cujus rei, jam in *Actis Eruditorum*, exhibui ſpecimina. Id tamen negare non poſſum, peculiaria hic dari compendia, ſine quibus ordinaria Analyſi hanc rem ſuperare pæne impoſſibile eſt, lubensque ſi quis huic rei, quam maxime utilem in tota matheſi, meo quidem tenui judicio, eſſe cenſeo, incumbere vellet, in commune conferrem, & cum ipſo, quæ mihi jam ſunt cognita, communicarem : quamvis in parabolæ cubicæ focis determinandis non adeo magna ſit difficultas, ut jam diu, cum in illos inquirerem, comperi.

Ad menſurandam aream hyperbolæ, arcum adhibui curvæ mechanicæ; quia ſtatim hinc conſequitur per eam, qua utor, methodum, idemque ſucceſſus in ellipſi & parabola, imo omnibus curvis deprehenditur ; quod etiam Dno. HUGENIO placuiſſe video in hyperbola, & tanquam ſingulare quiddam Geometris conſiderandum fuiſſe propoſitum ; a me autem longe univerſalius fuit præſtitum. Dimenſio Areæ hyperbolicæ per arcum parabolæ quam HEURATIUS jam detexit, tam naturaliter, ſecundum hanc univerſalem viam non provenit ; niſi forſan non rite genuina ſecutus ſum veſtigia, ad quæ tamen, in ulteriori diſquiſitione, probe attendere de crevi.

Porro quod attinet ad ſpecimen, quod in *Fig*. 4. de parabolæ portionibus inter ſe conferendis dedi : non poſſum non candide fateri, me, cum incidiſſem in viam, qua univerſaliter partes curvæ inter ſe poſſunt comparari, ſtatim hujus rei deprehendiſſe momentum : ſed cum in applicatione calculi, difficultas ſurgeret non exigua, a ſimpliciſſimis incepiſſe, &, inter alia quoque, incidiſſe in curvam parabolicam ; in qua principio quidem, ſe difficultates non exiguæ offerebant ; quæ tamen evaneſcebant, poſtquam inveneram univerſalia quædam theoremata, ſimplicia illa quidem, necdum tamen ſatis TAB. VIII. N°. XXVIII. *Fig*. 4.

nota, pro omnibus ſectionibus conicis, ex quibus omnia, quæ de illis hactenus innotuerunt, faciliori longe, quam ſolet fieri, via derivantur. Cum ergo rem totam cum Viro ingenioſo communicaſſem, ipſeque calculum ſibi optime conſtare confirmaſſet; conſtitui aliquid proferre in publicum, ipſamque rem ulterius perſequi. Non licuit tamen hac in re procedere ultra, niſi paucos ante menſes, reperique methodum ipſam plane certam, calculumque ſatis exactum eſſe. Quoniam vero uſus ſum aliqua ſuppoſitione, quam omnes quidem, qui in calculo indefinite parvorum verſantur, adhibent, in errorem tamen inducere poſſe quandoque mihi conſtat, dum ſæpe ſumma quantitatum indefinite parvorum, quæ ſemper reſtant, quantitatem finitam conſtituit; rem alio plane aggreſſus ſum modo, qui nullam ſuppoſitionem quæ ſcrupulo cuidam ſit obnoxia, requirit; jamque ipſum calculum, qui magnus ſatis eſt, abſolvi. Cum vero nondum mihi de ejus exactitudine certo conſtet; ſupprimam interim concluſum; eritque mihi hoc, quamprimum dabitur tempus commodum, prima mea diſquiſitio; qua finita, plura ſpecimina, ipſamque forſan methodum communicabo: quam nunc quidem confirmo certam eſſe & univerſalem, ad partes omnes, non ejuſdem curvæ duntaxat, ſed quarumvis diverſarum curvarum, interſe comparandas; ut ita quid fieri aut non fieri poſſit, innoteſcat. Tandem quod ſpectat ad Dn. *Joh.* BERNOULLI pulcherrimum & maxime ingenioſum inventum, diverſa curvas ad curvam circularem reducendi; nihil eſt quod ei velim objicere. Interim, facile mihi erit demonſtrare, idem poſſe infinitis modis, per meas curvarum evolutiones augeri: apparetque hinc quam arduum ſit quandoque in aliorum cogitata penetrare, quæ tamen a noſtris non adeo ſint remota. Cumque Vir, cujus ingenium ſingulare prorſus, capaciſſimumque mihi ſatis notum eſt, quamvis ad ipſum fontem, *Medicinam mentis*, digitum intenderim, hæc non ſatis fuerit aſſecutus; valde dubito alium id eruere poſſe. Ille vero ut videat, quam paratus ſim ejus excellenti ingenio obſequi; non pigebit commemorare, quemadmodum ipſius methodo omnes curvæ, quæ per Evolutionem *Hugenianam* deſcribuntur, hoc eſt, quæ unicum, ſecundum me, focum habent, ad circularem lineam poſſunt reduci; ita mea methodo, curvas, quæ duos habent focos ad ellipſin, hyperbolam, aut parabolam; quæque tres, quatuor, &c. focos habent, ſemper ad curvas geometricas ſuperiorum graduum reduci poſſe: quod, quanta ſit Geometriæ promotio, nemo non videt; ut proinde mirum foret, quemquam, qui vel hoc unum perſpexerit, meliorem deſcriptionem abſolute omnium curvarum conceptibilium vel deſiderare poſſe illa, quæ in *Medicina mentis* traditur. Quod ſi nec hoc mentem meam fortaſſis exprimat ſatis, lubens totam communicabo Methodum. Cæterum occaſione ejus quod Dn. *Joh.* BERNOULLI com-

commemorat, proprietatem circuli, quod rectangula rectarum ſe interſecantium inter ſe ſemper ſint æqualia, non eſſe circulo eſſentialem; non poſſum quin addam, me ſingularia habere theoremata univerſalia, quæ viam muniant ad novam doctrinam locorum, aliam ab ea quam DES-CARTES docuit. Hujus generis aliquod ſpecimen jam ante biennium, cum Dn. LEIBNITIO communicavi, valdeque mihi probabile videtur dictam proprietatem abſolute omnibus curvis competere. Id autem certiſſimum eſt, in ipſa quoque parabola, hyperbola, & ellipſi, hanc veritatem, quod, duabus rectis ſe interſecantibus, rectangula ſegmentorum inter ſe infinitis modis certa ratione ſint æqualia, demonſtrari poſſe.

Ultimo, & hoc publico indicaſſe forſan operæ pretium erit, quod ad curvilineorum diviſionem pertinet. Notum eſt ARCHIMEDEM aream circuli, per lineam ſpiralem, in partes rationales diviſiſſe; id quod per neotericos, imprimis Dn. SLUSIUM in *Miſcellaneis*, per infinitas ſpirales in ratione numeri ad numerum factum quoque eſt. Hanc rem ulterius promovit *Jacobus* GREGORIUS, & in *Geometria Univerſali*, Prop. 62, pag. 113, quadrantem circuli per curvas geometricas, quæ per gradus aſcendunt, rationabiliter partitus eſt. Mihi vero nota eſt Methodus hæc omnia poſt ſe relinquens, quippe cum, ejus ope, quodlibet ſpatium duabus rectis & curva geometrica terminatum, quamvis non ſit quadrabile, in ratione datæ lineæ ad lineam per unicam curvam geometricam, idque infinitis modis, dividatur; ſimulque, cum ſpatium datum eſt quadrabile, quadratura hæc infinitis modis determinetur. Id quod, cum neſciam in ſimile quid incidiſſe hactenus quemquam, publico indicare volui; cui quoque rem ipſam, ſi eam acceptam illi fore intellexero, impertiri, data occaſione, non gravabor.

N°. XXXV.

JOHANNIS BERNOULLI

De Conoidibus & Sphæroidibus quædam.

Solutio Analytica Æquationis in Actis A°. 1695, pag. 553. *propoſita.* *

Notatiuncula in Reſponſionem a Nob. D. T. *nupero Novembri editam.* † *&c.*

Acta Eruditorum Lipſ. 1697. Mart. pag. 113.

QUod, in *Actis Eruditorum menſe Junio* ſuperioris Anni, ‡ de Conoidum & Sphæroidum ſuperficiebus complanandis inſinuavi, in tranſitu velut attigeram; neque ejus mentionem injeciſſem publice, niſi, inter ſcribendum, in mentem mihi incidiſſet elegans illa coni recti proprietas, quam publico impertiendam duxi; ſubindicando ſimul fontem, ex quo fluebat. Eſt vero materia illa talis, in qua excolenda nemo male ſuam operam collocabit; eruenda enim reſtant egregia; cui rei fidem faciam novo, & facili, ſed eleganti theoremate.

TAB. IX. No. XXXV.

Eſto curva qualiſcunque ABC convertenda circa duos axes DE, & DF, conſtituentes quemcunque angulum EDF; ſitque recta GDH perpendicularis ad lineam angulum eundem biſecantem, cui parallela EF. Dico ſuperficiem, quæ oritur ex converſione curvæ ABC circa DE, una cum ſuperficie orta ex converſione ejuſdem ABC circa DF, eſſe ad ſuperficiem ſolam genitam ex circumvolutione curvæ ABC circa GH, ut EF ad ED. Idem intellige etiam de ſolidis, quæ fiunt ex triplici iſta converſione ſegmenti ACB, vel ſectoris ADC, vel alterius cujuſvis figuræ. Unde, exiſtente angulo EDF $= \frac{2}{3}$ recti, erunt duæ converſiones circa axes DE, DF, ſimul æquales converſioni circa GH: reliquis vero in caſibus, ſi fiat

curva

* A Fratre *Jac.* BERNOULLIO.

† Supra N°. preced.

‡ N°. XXX. pag.

curva *abc* ſimilis expoſitæ ABC, ita ut ducta utcunque D*b* ſit ad DB, ut EF ad mediam proportionalem inter EF & ED, erunt duæ ſimul ſuperficies, factæ ex converſione curvæ ABC circa DE & DF, æquales ſuperficiei deſcriptæ a curva *abc* converſa circa GH. Sin autem D*b* ſit ad DB, ut EF ad primam duarum mediarum proportionalium inter EF & ED, erunt duo ſolida figuræ ACB, circa DE & DF rotatæ, æqualia ſolido figuræ *acb* circa GH converſæ. Hinc patet, qua ratione Sphæroidibus, oblongo & depreſſo, ab eadem quacunque elliptoide deſcriptis & ſimul ſumtis, æquale ſolidum; illorumque ſuperficiebus una ſuperficies æqualis conſtrui poſſit. Id quod HUGENIO quondam erat unum ex maxime deſideratis.

Jam addam hîc ſolutionem analyticam (quia hactenus nulla comparuit) æquationis differentialis a Fratre propoſitæ *in Actis Dec.* 1695. Compellatus enim a Celeberrimo LEIBNITIO ut ei me accingerem; videnſque & ipſum non nihil operæ ſolutioni impendiſſe, & Fratrem, iteratis vicibus Mathematicos provocando, ſuum problema pluris quam ab initio credideram æſtimaſſe; invitationi diutius deeſſe nolui. En igitur ſolutionem, quam per ſemiquadrantem horæ inſtituta meditatio mihi ſuggeſſit, quamque Dn. LEIBNITIO, ſi horum recordari dignetur, jam tum perſcripſi, antequam conſtructio fraterna comparuiſſet.

Æquatio propoſita eſt hæc: $ady = ypdx + by^n qdx$ (ubi a & b quantitates datas & conſtantes, n poteſtatem quamvis literæ y; p & q quantitates utcunque datas per x denotant;) ſeparandæ ſunt in illa literæ indeterminatæ x & y, cum ſuis differentialibus, a ſe invicem; ut ſaltem per quadraturas conſtrui poſſit: id quod ſic facio. Ut poteſtas n deprimatur, ponendum eſt $y = v^{n:(1-n)}$, unde propoſita mutatur in hanc ulterius reſolvendam $\frac{1}{1-n} adv = vpdx + bqdx$, quæ reſpondet formulæ *Leibnitianæ* in *Martio* 1696. traditæ. Sed hac depreſſio-

preſſione poteſtatis mihi non opus eſt: immediate enim conſequor finem ponendo $y = mz$, ideoque $dy = mdz + zdm$; quibus ſubſtitutis in æquatione propoſita, habebitur $azdm + amdz = mzpdx + bm^n z^n qdx$. Nunc, ut hæc æquatio quatuor terminorum ad duos redigatur, pono $amdz = mzpdx$, id eſt $adz : z = pdx$; unde cum habeatur z per x, aut algebraice, aut ſaltem tranſcendenter, eſto $z = \xi$ (per ξ intelligo quantitatem datam per x & conſtantes.) Quoniam vero, deſtructis $amdz$ & $mzpdx$ in æquatione tranſmutata, remanet $azdm = bm^n z^n qdx$, ſeu ſurrogato valore ipſius, z, $a\xi dm = bm^n \xi^n qdx$, id eſt $am^{-n} dm = b\xi^{n-1} qdx$; hinc pariter habetur m per x, nimirum $\frac{a}{-n+1} m^{-n+1} = b\int \xi^{n-1} qdx$: poſito ergo $m = X$ (quantitati itidem ex x & conſtantibus compoſitæ) proveniet $y = (zm) = \xi X =$ quantitati pure dependenti ab x & conſtantibus. Q. E. F.

Hæc dum ſcribo, pervenit ad me Nobiliſſimi Dn. TSCHIRNHAUSII ſchediaſma proximo *Actorum Novembri* inſertum. Per totum, fateor, profundas ſagaciſſimi ingenii meditationes ſpirat; doleo ſolum aſſequi me non poſſe, utrum noſtras obſervationes circa ipſius meditata geometrica approbet, an vero improbet. Abſit, ut putem Virum hunc, nulli in cognitione abſtruſioris Geometriæ ſecundum, improbare velle talia, quæ quandocunque libuerit, evidentiſſimis demonſtrationibus munire poſſum. Lubens ergo merito credam, quædam fuiſſe ab ipſo propoſita in *Nov.* 1695, * quæ limitanda erant; quæ autem limitatio nec a Fratre, nec a me (qui fere eandem haud ex communicato objecimus,) percipi potuit. Neque jam in dubium vocabo, acutiſſimum Authorem mirandas poſſidere methodos generales, quarum utinam nos participes faceret; ne, ſi quid ipſi humanitus accideret, talia nulli oblivioni tradenda ſimul interirent. Paucis interim notabo, quæ in noviſſima iſta reſponſione animadvertere licuit.

Etiam

* Supra N°. XXVIII.

Etiamnum ſuſtineo, quod theorema *fig.* 2, expoſitum *ſeſe extendat ad omnes curvas, ſive ſint per focos, ſive aliter quomodocunque &, ſi vis, libera manu deſcripta.* Quod autem Vir celeberrimus inde infert, me eſſe in ea ſententia, non omnes curvas per focos deſcribi poſſe, plane non ſequitur: quaſi vero una eademque curva, per focos deſcripta, non poſſet etiam mille aliis modis deſcribi. Exemplo nobis ſit, vel ſola Ellipſis, quæ, non tantum per filum, ſed etiam per regulam ſecundum latera anguli recti progredientem, aliterque, æque facile formatur. Hoc duntaxat ex aſſertione mea legitime ſequitur; theorema illud valere in omnibus curvis, non quatenus per focos tantum, ſed utcunque progenitæ conſiderentur. Atque ſic, ſalva mea aſſertione, non nego omnes curvas habere focos, ſaltem lineares; an vero etiam habeant ſimplices, ſeu puncta, ex quibus ſemper per fila delineari poſſint, hactenus a nemine demonſtratum eſt. TAB. VIII. N°. XXVIII. *Fig.* 2.

Quod præterea Vir ingenioſiſſimus innuit, *methodum tangentium inverſam, ante aliquot annos, magno in pretio ſe habuiſſe; jam vero tandem, non leves ob cauſas, eo loco non amplius a ſe haberi,* indicium utique eſt, ſibi eam adeo planam & tritam feciſſe, ut ipſi jam ut ludus ſit habendus; unde cum *nihil hactenus propoſitum viderit,* (ut ait) *quod ejus ope, cum operam dare ei licuit, non potuerit determinare;* videre deſidero alterum illum modum *parabolæ portiones inter ſe conferendi,* quem priori ſuo ſubſtituit, & cum pluribus ſpeciminibus communicandum pollicetur. Cæterum ingenue fateor, me nondum poſſe perſpicere, ex omnibus illis quæ allegat, quomodo theorema meum de reductione curvarum ad circulares, per alias evolutiones quam *Hugenianam,* augeri poſſit. Pro hoc, ſi habet methodum quam offert, grato animo excipiam, ſquandocunque communicare libuerit. Hoc tamen in anteceſſum præmonendum duco, non opus eſſe ut curvæ reducantur ad extenſiones ellipſeos, hyperbolæ, parabolæ, altiorisve curvæ, ſi id fieri poſſit per circulares, tanquam poſt rectam ſimpliciſſimas. Verum enim vero omnis omnino curva, quot-

cunque etiam habeat focos, per unicum ſemper poteſt deſcribi, id eſt, per evolutionem *Hugenianam.* Non video igitur, cur recurrendum eſſet ad evolutiones magis compoſitas, cum idem perpetuo obtineri poſſit per ſimpliciſſimam.

Subnectit Vir eruditiſſimus, ſe habere *ſingularia theoremata univerſalia* pro nova doctrina locorum; aſſeritque ſibi valde probabile videri, æqualitatem rectangulorum rectarum ſe interſecantium, (quam ego, præterquam circulo, infinitis aliis curvis competere nuper oſtendi) abſolute omnibus communem eſſe. Id quidem facile largior, ſi duas tantum rectas ſe interſecantes intelligat; ut fere innuere videtur, quando dicit *certiſſimum id eſſe, in ipſa quoque parabola, hyperbola, & ellipſi, hanc veritatem, quod duabus rectis ſe interſecantibus rectangula ſegmentorum inter ſe infinitis modis certa ratione ſint æqualia, demonſtrari poſſe.* Sed ridiculum prorſus fuiſſet ſi tale quid ut novum venditare voluiſſem; ſiquidem, prima ſtatim attentione, cuivis obvium eſt, omnem curvam, ſi non ſit circulus, poſſe a circulo ſecari in quatuor punctis; per quorum bina & bina tranſeuntes lineæ rectæ habebunt utique ſegmentorum rectangula æqualia; adeo ut hoc de omnibus curvis, non ſolum probabile, ſed omnino certum ſit. At ſenſus mei inventi longe alius eſt. Non enim duas ſaltem, ſed infinitas, ſed omnes rectas e puncto quodam egredientes, quæ ſecent curvas, volo ut faciant rectangula ſegmentorum ſuorum æqualia; atque hoc omnibus curvis convenire nemo demonſtrabit, cum contrarium potius in ipſis tribus ſectionibus conicis evinci poſſit. Quod ſupereſt, ſi theorematum ſuorum vires experiri velit, ſat amplam materiam habet applicandi illa in inquiſitione curvæ, quam in *Actorum menſe Junio* inſolutam relinquo; ut ſcilicet ſolidum ſub uno ſegmento & quadrato alterius, ſit ubique eidem æquale; cujus ſolutio mihi reperta eſt. Item quod nuper publice propoſui, quærat curvam, ita ut ſumma ſegmentorum ad potentiam datam elevatorum ſit perpetuo eadem. Hiſce, aliiſque, ſi ſatisfecerit (ut non dubitamus) Vir perſpicaciſſimus, haud aptiorem anſam nobis præbebit, de inventis ipſius

ipſius pro merito ſentiendi, quam ſi methodos ipſas, quas hucuſque latere nos voluit, tandem candide aperuerit.

N°. XXXVI.

JOHANNIS BERNOULLI

Principia Calculi Exponentialium, ſeu Percurrentium.

Mirari ſubit, Cl. Dn. NIEUWENTIIT *in Conſiderationibus ſuis ſecundis* nuper editis, conqueri celeberrimi LEIBNITII reſponſiones non tanti ſe ponderis deprehendiſſe, quæ objectionibus ſuis primum motis per totum ſatisfacerent. Credebam equidem noſtram calculandi methodum ſemet ipſam ſatis commendare, vel ſolo conſenſu tot tantorumque inventorum, in quæ, hactenus diverſis licet inſiſtentes viis, incidimus, quæque nullius unquam falſitatis convinci poterunt: quod ſane a methodo ſuſpecta, nedum erronea, expectari nec poteſt, nec debet Eſto nobis, inſtar omnium, unicum exemplum famoſi illius problematis catenarii; cujus ſolutiones; ad unum egregie conſpirantes, illuſtre Virorum par, HUGENIUS & LEIBNITIUS exhibuerunt; quibus ſimul mea acceſſit, ne in minimis quidem diſſentiens; Nob. HUGENIO ſua analyſi, nobis vero noſtra, ſed felicius utentibus: hac enim duce, eo uſque ultra ſimplicem ſolutionem proceſſimus, ut ipſe HUGENIUS mirabundus faſſus fuerit ingenue (vid. *Hiſtor. Oper. Erud.* quæ *Roterodami* editur, menſe Febr. 1693, p. 251.) ſe non poſſe imaginari, quomodo calculus eo nos perduxerit. *Acta Erud. Lipſ. 1697. Mart. pag. 125.*

Sed nolim hic reſpondere novis objectionibus Dn. NIEUWENTIIT; quod ipſe Acutiſſimus LEIBNITIUS, cujus potiſſimum res agitur, ſi ipſi neceſſum viſum fuerit (de quo tamen dubito) bonam cauſam vindicare non differet. Ultimam duntaxat aggrediar ſectionem *Secundarum* harum *Conſide-*

rationum; ut, quod jam aliquoties facere volui, anſam habeam exponendi modum tractandi æquationes curvarum, in quibus indeterminata exponentes ingreditur. Cujus inventionem eatenus mihi attribuere fas eſt; quod, jam ante quinquennium, ſponte mea eo penetraverim, Dn. LEIBNITIO non monente, ut ipſe fatetur in *Actis Anni* 1695, p. 314; quod utique non leve argumentum deberet eſſe, apud Dn. NIEUWENTIIT præſertim valiturum, calculum differentialem, exponentialibus curvis adhibitum, plane nullis laborare difficultatibus. Gaudebo interim, ſi explicatio mea prolixior Doctiſſimo NIEUWENTIITIO ſcopulum, quem forte in ſuccincta nimis *Leibnitiana* offendit, ſummoverit: ſin minus, pro publico tamen laboraſſe non pigebit.

Quantitatem elevatam ad potentiam indeterminatam (antequam hæc etiam LEIBNITIO conſiderata intellexiſſem) vocabam *percurrentem*, quia omnes poſſibiles dimenſiones quaſi percurrit. Hinc æquationes quantitatibus hujuſmodi conſtantes, ipſæque curvæ per illas deſignatæ, eodem mihi nomine veniebant. Quoniam vero *exponentialium* appellatio magno noſtro Geometræ arriſit, in illius honorem, hoc alterum nomen & ego aſciſcam; miſſo priori, ne, quod ſubinde accidit, diverſa ejuſdem rei denominatio Lectori confuſionem pariat.

Exponentialem igitur quantitatem concipiebam, ut medium quid inter algebraicam & tranſcendentem: accedit enim ad algebraicam, eo quod terminis finitis, ut ut indeterminatis, conſtet; ad tranſcendentem vero, quod nulla conſtructione algebraica exhiberi poſſit. Hinc colligere eſt, quam ſuperfluus fuerit jocus HUGENII, curvas exponentiales appellando *hypertranſcendentes*; cum ſerio potius, & congrue, illas nominare potuiſſet *hypotranſcendentes*. Eſt enim & ipſa Logarithmica (omnium profecto tranſcendentium ſimpliciſſima) ex hoc curvarum genere; omneſque aliæ exponentiales, ope hujus, conſtrui, & earum tangentes determinari poſſunt, ut ex jam dicendis patebit. Tria interim ſunt, quæ maxime ſuſpen-

penſum tenent Dn. NIEUWENTIIT, quo minus aſſenſum tribuat. 1. Quomodo una eademque indeterminata poſſit eſſe, in curva Logarithmica, de applicatarum genere, & ſimul abſciſſa alterius cujuſdam curvæ. 2. Quomodo ex æquatione $x^v = y$, deducatur hæc æquatio $vlx = ly$ (per lx, ly, lz, &c. intelligo logarithmos ipſarum x, y, z, &c.) 3. Quomodo lx poſſit eſſe $= \int \frac{dx}{x}$. Hæc ergo ſatis alias trita, quorum *originem ſe ignorare* fatetur, ipſum edocebo.

Eſto DE axis curvæ HGF, illique perpendicularis DC, axis Logarithmicæ AB: producatur applicata FE, donec occurrat Logarithmicæ AB in B, a quo demiſſa perpendicularis BC æqualis erit abſciſſæ DE: eſt autem BC applicata Logarithmicæ; ergo patet, qua ratione abſciſſæ DE cujuſcunque curvæ HGF, poſſint eſſe de applicatarum genere, non ſolum in Logarithmica, ſed in quavis etiam alia curva AB, & quidem ita, ut ſalva maneat relatio inter DE & EF, quocunque etiam modo creſcat DE, ſive æqualiter, ſive inæqualiter; adeo ut, ſumtis ex. gr. differentiis axis Logarithmicæ Cc æqualibus, nihilominus differentialis Fg ad differentialem Ee, ſeu ipſa FE ad ſubtangentem EL, ſuam generalem perpetuo ſervet relationem. Ad demonſtrandum ſecundum, quod vlx ſit $= ly$, inſpiciat, ſi placet, vulgares, quæ proſtant, Tabulas Logarithmicas, quæ e veſtigio ipſum docebunt, Logarithmum numeri quadrati, cubi, biquadrati, &c. eſſe duplum, triplum, quadruplum, &c. radicis: unde generaliter Logar. $x^v = v\,l\,x$; quid ergo ſi $x^v = y$, annon & eorum Logarithmi ſunt æquales, id eſt, $vlx = ly$? Supereſt tertium, quod ita oſtendo; ſi AD $= 1 =$ ſubtang. & BC $=$ numero, erit ut conſtat, DC Logarithmus ejuſdem; eſt autem, ex natura Logarithmicæ, ſubtang. in $Bn =$ BC in Cc, & per conſequens $Bn : BC = Cc$; hinc ſi BC ſit x, y, z, &c. & DC, lx, ly, lz, &c. erit $dx : x$, TAB. IX. N°. XXXVI.

$dy:y$, $dz:z$, &c. $= dlx$, dly, dlz, &c. ergo etiam ſummæ $\int\frac{dx}{x}$, $\int\frac{dy}{y}$, $\int\frac{dz}{z}$, &c. $= lx$, ly, lz, &c. Unde ſatis mirari nequeo, Doctiſſ. NIEUWENTIIT, qui eandem fere demonſtrationem ſibi format, hic diſcrimen quærere in literis, concedendo $\int\frac{dy}{y} = ly$, ſed dubitando an etiam $\int\frac{dx}{x} = lx$; quaſi arbitraria denominatio mutationem rei afferat. Regeret quidem, id de omnibus indeterminatis valere ſi abſolute conſiderentur; ſed hic x & y conſiderandas eſſe certo ad invicem reſpectu. Aſt quid tum? demonſtratio generalis eſt, & nulla conditione, nullo reſpectu limitata. Demonſtratum enim eſt, quacunque ratione creſcant De, DE ſeu bc, BC, quocunque demum appellentur nomine, ſive x, ſive y; ſive abſolute, ſive reſpective conſiderentur, perpetuo earum Logarithmos eſſe Dc, DC. Quod autem aſſumatur AD $=1=$ ſubtang. id compendii gratia tantum fit; quamcunque enim quantitatem, quidni ergo & ſubtangentem, unitati ſubſtituere tuto licet, ſi modo ad aſſumtam cæteræ omnes referantur. Diſcuſſis jam, ut opinor, difficultatum nebulis, venio ad ipſam exponentialium tractationem.

Quantitates exponentiales ſunt diverſorum graduum, quorum infimus (qui hactenus tantum fuerat conſideratus) eſt, quando exponens conſtat indeterminatis ordinariis, ut y^m, x^n, x^p; poſito m, n, p, eſſe quantitates ſimpliciter indeterminatas. Quantitas exponentialis ſecundi gradus eſt, cum exponens ipſe eſt quantitas exponentialis ut y^{m^n}; & ſic in univerſum, quantitas exponentialis cujuſcunque gradus habet pro exponente quantitatem exponentialem gradus proxime præcedentis. Idem etiam intellige de æquationibus & curvis exponentialibus ad ſuos gradus referendis. Nota interim, quod ſi æquatio conſtet ex diverſis diverſorum graduum exponentialibus, tunc æquatio, ut & curva per illam deſignata, ſortietur nomen a potiori. De quibus omnibus hæc habe:

Eſto

Eſto curva Logarithmica quævis AB, ſumtaque ſubtangente pro unitate, & ipſi æqualis prima applicata AD; ordinata BC quovis modo varians, ſive ſit de applicatarum, ſive de abſciſſarum genere alterius cujuſcunque curvæ, ſi modo per minima creſcat, ſive æqualiter, ſive inæqualiter, ſit $= x, y, z$; adeoque $DC = lx, ly, lz$; $Bn = dx, dy, dz$; $Cc = dlx, dly, dlz$, &c. $=$ (ut ſupra oſtenſum) $\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}, \frac{dz}{z}$ &c. Unde fluit regula generalis: *Differentiale Logarithmi utcunque compoſiti eſt æquale differentiali numeri diviſo per numerum; ut,* $dl\sqrt{(xx+yy)} = (xdx+ydy):(xx+yy)$.

Ad differentiandam ergo quantitatem exponentialem primi gradus m^n; fiat $m^n = t$, ergo $nlm = lt$; & differentiando, juxta calculum differentialem, $lmdn + ndlm = dlt$; at per regulam generalem $dlm = dm : m$ & $dlt = dt : t$; ideoque $lmdn + ndm : m = dt : t =$ (ob $m^n = t$) $dt : m^n$; unde dt ſeu $dm^n = m^n lmdn + nm^{n-1} dm$; id quod ſuggerit regulam primam ſpecialem pro exponentialibus primi gradus; poſſunt enim pro m & n quantitates intelligi quomodocunque ex indeterminatis compoſitæ.

Eſto jam exponentialis ſecundi gradus m^{n^p}, ponatur illa æqualis t, adeoque $n^p . lm = lt$: ſumtis utrobique differentialibus modo communi, $n^p dlm + lmdn^p = dlt$; quoniam autem per regulam primam ſpecialem $dn^p = pn^{p-1} dn + n^p lndp$; & per regulam generalem $dlm = dm : m$, $dlt = dt : t$; habebitur regula ſecunda ſpecialis pro exponentialibus ſecundi gradus, quæ hæc eſt $dm^{n^p} = n^p m^{n^p-1} dm + pn^{p-1} . m^{n^p} lmdn + n^p m^{n^p} lmlndp$. Eodem modo inveniuntur regulæ ſequentes pro altiorum graduum exponentialibus. Nec difficilius differentiantur quantitates quomodocunque ex illis compoſitæ, ut $dm^n p^q = p^q dm^n + m^n dp^q$; ubi ſi ſurrogetur valor ipſarum dp^q, dm^n modo ſupra inventus, prodibit differentiale quæſitum.

Hacte-

Hactenus explicata ſufficiunt pro generali exponentialium differentiandarum adumbratione: videamus paucis applicationem in uno alterove exemplo; quorum ſi aliam ſolutionem a noſtra diverſam tradiderit, vel ſaltem noſtram a vero abludere demonſtrarit Cl. NIEUWENTIIT, nobis magnus erit Apollo, cui libenter manu victas dabimus.

I Conſtruenda eſt curva, cujus natura exprimitur per hanc æquationem exponentialem $x^x = y$: ejuſque tangens determinanda. Sumtis Logarithmis, habetur $x\,lx = ly$: facta itaque Logarithmica AB, cujus ſubtangens ſit $= 1 =$ AD, ſitque DE vel BC $= x$, erit DC $= lx$; & per conſequens ſi fiat AD : BC = DC : DM, erit DM $= ly$, & MN $= y$ cui ſi æqualis applicetur EF ad abſciſſam DE, erit punctum F in curva optata HGF. Tangens in F determinatur ſic: Per regulam primam ſpecialem $dy = x^x\,dx + x^x\,lx\,dx =$ (ſubſtituto y loco x^x) $y\,dx + y\,lx\,dx$, id eſt $y + y\,lx : 1 = dy : dx = y$: ſubtang. $= \frac{1}{1 + lx}$. Hinc, ſumta EL tertia proportionali ad AD + DC & AD, erit FL tangens; quam proin in terminis ordinariis, id eſt, finitis, expreſſimus. Judicet jam Dn. NIEUWENTIIT, quo jure vehementer adeo exprobret Dn. LEIBNITIO, ac ſi ſui oblitus neſcio quod enorme crimen in Geometriam perpetraſſet, dum in NIEUWENTIITIANA methodo (meritiſſime) reprehendit, quod *non exhibeat rationem* dx *ad* dy, *ſubtangentialis ad ordinatam, in terminis ordinariis expreſſam, neque adeo ductu linearum aſſignabilium conſtrui poſſit.* Etenim, per ordinarium & aſſignabile, non ſolum algebraicam, ſed etiam tranſcendentem quantitatem, ſi modo ſit finita, comprehendit LEIBNITIUS. Circuli utique peripheria terminis algebraicis exprimi nequit; an ideo non eſt ordinaria, ſeu finita? an ideo minus aſſignabilis, cum tamen unico ductu circini aſſignetur? Hanc de aſſignabilitate mentem fuiſſe LEIBNITII, venari potuiſſet ex eodem, quem citat, *Actorum* loco, verſa ſaltem pagina A. 1695, p. 315,

315, l. 15, ubi acutiſſimus Author diſtinguit quantitatum genera in *ordinarias*, *infiniteſimas primas ſeu differentiales*, *differentio-differentiales ſeu infiniteſimas ſecundas*, &c. manifeſto certe indicio, per *ordinarias* nihil aliud intelligere quam quantitates finitas. Præterea fallitur Dn. NIEUWENTIIT, quando *rationis ſubtangentis ad ordinatam expreſſionem in terminis ordinariis* (algebraicis vult dicere) *impoſſibilem plane arbitratur*, *in caſu quo ipſa curvæ æquatio in terminis ordinariis exponi nequit.* Conſideret, ut de poſſibilitate convincatur, vel ſolam cycloidem primariam, cujus, ut ut tranſcendentis, ordinata tamen ad ſubtangentem rationem habet pure algebraicam, eam ſcil. quam obtinet abſciſſa ad applicatam circuli genitoris, ut notum eſt.

Sed revertimur ad curvam noſtram, cujus notabiles quaſdam proprietates recenſuiſſe non abs re erit; ideo præſertim quod ſummus LEIBNITIUS eam, a me ipſi primo propoſitam, ſua applicatione nequaquam indignam reputarit; quin potius, occaſione illorum quæ ſuper hac aliaque materia repereram & ipſi præſcripſeram, ipſe multa alia ſcitu digniſſima animadverteret, mecumque viciſſim communicaret.

Applicatæ AG, DH, ſubtangens puncti G, & AD, omnes inter ſe & ſubtangenti Logarithmicæ ſunt æquales.

Item, ducta ex H applicata ad Logarithmicam HP, & PR parallela ipſi HD ſecante curvam in O, erit OR omnium ordinatarum breviſſima, id eſt, punctum O omnium curvæ punctorum minime diſtat ab axe DE.

Habemus etiam generalem methodum quadrandi hujuſmodi figuras, quam ipſe LEIBNITIUS, licet ei conſimilem invenerit pro ingenii quo pollet acumine, haud tamen facile obviam eſſe ultro agnovit. Hanc interim animadverto quadraturam præ omnibus aliis memorabilem, quæ, ob curioſam ſeriem qua exprimitur, mirifice placuit huic Geometræ. Si enim AD, vel DH, vel AG vocetur 1, erit ſpatium

DAGOH = ſummæ hujus ſeriei $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5}$ &c.*

*. Videatur demonſtr. N°. CXLVIII. Tom. II.

II. Quod ſi proponatur curva, cujus æquatio $x^{y} = a$; habebitur ad Logarithmos redacta $ylx = la$, unde, ut ſupra, per Logarithmicam factum eſt, elicitur curvæ conſtructio. Differentiando autem, per Reg. 1. ſpec. erit $xlxdy = - aydx$, id quod ſubtangentem determinat.

III. Eſto curvæ æquatio $x^{x} = a^{y}$, & proinde $xlx = yla$, quod conſtructioni inſervit. Sumtis, per Reg. 1. ſpec. differentialibus, obtinetur $dx + lxdx = lady$; ex quo pariter ſubtangentis determinatio fluit. Obſervatu dignum hic venit, quod hujus figuræ quadratura citra ſeriem poſſit exhiberi, eſt enim $\int ydx = (2xxlx - xx) : 4 la$.

IV. Si proponeretur $a^{x} = y$, adeoque $xla = ly$; prodiret $yladx = dy$, id eſt ſubtangens foret $= 1 : la =$ conſtanti; unde concludendum, æquationem propoſitam ipſiſſimæ Logarithmicæ competere: unico ergo ductu calami *planam regiamque*, qualem Dn. NIEUWENTIIT deſiderat, *viam aperui*, *Logarithmicam*, *hoc tempore nulli non cognitam*, *ad æquationem exponentialem reducendi*.

V. Eſto jam exponentialis plurium terminorum, ex gr. $x^{x} + x^{c} = x^{y} + y$: ſumtis ſeparatim differentialibus cujuſque termini per reg. 1. ſpec. reperietur $dx^{x} = x^{x}dx + x^{x}lxdx$, $dx^{c} = cx^{c-1}dx$, $dx^{y} = yx^{y-1}dx + x^{y}lxdy$; quæ rite diſpoſita dabunt æquationem hanc $x^{x}dx + x^{x}lxdx + cx^{c-1}dx - yx^{y-1}dx = x^{y}lxdy + dy$; facto itaque ut dy ad dx, id eſt, ut $x^{x} + x^{x}lx + cx^{c-1} - yx^{y-1}$ ad $x^{y}lx + 1$, ita y ad quartam, erit hæc quarta ſubtangens quæſita curvæ propoſitæ: Nota interim, quod multitudo terminorum conſtructionem plane non impediat, cum enim, mediante Logarithmica, ſingulis ſeorſim aſſignari poſſit quantitas æqualis; patet utique quantitates iſtas, hoc modo aſſignatas & ſimul ſumtas, formare illam ipſam, quæ quæritur.

tuen-

Exempla huc uſque allata abunde illuſtrabunt proceſſum inſtituendum in aliis primi gradus exponentialibus; exque illis haud difficulter perſpicitur, quomodo methodus applicanda ſit ad altiores gradus; in omnibus enim par operandi ratio obſervanda eſt: quam ſi Nob. HUGENIUS tantæ raritatis & inſolentiæ deprehendit, ut non niſi ægre admiſerit; jam ſane, ſi etiamnum in vivis eſſet, haud egrius eſſet admiſſurus quam ipſum calculum differentialem, quem, ab initio mediocriter ſatis, poſtea vero, perſpecto inſigni ejus uſu, tanti æſtimabat, ut ejus præſtantiam & probitatem ultro agnoſcere & palam profiteri non fuerit dedignatus, ceu liquet ex iis, quæ exhibuit in *Actis* an. *1693*, p. *475*; ubi ipſe ingenue aſſerit, occaſione mei in eodem anno propoſiti problematis, ſe ad tales Geometriæ ſubtilitates perveniſſe, ope calculi differentialis, ad quas, ſine illo, vix admiſſus fuiſſet. Tanti itaque Viri libera confeſſio invitare deberet Doct. Dn. NIEUWENTIIT ad ſimilem ingenuitatem; vel ſiquidem illius authoritate uti velit, ut id faciat ad amplectendum potius, quam ad labefactandum noſtram analyſin.

N°. XXXVII.

JOHANNIS BERNOULLI

Curvatura Radii in Diaphanis non uniformibus, Solutioque Problematis a ſe in Actis *1696*, p. *269*, *propoſiti, de invenienda* Linea Brachyſtochrona, *id eſt, in qua grave a dato puncto ad datum punctum breviſſimo tempore decurrit; & de* Curva Synchrona, *ſeu radiorum unda, conſtruenda.*

TOT quidem hactenus apparuerunt methodi, quas *Maximorum* & *Minimorum* vocant, ut nihil fere tam ſubtile reſtare videatur hanc concernens materiam, quod earum acumine penetrare ſe poſſe non putent illi, qui ſe vel autores ipſos, vel autorum aſſeclas gloriantur. Interim jurent, quantum vo-

Acta Erudit. Lipſ. 1697. Mai. pag. 206.

volent, in verba magiſtri; videbunt, ſi tentare velint, noſtrum problema minime coërceri intra anguſtos methodorum ſuarum limites, qui eo uſque tantum ſeſe extendunt, ſi, ex datis pluribus infinitiſve quantitatibus invenienda ſit una *maxima* vel *minima*. Verum ubi ipſæ quantitates, quod in noſtro contingit, ex quibus eligenda maxima vel minima, non magis ſunt determinatæ, quam id ipſum quod quæritur; hoc opus, hic labor eſt. Ipſi illi inſignes Viri, CARTESIUS, FERMATIUS, aliique, qui olim ita acriter pro præſtantia ſuæ cujuſque methodi, tanquam pro focis & aris militabant, aut pro ipſis nunc eorum ſectatores, ingenue fateantur neceſſe eſt, non niſi methodos ab ipſis traditas ſcientibus hic aquam hærere. Non meum eſt, nec etiam volo, aliorum inventa explodere. Præſtiterunt utique multa, & finem quem ſibi propoſuerant egregie conſecuti ſunt. Quemadmodum enim de hujusmodi Maximorum & Minimorum conſideratione nil quicquam in eorum ſcriptis reperitur: ita pariter, pro aliis quam communibus reſolvendis, ſuas methodos non venditarunt.

Non ego polliceor univerſalem methodum, quam quis fruſtra quæreret; ſed peculiares modos, non ſolum quidem in hoc, ſed & in pluribus aliis ſuccedentes, quibus Problema hoc feliciter enodavi; ſolutionemque meam, dum alii alias quærerent, Celeb. LEIBNITIO ſtatim ſubmittere decrevi; ut illam quondam cum publico communicaret cum ſua, ſi quam reperiret; de quo quidem non dubitabam, ſagaciſſimi Viri ingenium plus ſatis compertum habens: & reapſe, dum hæc ſcribo, ex privatis ejus literis, quibus me crebro cohoneſtat, intelligo, ſupra ſpem ipſi placuiſſe Problema meum, & (quod illum, ut dicit, pulchritudine ſua, ut pomum Evam, ad ſe traheret) protinus ſolutionis factum eſſe compotem. Quid alii præſtiterint, exitus monſtrabit: dignum utique oportet ſit hoc Problema, cui ſolvendo aliquid temporis conſecrent Geometræ, cum tanto Viro, negotiis licet diſtractiſſimo, tale viſum fuerit, ut horam ſuam non inutiliter collocaſſe exiſtimaverit. Et id ipſum illis ſatis lucri eſto, quod, ſi ſolverint, ad ſecretiſ-

ſimas

ſimas veritates, quas ſine hoc vix ut aſſequantur, aditum habituri ſint.

Merito quidem miramur, quod HUGENIUS primus invenit, in *Cycloide vulgari* grave facere deſcenſus tautochronos, a quocunque *Cycloidis* puncto incipiat moveri: ſed neſcio, an non obſtupeſcas plane, cum dixero, hanc ipſiſſimam *Cycloidem*, ſeu *Tautochronam Hugenianam*, eſſe noſtram *Brachyſtochronam* quæſitam; ad cujus cognitionem duabus viis perveni, indirecta altera, altera directa. Inſiſtendo priori, mirum conſenſum detexi inter curvitatem radii luminis in medio continue variante, & *Curvam* noſtram *brachyſtochronam*; aliaque obſervavi, in quibus neſcio quid arcani ſubeſt, quod proderit in Dioptricis. Quamobrem verum erit, quod in propoſitione Problematis aſſerueram, *non in nuda ſpeculatione, ſed in aliis ſcientiis*, in Dioptricis puta, *uſum habere quam maximum.* Sed ut quæ diximus re ipſa confirmentur, en priorem ſolvendi modum!

FERMATIUS in Epiſtola ad DE LA CHAMBRE (Vid. *Epiſt.* CARTESII Lat. Tom. III, p. 147, & FERMATII Opera Mathem. p. 156 ſeqq.) ſtabilivit, radium luminis ex medio rariori in denſius tranſeuntem ita refringi ad perpendicularem, ut, habita ratione temporis, radius (qui a puncto luminante ad punctum illuminatum ſucceſſive procedere ſupponitur) viam faciam breviſſimam: ex quo principio oſtendit, ſinum anguli incidentiæ eſſe ad ſinum anguli refractionis in mediorum ratione data directa raritatum, vel reciproca denſitatum; id eſt in ipſa ratione velocitatum, quibus radius media penetrat. Quod poſtea acutiſſimus LEIBNITIUS in *Act. Erud.* 1682, p. 185 ſeqq. & mox Celeb. HUGENIUS in ſuo Tractatu *de Lumine*, p. 40, ſuccinctius demonſtrarunt, ipſumque principium phyſicum, vel metaphyſicum potius, quod FERMATIUS ſua demonſtratione geometrica contentus, & facile nimis de jure ſuo decedens, CLERSELERIO urgente, deſeruiſſe videtur, validiſſimis argumentis adſtruxerunt.

Si nunc concipiamus medium non uniformiter denſum, ſed

velut per infinitas lamellas horizontaliter interjectas diſtinctum, quarum interſtitia ſint repleta materia diaphana raritatis certa ratione accreſcentis vel decreſcentis; manifeſtum eſt, radium, quem ut globulum conſideramus, non emanaturum in linea recta, ſed in curva quadam (notante id jam & ipſo HUGENIO in eodem Tractatu *de Lumine*, ſed ipſam curvæ naturam minime determinante) quæ ejus ſit naturæ, ut globulus per illam decurrens celeritate continue aucta vel diminuta, pro ratione graduum raritatis, breviſſimo tempore perveniat a puncto ad punctum. Conſtat quoque, cum ſinus refractionum in ſingulis punctis ſint reſpective ut raritates medii vel celeritates globuli, curvam habere eam proprietatem, ut ſinus inclinationum ſuarum ad lineam verticalem ſint ubique in eadem ratione celeritatum. Quibus præmiſſis, nullo negotio perſpicitur, *Curvam Brachyſtochronam* illam ipſam eſſe, quam formaret radius tranſiens per medium, cujus raritates eſſent in ratione velocitatum, quas grave verticaliter cadendo acquireret. Sive enim velocitatum incrementa dependeant a natura medii magis minuſve reſiſtentis, ut in radio; ſive abſtrahatur a medio, & ab alia cauſa acceleratio eadem tamen lege generari intelligatur, ut in gravi; cum utroque in caſu curva breviſſimo tempore percurri ſupponatur, quid vetat, quo minus altera in alterius locum ſubſtitui poſſit?

Sic generaliter ſolvere licet Problema noſtrum, quamcunque ſtatuamus accelerationis legem. Eo enim reductum eſt, ut quæratur curvatura radii in medio ſecundum raritates, prout libuerit, variante. Eſto ergo medium FGD (*Fig.* 1) terminatum ab horizontali FG, in qua punctum radians A, verticalis AD axis curvæ datæ AHE, cujus applicatæ HC determinant raritates medii in altitudinibus AC, vel velocitates radii, ſeu globuli, in punctis M; radius incurvatus ipſe qui quæritur, AMB. Vocentur AC, x; CH, t; CM, y; differentialis Cc, dx; diff. nm, dy; diff. Mm, dz; conſtans quædam ad arbitrium aſſumta, a; Erit accepta Mm pro ſinu toto, mn ſinus anguli refractionis ſeu inclinationis curvæ ad verticalem, &

TAB. IX. N°. XXXVII. *Fig.* 1.

& proinde per ea, quæ modo diximus, mn eſt ad HC in ratione conſtante, id eſt, $dy : t = dz : a$; quod hanc ſuggerit æquationem, $ady = tdz$, ſeu $aady^2 = ttdz^2 = ttdx^2 + ttdy^2$; quæ reducta generalem dabit æquationem differentialem $dy = tdx : \sqrt{(aa - tt)}$ pro curva AMB quæſita. Atque adeo una opera duo inſignia problemata, opticum unum, mechanicum alterum, ultra quam ab aliis petebam, reſolvi; oſtendique, quamvis ex diverſiſſimis Matheſeos partibus ſint deſumta, ejusdem tamen eſſe naturæ.

Sumamus jam ſpecialem caſum, & quidem hypotheſin communem a GALILÆO primitus introductam & demonſtratam, quod velocitates gravium cadentium ſint in ratione ſubduplicata altitudinum emenſarum; in hoc enim proprie quæſtionis tenor conſiſtit. Quo ſuppoſito, curva data AHE erit parabola id eſt, $tt = ax$ & $t = \sqrt{ax}$, quæ ſi ſubſtituantur in æquatione generali, habebitur hæc $dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$ ex qua concludo Curvam *Brachyſtochronam* eſſe *Cycloidem vulgarem*. Si enim circulus GLK, cujus diameter $= a$, rotetur ſuper AG, & initium rotationis ſit in ipſo A; deſcribet punctum K cyloidem, quæ reperietur eandem habere æquationem differentialem $dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, poſitis AC, x, & CM, y; poteſt tamen hoc a priori & analytice inveniri ſic: $dx \sqrt{\frac{x}{a-x}} = xdx : \sqrt{(ax-xx)} = adx : 2\sqrt{(ax-xx)} - (adx - 2xdx) : 2\sqrt{(ax-xx)}$; eſt autem $(adx - 2xdx) : 2\sqrt{(ax-xx)}$ differentialis quantitas, cujus ſumma $\sqrt{(ax-xx)}$ ſeu LO; & $adx : 2\sqrt{(ax-xx)}$ eſt differentialis ipſius arcus GL; ideoque, ſummata æquatione $dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, habebitur y ſeu CM = GL — LO, ergo MO = CO — GL + LO; quoniam vero (aſſumta CO = ſemiperipheriæ GLK) CO — GL = LK, erit MO = LK + LO, &, ablata communi LO, erit ML = LK; quod docet curvam KMA eſſe Cycloidem.

Oſtendendum adhuc reſtat, (ut problemati pleniſſime ſatisfiat

fiat) quomodo a puncto dato, tanquam vertice, deſcribenda ſit *Brachyſtochrona*, ſeu Cyclois, tranſitura per aliud punctum datum; quod ſic facillime expeditur: Conjungantur duo puncta data A, B, (Fig. II.) per lineam rectam AB, & ſuper horizontali AL deſcribatur Cyclois, quæcunque libuerit, initium ſumens in A, ſecanſque rectam AB in R; quo facto, fiat ut AR ad AB, ita diameter circuli genitoris Cycloidis ARS ad quartam, quæ erit diameter circuli genitoris Cycloidis quæſitæ ABL tranſituræ per B.

TAB. IX. N°. XXXVII. *Fig.* 2.

Antequam finiam, non poſſum, quin iterum admirationem meam prodam, animo revolvens inexpectatam illam identitatem *Tautochronæ Hugenianæ* noſtræque *Brachyſtochronæ*. Quod notabile præterea exiſtimo, illud eſt, quod hæc identitas in ſola hypotheſi GALILÆI reperitur: adeo ut, vel ex eo, conjicere liceat, illam naturæ eſſe conſentaneam; quod, quemadmodum ſemper operari ſolet modo ſimpliciſſimo, ita & hic per unam eandemque lineam præſtet duo diverſa officia, cum in quavis alia hypotheſi, duabus ad id opus eſſet lineis, alia nempe pro oſcillationibus æque diuturnis, & alia pro celerrimo deſcenſu. Ut, ſi ex. gr. celeritates gravium cadentium eſſent, non in ſubduplicata, ſed ſubtriplicata ratione altitudinum; *brachyſtochrona* foret algebraica, *tautochrona* autem tranſcendens; verum ſi celeritates eſſent ut ipſæ altitudines; utraque fieret algebraica, illa quidem cicularis, hæc vero recta.

Non ingratum fore Geometris judico, ſi appendicis loco, ſolutionem ipſis dedero problematis conſideratione pariter digniſſimi, quod ex occaſione præcedentis inter ſcribendum in mentem incidit: *Quæritur in plano verticali* (fig. III.) *curva PB, quam* Synchronam *appellare liceat, ad cujus ſingula puncta B, grave ex A deſcendens per Cycloides conterminas AB æquali tempore perveniret.* Sit AG horizontalis, & AP verticalis. Senſus problematis talis eſt, ut deſcripta ſuper AG Cycloide quacunque, abſcindatur ex illa portio AB; ad quam percurrendam ex A deſcendens grave idem tempus requirat, quod requireret ad decidendum ex determinata altitudine verticali

TAB. IX. N° XXXVII. *Fig* 3.

AP;

…um B in *Curva Synchrona* PB

…quæ ſupra diximus de radio lu-
…nc curvam eam ipſam eſſe ,
…ct. *de Lumine* , pag 44 , in
…præſentat , vocatque *undam*
…los ex puncto luminoſo ema-
…time notat HUGENIUS ;
…loidibus AB , commune ini-
…rectos occurrit. Quod ſi Pro-
…etricum reductum, proponere
… , *quæ omnes Cycloides commu-*
…res magnæ molis fuiſſet Geo-
…qua deſcenſum gravium reſpi-
…onſtruo. Sit Cycloidis ABK
… diameter GK : abſcindatur
…rtionali inter determinatam aſ-
…K ; dico ductam LB paralle-
…ycloidem ABK in puncto B.
…exercere velit, quærat lineam,
…urvas (non quidem algebrai-
… ſed) tranſcendentes, ex. gr.
… axe , & per idem punctum

Nº. XXXVIII.

LETTRE DE MR. JEAN BERNOULLI

A Monſieur BASNAGE, *Docteur en Droit*, *Auteur de* l'Hiſtoire des Ouvrages des Savans.

Sur le Probléme des Iſoperimetres.

MONSIEUR,

Hiſtoire des Ouvrages des Sçavans. Juin 1697. pag. 452.

IL y a préciſément un an que je propoſai le Problème de la plus vîte deſcente, dans les *Actes de Leipſic*, comme tout nouveau, ne ſçachant pas alors qu'il avoit été tenté déja par GALILE'E. J'accordai aux Géométres ſix mois de tems pour s'y appliquer; promettant de publier mes reſolutions, ſi après le terme expiré il ne ſe trouvoit perſonne qui donnât les ſiennes. Cependant Mr. LEIBNITZ, ce grand Géométre, n'eut pas plutôt appris la nouvelle de ce Problême, qu'il le jugea digne de ſon application, & de celle de tous les plus habiles Mathématiciens de l'Europe. Il me fit donc l'honneur de m'écrire, pour me mander qu'il en étoit heureuſement venu à bout; mais qu'il le trouvoit ſi beau & ſi curieux, (à cauſe de l'adreſſe toute ſinguliére dont il s'y falloit prendre) qu'il me prioit de prolonger le terme juſqu'à Pâques 1697, pour avoir le tems de divulguer auſſi ce Probléme dans les païs éloignés; particuliérement en Italie, & en France, où les *Actes de Leipſic* ne pourroient arriver que fort tard.

Ne pouvant donc refuſer cette demande à une Perſonne pour qui j'ai toute l'eſtime qui eſt dûë à un homme, qui a tant de rares mérites en toute ſorte de Sciences; j'ai pris le deſſein de notifier aux Géométres cette prorogation, par un imprimé que je don-

donnai au jour, * au commencement de cette année ; ne doutant nullement, qu'il n'y en eût quelques-uns, qui ne recevant pas réguliérement les *Actes de Leipſic*, ſeroient bien aiſes d'apprendre par là la propoſition du Probléme, & à qui par conſéquent il pourroit prendre envie de perdre (s'il faut ainſi dire) quelques heures à une recherche ſi utile, qui aide à pénétrer dans la plus fine Géométrie.

En effet mon imprimé tomba entre les mains de pluſieurs perſonnes, qui n'avoient pas ſu auparavant la premiére publication : Cependant comme on trouve toujours de différens Juges, mon Probléme eut le malheur d'être préſenté à un certain Mathématicien dans nôtre voiſinage. Il répondit avec dédain: *que ce Probléme étoit bon pour les Allemans, mais que les Hollandois n'y répondroient pas.* Suivant en cela la coutume de ceux qui mépriſent, d'un air impérieux, tout ce qui ſurpaſſe leur foible portée, comme le renard de la Fable. *Spernit indoctus quod nequit aſſequi.*

Il y eut d'autres Juges plus équitables, qui à la vérité ont bien reconnu la beauté de mon Probléme, & qui ont même employé toutes leurs forces pour rompre la barriere; mais faute de nôtre nouvelle Analyſe, ou pour n'y être pas ſuffiſamment verſés, ils ont été obligés de lâcher priſe, malgré toute la vigueur de leur violens efforts ; ſans pourtant que cela leur ait fait perdre en rien l'eſtime qu'ils avoient conçûë pour nôtre queſtion ſi rare, qui leur a donné quelque peine, mais non point inutile ; car elle aura été recompenſée par le plaiſir qu'ils ont eu de faire de nouvelles découvertes, qu'ils n'auroient peut-être jamais faites ſans cette occaſion, & même de voir le défaut de leur méthode, & avec le tems le remède qu'il faut y apporter.

C'eſt ainſi, Monſieur, que mon Probléme ayant paſſé par l'examen de pluſieurs en Hollande, demeura tout irréſolu. Il paſſa donc de là en Angleterre, là où j'avois grande eſpérance qu'il trouveroit un deſtin plus favorable, puiſqu'il y a dans ce

* N°. XXXIII.

païs-là quelques excellens Géométres qui ſe ſervent adroitement de nôtre méthode, ou d'une autre tout-à-fait ſemblable à la nôtre. Effectivement le mois de Janvier des *Tranſactions Philoſophiques* * imprimées à Londres, que vous avez eu la bonté de m'envoyer, me fait voir que je ne me ſuis point trompé, y ayant trouvé une Conſtruction de la *Courbe de la plus vite deſcente*, parfaitement convenable à la nôtre. Quoique l'Auteur de cette Conſtruction, par un excès de modeſtie ne ſe nomme pas; nous ſavons pourtant indubitablement par pluſieurs circonſtances que c'eſt le célébre Mr. NEWTON: & quand même nous ne le ſaurions point d'ailleurs, ce ſeroit aſſez de le connoître par cet échantillon, comme *ex ungue leonem.* Ce ſavant Homme eſt très-digne de la louange, que j'ai promiſe à ceux qui donneroient une réſolution légitime de ma queſtion. J'avouë néanmoins que toute grande que je penſerois la faire, elle ſeroit petite à l'égard de celles, qu'il s'eſt déja acquiſes, par la publication de ſon Ouvrage incomparable, dans lequel il fait voir tant de profondeur, & tant de pénétration d'eſprit, que dès le moment que ce Probléme me vint en penſée, ces deux excellens Maîtres, ſavoir Mrs LEIBNITZ & NEWTON, ſe préſentérent les premiers à mon eſprit, comme capables de dénouer le nœud, quand perſonne autre ne le feroit.

Il ſeroit à ſouhaiter ſeulement que Mr. NEWTON eût fait comme nous, c'eſt-à-dire, qu'il eût auſſi publié la méthode qui l'a conduit à la connoiſſance de la Courbe cherchée; car c'eſt de là que le Public tire le plus de profit: ou du moins, s'il a voulu cacher l'analyſe, il n'auroit pas mal fait, & il ne feroit pas mal encore, d'affermir ſa Conſtruction par une Démonſtration ſynthétique, telle que ma méthode m'a fournie; par laquelle je prouve démonſtrativement, à la maniére des Anciens, qu'il n'y a qu'une ſeule ligne courbe tirée d'un point à l'autre, ſelon laquelle le corps peſant deſcende au moindre tems, & que cette Courbe eſt la *Cycloïde commune*

* *Tranſ. Phil.* N°. 224. pag. 384.

mune, ou comme quelques-uns l'appellent la *Roulette* ; ce qui détruit entiérement la penſée d'un certain Mathématicien * du premier rang; qui croyoit, qu'il y avoit pluſieurs lignes courbes qui pouroient ſatisfaire au requis.

Cependant ayant trouvé deux différentes méthodes, une indirecte, & une directe, qui déduit la réſolution du fondement même de la choſe, en conſidérant les *maxima & minima*, laquelle m'a mené à cette démonſtration ſynthétique dont je viens de parler ; je n'en ai pourtant publié que l'indirecte ; partie, que je la croyois ſuffiſante pour convaincre celui qui voudroit douter de la vérité de nos réſolutions, partie auſſi, qu'elle donne en même tems la réſolution de deux fameux Problémes d'Optique, dont feu Mr. HUYGENS fait mention dans ſon *Traité de la Lumiére*, pag. 44. ſans en oſer entreprendre la détermination ; ſavoir de trouver la courbure du rayon de la lumiére, & la courbure de l'*Onde* de la lumiére, c'eſt-à-dire la ligne qui coupe perpendiculairement tous les rayons partans d'un même point lumineux : car je fais voir, ce qui eſt admirable, que ſi un diaphane commençant par le point lumineux, & deſcendant verticalement change continuellement de rareté, en même raiſon que ſont les viteſſes acquiſes d'un corps peſant qui tombe du même point lumineux, la Courbe de la plus vite deſcente ſera préciſément la même que celle du rayon, c'eſt-à-dire, que l'une & l'autre ſera la Roulette ou la Cycloïde ; & la Courbe que j'appelle *Synchrone*, & dont je donne une Conſtruction très-ſimple, ſavoir celle qui détermine les portions, parcouruës en tems égaux, de toutes les Cycloïdes décrites d'un même commencement, & ſur une même baſe horizontale, ſera auſſi parfaitement la même que celle de l'Onde, qui ſe fait dans ledit diaphane par le point rayonnant ; car l'une & l'autre ſera perpendiculaire à ces Cycloïdes.

Il eſt auſſi à remarquer, que cette identité de ces Courbes, ne ſe rencontre pas ſeulement dans l'hypothèſe de GA-

 LILE'E,

* DE TSCHIRNHAUSEN. Voiés *Acta Erudit. Lips.* 1697. Mai. pag. 221.

LILE'E, lorſque les viteſſes acquiſes des chutes ſont en raiſon ſousdoublée des hauteurs verticales ; mais en toute autre hypothèſe. De ſorte que ces deux ſpéculations, priſes de deux ſi différentes parties des Mathématiques, telles que ſont la Dioptrique & la Méchanique, ont entre elles une liaiſon abſolument néceſſaire & eſſentielle.

Voilà donc la raiſon pourquoi je n'ai donné au jour que la voye indirecte, en ſupprimant encore la directe ; * ce que Mr. LEIBNITZ lui-même m'a conſeillé de faire, voyant que celle-ci, toute ſimple qu'elle eſt, étoit d'une grande conſéquence, dont quelques-uns, qui ſont accoutumés de faire parade aux dépens d'autrui, ſe pourroient finement ſervir pour en tirer quelques petites nouvelles découvertes, ce qui leur ſuffiroit déja pour s'en attribuer la poſſeſſion & toute la gloire de l'invention. Cependant, comme je n'envie rien aux honnêtes gens, je n'ai pas fait difficulté de communiquer cette méthode à Mr. le *Marquis de* L'HOSPITAL, qui comme Mr. LEIBNITZ, l'a fort approuvée, en y remarquant je ne ſai quoi de ſurprenant & d'extraordinaire. Je ne refuſe pas non plus d'en faire part à qui voudra ; on n'a qu'à me la demander par un mot de Lettre.

Mr. LEIBNITZ, en cherchant nôtre Courbe de queſtion, eſt parvenu d'abord à une très-belle proprieté, qui n'a point été conſiderée juſqu'à préſent ; voici ce que c'eſt. Si on s'imagine une ligne droite verticale, tirée du point ſupérieur d'où le poids commence à deſcendre le long de la Courbe, les ordonnées, ou les lignes droites horizontalès compriſes entre la droite verticale & entre la Courbe, ſeront en même raiſon que les Segmens correſpondans d'un Cercle décrit ſur la plus grande largeur de la Courbe, & qui en touche la baſe. Or il démontre, dans ce qu'il vient de publier, que cette proprieté convient à la Cycloïde, dont le Cercle generateur eſt celui même qui a les Segmens proportionels aux ordonnées extérieures de la Cycloïde. Nous pouvons tirer grand uſage de cette

* Voiez la Méthode directe N°. CIII.

te nouvelle découverte; Car comme la *Quadratrice* de DINOSTRATE eſt propre pour la ſection des Angles ou des ſecteurs de Cercles; ainſi la Cycloïde, outre qu'elle fait la même choſe, nous apprend maintenant une maniére très-aiſée de couper les Segmens circulaires en raiſon donnée, ce qui, à mon avis, eſt de beaucoup plus important. La Cycloïde eſt donc préferable à la Quadratrice; d'autant plus qu'on la peut décrire par un mouvement continu très-ſimple, au lieu que celle-ci ne ſe conſtruit que par l'invention de pluſieurs points.

Pour revenir à nôtre ſujet, Mr. LEIBNITS remarque en GALILE'E deux fautes conſiderables: c'eſt que cet homme-là, qui étoit, ſans contredit, le plus clairvoyant de ſon tems dans cette matiére, étant cependant deſtitué de nôtre nouvelle Analyſe, vouloit conjecturer que la Courbe de la *Chainette* étoit une Parabole *, & que celle de la *plus vite deſcente* étoit un Cercle †: au lieu que la premiére, comme Mr. LEIBNITS a fait voir le premier, ſe détermine par les Logarithmes, ou, comme j'ai montré, par les arcs paraboliques étendus en lignes droites; & au lieu que la ſeconde, dont je ſuis le premier inventeur, eſt la Cycloïde, c'eſt-à-dire, qu'elle ſe conſtruit par la rectification des arcs circulaires: en ſorte que dans l'une & l'autre, GALILE'E a deviné quelque choſe d'approchant,

Quand à la reſolution de Mr. le *Marquis* de l'HOSPITAL, qui paroit dans le même mois de Mai des *Actes de Leipſic* ‡; elle s'accorde auſſi parfaitement avec les nôtres. Il n'a pas ajoûté l'analyſe; mais, comme il m'a fait ſavoir par une Lettre particuliére, ſa méthode eſt fondée ſur mes principes, que je lui avois communiqués autrefois, pour la recherche generale des *funiculares*, ou des Courbes des *chainettes*, lorsqu'on conſidére les cordes ou les chaines d'une peſanteur *non-uniforme*. Ainſi Mr. le Marquis a réduit avec adreſſe la Courbe de la plus vite deſcente à une eſpéce de *funi-*

* GALILÆI. *De Motu & Mechanic.* Dial II. pag. 131. Edit. Bat. 1699.
† GALILÆI *Ibid.* Dial. III. Prop. 36. Schol. *pag.* 209.
‡ *Acta Erud. Lipſ.* 1697. Mai. pag. 217.

funiculaire; ce qui eſt aſſûrément fort curieux. Il avoue que ce Probléme, qu'il n'a reſolu que ſur la fin du dernier terme, lui a paru très-difficile; mais qu'il étoit empêché de s'y appliquer plutôt ſérieuſement, par une longue maladie.

Il me reſte encore à dire quelque choſe ſur la réſolution de mon *Frére*; ce que je fais d'autant plus volontiers, que j'y trouve de nouvelles propoſitions, qui me touchent en particulier. Il ne nie pas que mon Probléme ne ſoit dans le nombre de ceux, qui par leur ſubtilité ſont beaucoup au deſſus des autres, qui ſe réſolvent par la méthode ordinaire des *Maximorum & Minimorum*. Il eſt à préſumer, (puiſqu'il dit qu'étant ſollicité par Mr. LEIBNITZ, il n'a plus voulu éviter la *peine* de s'y attacher,) que ce Probléme l'a occupé long-tems, & qu'il lui a donné grande peine. En effet, il croyoit pendant long-tems avec GALILE'E, que nôtre Courbe étoit un Cercle: ce dont je m'étonne, puiſque ces ſortes de Problémes ne ſont point ſujets à un grand travail, ni à un calcul prolixe, ou pénible; comme ſont ordinairement les Problémes algébraïques: au moins je puis dire, qu'à l'heure que je me ſuis propoſé ce Probléme, je l'ai auſſi réſolu; non point par hazard, comme quelqu'un ſe perſuade, mais de propos déliberé, comme s'il m'avoit été propoſé par un autre. Mrs. LEIBNITZ & NEWTON en diront autant; car l'un & l'autre s'eſt rendu maître de la ſolution le premier jour qu'ils ont vu le Problême.

Quoiqu'il en ſoit, mon Frére trouva enfin la véritable reſolution, par une méthode tout-à-fait la même, ou fort peu differente de celle de Mr. LEIBNITZ, dont il lui a plu me faire part il y a long-tems, dans ſes Lettres particuliéres; nonobſtant que je trouve dans celle de Mr. LEIBNITZ le raiſonnement plus ſuccint, ſans tous ces détours *d'analogies*, dont mon Frére ſe ſert pour appuyer le ſien. Ainſi donc mon Frére fait le quatriéme de ceux, que les trois grandes Nations, l'Allemagne, l'Angleterre, & la France, chacune le ſien, nous ont donné, pour concourir avec moi dans une ſi belle recherche,

che, en trouvant tous une même vérité. Ce merveilleux accord eſt donc capable de ſervir de preuve de la bonté de nos méthodes, auprès de ceux qui n'ont pas le tems de les examiner, ou qui, ſans les entendre, les veulent renverſer.

Mon Frére fait auſſi mention *de Curva refractionis*, c'eſt-à-dire, de la courbure du rayon de la lumiére; diſant qu'en ſuivant les mêmes traces, on la trouvera avec une pareille facilité; cependant je ſuis étonné qu'il n'ait pas vû que ces deux Courbes (qu'il croioit différentes) n'en font qu'une ſeule, comme j'ai dit ci-deſſus.

A l'occaſion de ces ſpéculations, mon Frére nous aſſûre, qu'il s'eſt procuré un accès libre à la connoiſſance des choſes beaucoup plus ſublimes & plus difficiles. Pour en donner un échantillon, il nous propoſe à ſon tour deux autres Problémes, s'adreſſant particuliérement à moi, en ces termes. *Si vicem reddere volet, (Frater) ſequens generale tentabit: Quæritur ex omnibus iſoperimetris, ſuper communi baſi BN conſtitutis, illa BFN, quæ non ipſa quidem maximum comprehendat ſpatium, ſed faciat, ut aliud curva BZN comprehenſum ſit maximum, cujus applicata PZ ponitur eſſe in ratione quavis multiplicata, vel ſubmultiplicata, recta PF, vel arcus BF, hoc eſt, quæ ſit quotacunque proportionalis ad datam A & rectam PF, curvamve BF? Huic ne detrectare poſſit, adjungimus alterum, quod majorem cum ſuo affinitatem habet; ubi quæritur, quænam ex infinitis Cycloïdibus idem initium habentibus, ac ſuper eadem baſi horizontali conſtitutis, illa ſit, per quam deſcendens grave, minimo tempore, ex initio communi ad datum perpendiculum appellat.* TAB. X. N°. XXXVIII.

Et cum iniquum ſit, ut quis, ex labore in alterius gratiam, & cum proprii temporis diſpendio, rerumque ſuarum damno ſuſcepto, nihil emolumenti percipiat; prodit Non nemo, pro quo caveo, qui ſoluturo Fratri, ultra laudes promeritas, honorarium 50 imperialium decrevit; hac tamen lege, ut intra tertium ab hujus publicatione menſem ſe ſuſcepturum promittat, ipſaſque ſolutiones finito

anno, utcunque licet per quadraturas, exhibeat. Hoc enim elapſo, ſi nemo dederit, meas exhibebo, &c.

Quelques difficiles que ces Problémes paroiſſent, je n'ai pas manqué de m'y attacher à l'inſtant même que je les ai lus: mais voyez avec quel ſuccès; au lieu de trois mois qu'on me donne pour ſonder le gué, & au lieu de tout le reſte de cette année pour trouver la réſolution, je n'ai employé en tout que trois minutes de tems pour tenter, commencer, & achever d'approfondir tout le myſtére; & bien au delà: Car je donnerai les reſolutions mille fois plus generales que ne ſont les Problémes, ſavoir qu'au lieu qu'on veut ſeulement que PZ ſoit comme une certaine puiſſance de PF; j'enſeignerai une régle generale pour décrire la Courbe cherchée BFN, lorſque PZ doit être compoſée de PF, & de la donnée A, de quelque façon qu'on ſe puiſſe imaginer, c'eſt-à-dire, ſi ſur l'axe BG paralléle à PF on conçoit une Courbe donnée quelconque BH, dont les ordonnées GH; j'énonce le Probléme generalement ainſi: *On demande la conſtruction de la Courbe BFN, qui de toutes les iſopérimétres ſoit telle, qu'ayant pris ſur les appliquées prolongées FP, les lignes PZ, égales aux GH appliquées correſpondantes de la Courbe donnée BH, il s'en faſſe une autre Courbe BZN, dont l'eſpace enfermé NBZN ſoit le plus grand de tous les autres imaginables, qui ſe pourroient ainſi faire par les autres iſopérimétres BFN.* Y a-t-il donc rien de ſi general que cela? Car, ſelon la propoſition de mon Frére, la Courbe donnée BH ne ſeroit que du genre des paraboles; au lieu que ma conſtruction eſt également facile, quelle que ſoit la Courbe BH.

Pour ce qui eſt de l'autre Probléme, par lequel on demande d'entre toutes les Cycloïdes, qui ont le même commencement & la même baſe horizontale, celle ſuivant laquelle le corps peſant arrive le plus vite à une ligne verticale donnée; il eſt vrai que c'eſt là proprement le Probléme, pour la reſolution duquel ce genereux *Non nemo* me promet le prix de 50

écus

écus blancs; d'ou je conclus que la difficulté lui en a paru ſi effroyablement grande, qu'il ne pouvoit point ſe perſuader qu'il y eût homme au monde capable de la ſurmonter. Cependant, voici comme la Fortune ſe jouë des hommes; cette inconſtante ne lui ayant montré qu'un chemin très-rude & très-épineux, m'a été ſi favorable, qu'elle m'a mené par une voye douce, très-courte, & tres-aiſée; par laquelle j'ai même plus trouvé que je ne cherchois. Car je détermine auſſi quelle Cycloïde il faut prendre, ſi à la place de la droite verticale, on prend toute autre ligne oblique donnée de poſition. Enfin tout cela n'eſt qu'un ſimple. Corollaire de ce que j'ai déja publié ſur la Courbe *Synchrone*; en ſorte que nôtre *Non nemo* ſera bien ſurpris de ſe voir ſatisfait ſur ſa queſtion au même mois des *Actes*, où il la propoſe. Ma méthode eſt ſi féconde, qu'elle n'en demeure pas là; mais elle paſſe plus outre, en reſolvant auſſi le Probléme, ſi à la place des Courbes de la plus vite deſcente, c'eſt-à-dire, à la place des Cycloïdes, on ſubſtitue des Courbes de quelque autre eſpéce que ce ſoit; par exemple, des Cercles, ou des paraboles; ce que mon Frére tient pour ſi deſeſperé, que ſans le vouloir ſeulement entreprendre, il ſe contente de l'avoir propoſé, diſant: *Qui ſpeculationem de Maximis & Minimis promovere volet, tentabit. Nobis ſufficiat propoſuiſſe.*

Au reſte, j'ai déja envoyé à Mr. LEIBNITS mes réſolutions, & je l'ai prié d'être nôtre Juge; il eſt donc juſte, & néceſſaire que l'Inconnu prometteur remette de même le prix entre les mains du Juge; ce qu'il ne refuſera pas de faire étant honnête homme, comme j'eſpére. Auſſi-tôt que cela ſera fait, Mr. LEIBNITS publiera mes réſolutions, & prononcera en même tems la Sentence, ſi elles ſeront légitimes ou non. Cependant je proteſte, par avance, que ce n'eſt pas l'envie de gagner, mais uniquement l'interêt des pauvres, pour leſquels j'ai deſtiné cet argent, qui me fait agir avec empreſſement: Car j'aurois honte de prendre de l'argent pour une choſe, qui m'a donné ſi peu de peine, & qui ne m'a point fait perdre de tems, ſi ce n'eſt ce que j'employe à écrire ceci. Quand même

elle m'auroit donné quelque occupation, ce n'eſt pas là le moyen de recompenſer l'eſprit: l'ardeur noble, qu'il ſent pour ces belles ſciences, eſt bien au deſſus de tout l'argent, & la moindre découverte qu'on y fait vaut plus que toutes les richeſſes. Ce ne ſont donc que les ames mercenaires, qui me voudront blâmer, parce que je n'ai pas auſſi promis une ſomme d'argent, lorſque j'ai propoſé mes Problémes. Je dis cela, afin que celui qui a voulu exercer ſa libéralité, en m'offrant un prix, ſache qu'il feroit tort aux pauvres, & non point à moi, s'il vouloit retracter ſa parole. Je ſuis *&c.*

N°. XXXIX.

PROBLEMES A RESOUDRE.

Journal des Savans 1697. 33. Journal du 26. Aouſt p. 394. Ed. de Paris, pag. 636. Edit. de Holl.

VOICI quelques Problémes *De Maximis & Minimis*, que Monſieur BERNOULLI, Profeſſeur à *Groningue*, propoſe aux Géométres, qui croyent avoir des méthodes pour toutes les queſtions de cette nature.

I. Deux points étant donnés ſur une ſuperficie convexe, on demande une maniére d'y décrire géométriquement d'un de ces points à l'autre, la ligne la plus courte; ſuppoſé que cette ſurface ſoit géométrique, telles que celles de la Sphere, du Cone, du Cylindre, dans leſquelles le Probléme eſt fort facile, de quelque maniére que les points ſoient ſitués; mais dans les Conoïdes, & dans les Sphéroïdes, il devient très-difficile. C'eſt pourquoi on propoſe pour exemple la ſuperficie du Conoïde parabolique, dans laquelle il faille tirer la ligne la plus courte, qui joint deux points ſitués, non pas dans le même Méridien, [ce qui ſeroit encore facile, puiſque la ligne recherchée ſeroit la portion du même Méridien compriſe entre ces deux points;] mais ſitués dans des Méridiens differens:

ferens: J'appelle ici *Méridien* toute parabole tirée du ſommet du Conoïde juſqu'à ſa baſe.

II. Toutes les ellipſes poſſibles, ACB, ACB, ACB, &c. étant décrites ſur l'axe AB donné de grandeur, & en ayant retranché des Segmens égaux CDB, CDB, CDB, &c. On demande lequel de ces Segmens a le point C, le plus proche du point B; c'eſt-à-dire, qu'il faut determiner l'ellipſe ACB, dans laquelle la droite CB ſoit la plus courte. TAB. X. N°. XXXIX. *Fig.* 1.

III. Les mêmes choſes ſuppoſées, on demande la nature & les touchantes de la Courbe CCC.

IV. Sur l'axe BA donné de poſition étant décrites toutes les Courbes d'une même eſpèce, par exemple, toutes les paraboles BC, BC, BC, &c. Et en ayant coupé des arcs égaux BC, BC, BC, &c. On demande le point C le plus proche du point B; c'eſt-à-dire, qu'il faut déterminer lequel de ces arcs a la plus courte ſoutendente BC. TAB. X. N°. XXXIX. *Fig.* 2.

V. Les mêmes choſes ſuppoſées, on demande la nature & les touchantes de la Courbe CCC.

VI. Une ligne droite DD étant donnée de poſition, laquelle rencontre les Courbes BC aux points D; On demande le plus petit de tous les arcs BD.

Voiez N°. LI. *Art.* 2.

N°. XL.

LETTRE DE Mr. BERNOULLI,

Profeſſeur de Groningue, *à Mr.* VARIGNON. *Du* 15. *Octobre* 1697. *

Sur le Probléme des Iſopérimétres.

Journal des Savans 1697. 39. Journal du 2e. Dec. p. 458. Edit. de Paris, pag. 737. Edit. de Holl.

IL y a près de trois mois que je vous fis part de quelques nouveaux Problémes, propoſés par mon Frére dans les *Actes de Leipſic*, au mois de *Mai* dernier. Il les a, dit-il, imaginés à l'occaſion de celui que j'avois propoſé ſur la plus vite deſcente des corps peſans, lequel a été aſſez favorablement reçu, tant ici (*Hollande*) qu'aux pays étrangers; témoins les excellentes ſolutions, qui en ont été données par les plus ſavans Géométres de ce tems, & qui toutes s'accordent merveilleuſement avec la mienne.

Vous vous ſouviendrez, qu'en vous communiquant ces nouveaux Problémes, je vous dis en même tems que j'en avois trouvé les ſolutions, le même jour que le mois de *Mai* de ces *Actes* m'étoit tombé entre les mains, & de plus qu'elles étoient infiniment plus generales que les conditions de ces Problémes ne le demandoient. Je ne me ſerois peut-être pas attaché ſi-tôt à cette recherche, ſi je n'y euſſe été comme obligé par un défi, qu'une louable émulation, qui eſt entre mon Frére & moi, lui a fait me faire nommément à moi & en particulier. Un Inconnu même, dont mon Frére eſt le garant, y ajoute une promeſſe de 50 imperiales, ou écus blancs,

* On trouve un Extrait de cette Piéce en Latin, dans les *Actes de Leipſic* 1698. Janv. pag. 52.

blancs, pourvu que j'accepte publiquement ce défi dans trois mois, & que je donne les ſolutions requiſes avant la fin de cette année. Je ne manquai donc pas, dès le lendemain du jour que ces Problémes vinrent à ma connoiſſance, de donner avis à Meſſieurs les Collecteurs des *Actes de Leipſic*, que j'en avois déja trouvé les ſolutions, les priant d'en avertir le Public. * Je ne manquai pas non plus d'envoyer incontinent mes Solutions à Mr. LEIBNITZ, & de les lui remettre comme en dépôt, avec l'analyſe qui m'y avoit conduit; ſûr que je ne pouvois mieux m'adreſſer en ce rencontre qu'à ce Géométre incomparable. Je le ſuppliai de vouloir bien être nôtre Juge, ne doutant nullement que mon Frére ne s'en rapporte très volontiers à lui. Mr. LEIBNITZ y conſentit, pourvu que de part & d'autre on en ſoit content. Tout ce que je viens de dire, ſe trouve inſeré dans l'*Hiſtoire des Ouvrages des Savans*, au mois de *Juin* †; où je donne auſſi mes remarques ſur les diverſes ſolutions de mon Probléme de la plus vite deſcente, qui ont paru dans les *Actes de Leipſic*.

Cependant, comme le tems s'en va expirer, & que je n'entends plus rien de l'Inconnu prometteur, j'ai jugé qu'il ne faloit plus attendre ſa réponſe, de peur qu'il ne laiſſât couler tout doucement le tems préfix, & qu'il ne me chicanât en ſuite ſur mon retardement.

Voici donc, Monſieur, mes ſolutions. Je m'aſſure que vous les trouverez dignes d'être communiquées au Public; & ce d'autant plus que mon Frére fait une eſtime ſinguliére de ſes Problémes, tant pour leur ſubtilité, que pour leur difficulté. Avant que de les propoſer, parlant de figures iſopérimétres, il dit qu'on croit communément, mais ſans démonſtration, *(vulgo creditur, & recte, ſed ſine demonſtratione)* que le Cercle eſt la plus grande de toutes les figures d'un même circuit: mais il n'a pas pris garde, que PAPPUS l'a très-bien démontré dans les *Collections Mathématiques*, Liv. 5. Prop. 10. Je ne m'arrêterai donc pas à le prouver. Je dirai ſeulement en paſſant,

* Ce qu'ils firent, dans les *Actes* de 1697. Octob. pag. 485.

† Cy-deſſus N°. XXXVIII.

ſant, qu'il y a long-tems que je fis part à Mr. LEIBNITZ d'une méthode que mon Frére me demande à cette occaſion, comme s'il étoit le premier qui fût tombé ſur cette ſpéculation, qui eſt de trouver la courbe funiculaire, ou de la chainette, par la conſideration *de Maximis & Minimis*, en ne faiſant reflexion que ſur ce que le centre de gravité de la chaine doit deſcendre le plus bas qu'il eſt poſſible. Il ſuffit que Mr. LEIBNITZ en ſoit témoin; des raiſons particuliéres m'empêchent de publier ma méthode.

TAB. X. N°. XL. Fig. 1. Venons au fait. La premiére queſtion eſt telle: *D'entre toutes les Courbes iſopérimétres conſtituées ſur un axe déterminé* BN, *on demande celle, comme* BFN, *qui ne comprenne pas elle-même le plus grand eſpace; mais qui faſſe qu'un autre compris par la Courbe* BZN *ſoit le plus grand, après avoir prolongé l'appliquée* EP, *de ſorte que* PZ *ſoit en raiſon quelconque multipliée, ou ſous multipliée, de l'appliquée* PF, *ou de l'arc* BF; *c'eſt-à-dire, que* PZ *ſoit la tantiéme proportionnelle que l'on voudra d'une donnée A, & de l'appliquée* PF, *ou de l'arc* BF. Le ſens de cette queſtion eſt de *déterminer la Courbe* BFN *entre une infinité d'autres de même longueur qu'elle, dont les appliquées* PF *ou les arcs* BF *élevés à une puiſſance donnée, & exprimés par d'autres appliquées* PZ, *faſſent le plus grand eſpace* BZN.

J'ai plus d'une ſolution de ce Probléme: mais je ne mettrai ici que la plus ſimple; elle ſuffit. Soit l'expoſant de la puiſſance, n; une droite arbitraite, a; PF, ou BG, x; BP, ou GF, y; que l'on prenne GF ou $y = \int(x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})})$ Je dis que le point F ſera à la Courbe requiſe BFN, tellement que faiſant PZ en raiſon de la puiſſance n de l'appliquée PF, l'eſpace BZN ſera le plus grand de tous ceux qui ſe pourroient ainſi former par d'autres Courbes conſtitués ſur BN, & de même longueur que BFN.

D'où il eſt manifeſte, que ſi $n = 1$, la courbe BFN ſera la demi-circonference d'un cercle; car y ou $\int(x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})})$ devien-

deviendra $= \int (x dx : \sqrt{(aa - xx)}) = a - \sqrt{(aa - xx)}$. Or c'eſt juſtement ce qui doit arriver, la courbe BZN étant, dans ce cas, la même que BFN.

En faiſant $n = 2$, c'eſt-à-dire, PZ comme les quarrés de PF, la Courbe BFN eſt celle que repréſente un linge preſſé d'une liqueur, & que mon Frére attribuë auſſi à ſon Elaſtique.

Que ſi $n = \frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, ſi les PZ ſont en raiſon ſousdoublée des PF, alors BFN ſera la Roulette ou Cycloïde ordinaire. De ſorte que voilà encore une très-belle proprieté de cette fameuſe courbe, contre l'attente de ceux qui croyoient, qu'après la découverte de la plus vite deſcente, que nous y venons de faire, il n'y reſtoit plus rien à découvrir. Ce n'eſt pas encore tout : J'oſe avancer, & au premier loiſir que j'aurai, je le ferai voir par un échantillon, qui ne déplaira pas aux Géométres, * que nonobſtant toutes les recherches, & le rigoureux examen, que les plus habiles ont fait de cette courbe depuis tant d'années, elle a encore bien des proprietés très-conſiderables, qui leur ſont échappées.

Au reſte, je remarque en general, que toutes les fois que n eſt une fraction dont le numerateur eſt l'unité, & le dénominateur un nombre pair quelconque, la courbe BFN ſe pourra toujours conſtruire par la quadrature du Cercle; & ſi le dénominateur eſt un nombre impair quelconque, alors la courbe BFN ſera tout à fait Algébraïque : † par exemple, ſi $n = \frac{1}{3}$, ou ſi PZ eſt en raiſon ſouſtriplée de PF, l'on aura $y = 2a - (2a^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}) \sqrt{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})}$ pour l'équation de la Courbe cherchée.

Avant que de paſſer outre, il ne ſera pas hors de propos de donner ici une ſolution infiniment plus generale que ne requiert le Probléme ; en ſuppoſant que PZ, au lieu de n'être que comme une puiſſance donnée de PF, ſoit maintenant compoſée, comme l'on voudra, de PF & de données: com-

* Voiez N°. LVIII.
† Voiez N°. CXIV.

me ſi l'on décrit une courbe donnée quelconque BH ſur l'axe BG, paralelle à PF, & qu'appliquant PZ $=$ GH, on veuille que l'eſpace BZN ſoit le plus grand: Je dis, que pour conſtruire la Courbe BFN, il faut prendre GF, ou $y = \int(bdx : \sqrt{(aa - bb)})$; j'appelle b l'intégrale ou la ſomme des GH$dx : x$. * D'où il eſt évident, pour ce qui eſt de l'arc BF, qui fait l'autre partie du Probléme, que quand même PZ ou GH ſeroit non ſeulement comme une puiſſance donnée de l'arc BF, mais auſſi composé que l'on voudra de cet arc, de PF, & de données, on aura toujours une équation differentielle, ſi ce n'eſt pas du premier, au moins d'un plus haut degré, qui déterminera la nature de la Courbe BFN.

Je ne puis paſſer ſous ſilence une très-belle proprieté que j'ai rencontrée ſur nôtre Courbe conſiderée en general : C'eſt que le rayon FS de la développée, ou du Cercle baiſant, eſt toujours à la portion FR compriſe entre la courbe & ſa baſe, comme b eſt à FZ ou GH †. Et par conſéquent, dans le cas ſimple qu'on me propoſe, lorſque PZ ou GH $= x^n$, on aura toujours FS & FR en raiſon conſtante, ſavoir FS : FR $= 1 : n$. Il eſt auſſi à remarquer, que dans la même courbe, où $\int x^m dx$ eſt un *Maximum*, $\int(dt : x^m)$ ſera un *Minimum*; je prends dt pour l'élement de la courbe. C'eſt ce qui fait que m étant $\frac{1}{2}$, la Courbe BFN, comme nous avons remarqué ci-deſſus, doit être la même que celle de la plus vite deſcente; puiſque dans celle-ci $\int(dt : \sqrt{x})$ eſt un *Minimum* par ſa nature.

Mais en voilà aſſez, Monſieur, ſur le premier Probléme ‡. L'autre conſiſte à *déterminer la Cycloïde, qui entre toutes celles*

* *L'Autheur a corrigé ceci dans le* N°. XLII. *Il veut qu'on liſe*, J'appelle b les ordonnées GH; & pour ce qui eſt de l'arc BF, &c.

† *Dans le* N°. XLII. *l'Autheur remarque qu'il faut lire*, comme b eſt à GT, aiant tiré BT paralelle à la tangente en H, ou, ſi l'on aime mieux, comme la ſoutangente de la Courbe BH eſt à l'abſciſſe BG.

‡ On trouvera les Démonſtrations de tout ceci dans les N°. LXXV. & ſur tout CIII.

celles qu'on peut décrire d'une même origine & ſur une même ligne horizontale, ait cet avantage, que ſa portion compriſe entre l'origine & une verticale donnée ſoit parcouruë dans le moindre tems poſſible, c'eſt-à-dire, en moins de tems que toute autre portion des autres Cycloïdes, pareillement compriſe entre l'origine & la verticale donnée.

Il ſemble par la maniére de parler de mon Frére, que c'eſt pour la ſolution de ce ſeul Probléme, (quand même je n'aurois pas reſolu le premier) que nôtre Inconnu me promet le prix de 50 écus; car c'eſt en me propoſant ce Probléme-ci, qu'il dit, *prodit Non nemo, pro quo caveo, qui ſoluturo Fratri, ultra laudes promeritas, honorarium* 50 *imperialium decrevit.* Ainſi il faut qu'il l'ait jugé difficile. Cependant, ſi je me contentois de répondre ſimplement à la queſtion, je le pourrois faire en trois mots; car il eſt viſible que la ſolution de ce Probléme n'eſt qu'un petit Corollaire, qui ſe tire immédiatement de ce que j'ai dit de la Courbe Synchrone, dans le mois de *Mai* des *Actes* * dont il s'agit ici. Je dis donc, pour découvrir ce myſtère, que *la Cycloïde décrite par un Cercle, dont la circonférence ſoit égale au double de la diſtance entre l'origine & la verticale donnée, ſatisfait à la queſtion.* Mais pénétrons plus avant. Si au lieu d'une verticale, on ſuppoſe une ligne droite quelconque donnée de poſition, ou même une ligne courbe, le Probléme n'en deviendra pas plus difficile; puis qu'il eſt viſible par la nature de ma *Synchrone*, que la Cycloïde cherchée ſera toujours celle qui rencontre à angle droit la ligne donnée de poſition. Pour en trouver préſentement le Cercle generateur, il n'y a qu'à décrire au hazard un Cercle, qui touche l'horizontale au point où elle eſt coupée par la droite donnée de poſition; faire enſuite, comme l'arc de ce Cercle retranché du côté de l'origine des Cycloïdes par la ligne donnée de poſition, eſt à ſon diamétre, ainſi la partie de l'horizontale interceptée entre l'origine & l'interſection ſoit à une quatriéme: Cette quatriéme ſera le diamétre du Cercle generateur de la Cycloïde cherchée. C'eſt ainſi que mon Frére, voulant me propoſer cette queſtion comme difficile, y devoit ſubſtituer tou-

* N°. XXXVII.

toute ligne droite donnée de poſition, au lieu de la verticale; pour me la faire dans toute ſon étenduë: Je m'étonne que ſa méthode ne le lui ai pas ſuggeré.

On voit donc que je lui ai plus que ſuffiſamment répondu, & qu'ainſi je pourrois finir ici. Mais comme j'ai trouvé encore une autre ſolution de ce dernier Probléme, laquelle s'étend non ſeulement aux Cycloïdes, mais auſſi à toutes les Courbes ſemblables, & ſemblablement poſées; il me prend envie de la communiquer encore, & ce d'autant plus que mon Frére paroit en parler comme d'une choſe déſeſperée, juſqu'à ne vouloir pas même la tenter, ſe contentant de l'avoir ſeulement propoſée: *Qui ſpeculationem*, dit-il, *de Maximis & Minimis promovere volet, tentabit; nobis ſufficiat propoſuiſſe.* Il donne pour exemples les Cercles, ou les Paraboles à ſubſtituer à la place des Cycloïdes de ce Probléme. Pour moi, je l'énonce & le reſouds generalement ainſi. *Soient* AGB, AHD, &c. *des Courbes données ſemblables & ſemblablement poſées; GC une droite donnée de poſition; On demande par laquelle de ces Courbes, un corps peſant commençant à deſcendre de leur origine commune A, arrive dans le moindre tems à la droite donnée GC.*

TAB. X. N°. XL. *Fig.* 2.

SOLUT. Ayant choiſi une des Courbes ſemblables pour conſtante, comme AGB, on nommera l'ordonnée BL, y; la Courbe AGB, z; enſuite on tirera à chaque point B une touchante BR, que l'on prendra $= \frac{1}{2}\sqrt{y}\int(dz:\sqrt{y})$; en ſorte que les extrémités R de toutes ces touchantes décriront une Courbe nouvelle AOR; laquelle étant décrite, il faut tirer une ligne droite AR paralelle à GC; du point R, auquel elle coupe la courbe AOR, on ménera une droite RB qui touche la courbe AGB au point B, duquel ſi l'on tire la droite AB qui coupe GC en D, & que l'on faſſe ſur AD une courbe AHD ſemblable à AGB; Je dis que la Courbe AHD ſera celle, par laquelle le corps deſcendant parviendra le plus vite à la droite GC.

En certains cas particuliers le Probléme devient fort facile;

Par

Par exemple, ſi les courbes AGB, AHD, &c. ſont des Cercles, alors la conſtruction s'en fait fort aiſément par la rectification d'une Courbe que mon Frére comparoit autrefois à un *nœud de ruban*, dont nous nous étions ſervi pour la conſtruction de l'Iſochrone paracentrique de Mr. LEIBNITZ *: De ſorte que ces deux Problémes ont entr'eux une dépendance mutuelle; c'eſt-à-dire, que par la conſtruction de l'un l'on aura celle de l'autre. Si AGB, AHD, &c. ſont des Paraboles, le Probléme ſe reduit de même à la rectification d'une courbe.

J'ai ſuppoſé que les courbes AGB, AHD, &c. étoient ſemblables: j'ai pourtant auſſi une méthode, pour quand elles ne le ſont pas. Mais parce que je n'ai pas encore eu le loiſir de la mettre dans tout ſon jour, & que la conſtruction en devient fort embarraſſée dans l'exemple le plus ſimple des courbes diſſemblables AGB, AHD; quand même elles ne ſeroient que des Ellipſes conſtituées ſur un axe commun; je la remettrai dans une autre occaſion; ceci ſuffiſant tant à mon Frére, qu'à l'Inconnu prometteur, pour leur donner une ſatisfaction qui ſurpaſſera ſans doute l'attente qu'ils avoient de moi; puiſque cette réponſe comprend beaucoup plus qu'ils ne me demandoient. Me voilà donc ſurabondamment quitte: Il ne reſte plus qu'à l'Inconnu prometteur de s'aquitter auſſi. S'il ne le fait pas, qu'il ſçache que c'eſt aux pauvres, plûtôt qu'à moi qu'il fait tort; mon deſſein ayant toujours été de leur faire diſtribuer cet argent, tant à cauſe que ces ſolutions m'ont trop peu coûté pour en profiter, que pour lui faire voir que je ne ſuis point mercenaire, & que la gloire ſuffit pour m'engager.

P. S. Je viens de recevoir une Lettre de M. le *Marquis de l'*HOSPITAL, par laquelle il me mande qu'il a auſſi reſolu le ſecond Probléme de mon Frére, où il s'agit de déterminer la Cycloïde, qui rencontrant une ligne verticale donnée, ſoit parcouruë dans moins de tems qu'aucune autre, décrite de la même origine & ſur la même horizontale.

* C'eſt la Courbe AMONA du N°. XIX.

N°. XLI.

AVIS

Sur les Problémes dont il eſt parlé dans le Journal des Savans *du* 2. Décembre 1697.

Journal des Sçavans 1698. 7e. Journal, du 17 Fevr. pag. 78. Edit. de Paris, pag. 120. Edit. de Holl.

MOnſieur Bernoulli, Profeſſeur à *Bâle*, Auteur de ces Problémes, prétend que la ſolution du principal, qui concerne les figures iſopérimétres, n'y eſt pas entiérement conforme à la vérité. C'eſt pour cela qu'il veut bien accorder encore quelque temps aux Géométres pour la chercher : Et ſi enfin perſonne ne la trouve, il s'engage à trois choſes.

1°. A deviner au juſte l'Analyſe qui a conduit ſon Frére à la Solution qui ſe voit dans ce Journal.

2°. Quelle qu'elle ſoit, à y faire voir des paralogiſmes, ſi on la veut publier.

3°. A donner la véritable ſolution du Probléme dans toutes ſes parties.

Il ajoûte, que s'il ſe trouvoit quelqu'un, qui s'intéreſſât aſſez à l'avancement des Sciences, pour propoſer quelque prix pour chacun de ces articles; il s'engage à perdre autant, s'il ne s'aquitte pas du premier; à perdre le double, s'il ne réüſſit pas au ſecond; & le triple, s'il manque au troiſiéme.

REPON-

N°. XLII.

REPONSE

De Monſieur BERNOULLI, *Profeſſeur de* Groningue, *à l'Avis inſeré dans le* VII. Journal des Savans *du* 17. Février 1698.

JE vois bien par cet Avis de mon Frére, que l'inconnu *Non nemo* n'a guére envie de ſe rendre à la raiſon; de peur ſans doute d'être obligé de s'aquitter de ſa promeſſe; autrement il accepteroit l'offre que je lui ai faite, de nous en rapporter à la déciſion de Mr. LEIBNITZ, comme d'un des plus grands Géométres de ce tems; auquel, pour cet effet, j'avois envoyé mes ſolutions comme en dépôt; & entre les mains de qui on devroit de même remettre le prix, ſi l'on ne veut paſſer pour juge & partie tout enſemble. Ou ſi l'on recuſe cet habile Mathématicien, qu'on en diſe la raiſon, & qu'on en nomme un autre. Car je ſuis prêt de ſubir le jugement de tout homme déſintéreſſé, & verſé dans ces matiéres. Sans cela, quoiqu'on objecte, je ne répondrai plus à rien, & je mépriſerai conſtamment toutes les chicanes qu'on me fera, & que je prévois déja bien qu'on me veut faire. Voici cependant ce que je veux bien encore répondre à cet Avis.

Journal des Savans 1698. 15e. Journal du 21. Avril. pag. 172. Edit. de Paris, pag. 270. Edit. de Holl.

On eſt muet comme un poiſſon ſur ma ſeconde Solution; ce qui fait déja voir qu'on en eſt parfaitement content, vû l'extrême application où l'on eſt à me chicaner. Auſſi prens-je ce ſilence pour les *laudes promeritas*, que mon genereux Promoteur m'a fait eſperer pour la ſolution de ce Probléme, qu'il jugeoit, lui-même, inſoluble. Pour ce qui eſt de ma premiére Solution, ſavoir celle du Probléme ſur les figures iſopérimétres, (qu'on dit être le principal, quoique, ſelon

les

les expreſſions de mon Frére dans les *Actes de Leipſic*, ce ſoit l'autre qu'il tient pour le plus difficile,) on veut aſſurer qu'elle n'eſt pas *entiérement* conforme à la vérité. Mais ce mot, *entiérement*, fait aſſez voir, qu'on n'oſeroit diſconvenir qu'elle n'y ſoit du moins conforme en partie; & un peu plus de bonne foi auroit fait avouer, qu'elle y eſt même conforme dans toute l'étenduë du Probléme propoſé; & que s'il s'y eſt gliſſé quelque faute, ce n'eſt tout au plus que dans le ſurcroit d'étenduë que j'ai donné moi-même à ce Probléme. Pourquoi donc vouloir traiter cette Solution de paralogiſme? N'étoit-il pas plûtôt à préſumer que cette faute ne venoit point du tout du fond de la méthode; mais uniquement de quelque circonſtance accidentelle? Effectivement, pour avoir trop hâté, (vû que dès le lendemain du jour, que ces Problémes vinrent à ma connoiſſance, j'envoyai mes ſolutions à Mr. LEIBNITZ, telles qu'elles ont été inſerées depuis dans le Journal du 2. Décembre 1697. * nonobſtant le grand terme qu'on m'avoit donné, & dont j'aurois pu me prévaloir,) pour avoir, dis-je, trop hâté, il ſe gliſſa une faute légére, non dans la méthode, ni dans la ſolution du Probléme propoſé, mais uniquement dans l'application de cette méthode au ſurplus d'étenduë que j'ai donnée moi-même à ce Probléme, au delà de ce qu'il en avoit, tel qu'on l'avoit propoſé: de ſorte que cette mépriſe ne donne atteinte, ni à ma méthode, ni à la Solution requiſe. C'eſt pourquoi je ſoutiens encore, que le Probléme, tel qu'il a été propoſé par mon Frére, (*Déterminer la Courbe entre les iſopérimétres conſtituées ſur une baſe donnée, dont la ſomme des ordonnées élevées à une puiſſance donnée, faſſe un plus grand*) eſt entiérement reſolu dans le Journal du 2. Décembre 1697. & conformément à tout ce que mon Frére demandoit. Ainſi ayant encore, de ſon aveu tacite, reſolu ſon autre Probléme; auquel des deux qu'il attache le prix de ſon *Non nemo*, ce prix me ſera toujours dû. Mais je l'ai dit, & je le dis encore, n'étant

* Cy deſſus N°. XL.

tant point un mercenaire, je le cède aux pauvres; & me chicaner ſur le ſurplus qu'on ne me demandoit pas, c'eſt-à-dire, ſur ce que je n'ai pas donné plus qu'on ne demandoit, ce ne peut être qu'un prétexte, pour leur refuſer cette aumône, ou plûtôt pour leur nier cette dette.

J'en pourrois demeurer là, puiſque je n'étois pas obligé à davantage. Mais il manque ſi peu de choſe à ma premiére ſolution, pour lui donner le ſurplus d'étenduë, que j'ai librement ajouté au Probléme propoſé, que trois mots ſuffiſent pour reparer toute la faute de ma précipitation, tant elle eſt légére: page 462. ligne 7. du Journal du deuxiéme Décembre 1697. * où je dis, *J'appelle b l'intégrale ou la ſomme des* GH *dx : x*, effacez cela, & ſubſtituez ſimplement, *J'appelle b les ordonnées GH:* Omettez auſſi le commencement de ce qui ſuit, ſavoir ces cinq mots, *D'où il eſt évident que;* car ce qui ſuit n'a point de connexion avec ce qui précéde, comme je me le perſuadois alors, pour y avoir été trop vite. Dans la même page, ligne 18. † à la place de, *comme b eſt à PZ, ou GH,* mettez, *comme b eſt à GT, ayant tiré BT parallele à la tangente en H;* ou ſi on l'aime mieux, écrivez ſeulement, *comme la ſouſtangente de la Courbe BH eſt à l'abſciſſe BG.* Tout le reſte va bien: Je défie le plus clairvoyant de m'y marquer la moindre faute. TAB. X. N° XL. *Fig.* 1.

Je repéterai ici en general la proprieté très-remarquable, dont je n'avois fait mention que pour le cas particulier de mon Frére; ce qui fera voir en abregé, en quoi conſiſte toute ma ſolution generale, & d'où mon Frére pourra juger ſi elle s'accorde avec ſa particuliére: c'eſt que ſi GH, ou PZ, doit être non ſeulement comme une puiſſance donnée de PF, mais auſſi composée de PF & de données en quelque maniére que ce ſoit; alors on peut toujours trouver une même Courbe, pour que $\int PZ\,dy$ faſſe un plus grand, ou un plus petit; & pour que $\int (dt : PZ)$ faſſe réciproquement un plus petit, ou un plus grand: Car j'ai trouvé (ce qui eſt admirable) que quand le

* Cy-deſſus N°. XL. pag. 210. lig. 5.
† Ligne. 18.

ſinus de l'angle mixtiligne BFP eſt à l'ordonnée GH, ou PZ, en raiſon conſtante, alors la Courbe ſatisfait à l'un & à l'autre. Or, comme j'ai fait voir dans les *Actes de Leipſic*, du mois de Mai mille ſix cent quatre-vingt dix-ſept, * cette proprieté convient à la Courbe de la plus vite deſcente, dans toutes ſortes d'hypothèſes. Donc je puis dire avec raiſon, qu'ayant reſolu generalement le Probléme des *Brachyſtochrones*, j'ai auſſi reſolu celui des Iſopérimétres, avant que mon Frére l'eût propoſé.

Il en eſt de même de ſon autre Probléme de la Cycloïde, dont la portion coupée par une verticale donnée, ſoit parcouruë dans le moindre tems poſſible; puiſque j'ai montré que la ſolution en ſuit immédiatement de ma *Synchrone*, & qu'elle n'en eſt qu'un cas particulier. Il eſt ſurprenant, que mon Frére m'ayant voulu propoſer deux des plus difficiles Problémes qu'il pût imaginer, il ſoit juſtement tombé ſur deux que j'avois déja reſolus; & que la ſolution s'en ſoit trouvée dans le même mois des *Actes* où il me les a propoſés. C'eſt ce qui me fournit encore une réponſe fort ſuccincte aux deux queſtions qu'il me fait: ſavoir,

1. *Que la première queſtion ſur les Iſopérimétres, eſt reſoluë par mes Brachyſtochrones, & en même tems qu'elles.*

2. *Que la ſeconde queſtion ſur la deſcente à la verticale donnée, par la Cycloïde cherchée, eſt reſoluë immédiatement par ma Synchrone.*

Quant à l'autre partie du Probléme des Iſopérimétres, où l'on demande que PZ ſoit comme une puiſſance donnée de l'arc BF, (je ne ſais ſi cette partie eſt jointe à l'autre copulativement, ou disjonctivement; les particules *vel, ve,* dont on ſe ſert dans la propoſition, paroiſſant n'exiger de moi que la ſolution de l'une ou de l'autre,) j'ai dit dans le Journal du 2. Décembre *1697*. † qu'on aura toujours par ma méthode une équation differentielle, ſinon du premier, du moins d'un plus haut degré, qui déterminera la nature de la Courbe. Comme

* Cy. deſſus N°. XXXVII. pag. 190. † Cy. deſſus N°. XL. pag. 210.

me je me contentois alors d'avoir trouvé la méthode qui y conduit ; je ne me mis guére en peine d'en faire le calcul ; mais depuis ayant eu le temps d'y penſer, j'ai trouvé cette équation, $v = \int (ddy : (dt^2 - dy^2))$, pour la détermination de la Courbe, en prenant dt, ou l'élement de la Courbe pour conſtant : j'entends par v non ſeulement une puiſſance donnée de t, ou de l'arc B F, mais toute quantité compoſée de cet arc B F & de données. Si v eſt $= t$, la Courbe ſe conſtruit fort aiſément par le moyen de la Logarithmique.

Au reſte je remarque, que c'eſt le paralogiſme que mon Frére a cru voir dans ma méthode, qui a donné lieu aux deux premiers des trois articles de ſon Avis, & qu'il y a été un peu trop vite. Par le premier de ces Articles il s'engage à *deviner au juſte l'Analyſe qui m'a conduit à la ſolution de ſon Probléme ſur les Iſopérimétres.* Je ſais bien qu'il penſe, que je me ſuis ſervi de la méthode des Courbes, qui ſe font par la preſſion des fluides, que je conſiderois autrefois pour le calcul de la *Voiliére*, comme compoſée de deux autres preſſions collaterales, ſavoir d'horizontale & de verticale : Qu'il diſe de bonne foi, ſi je n'ai pas deviné au juſte ſa penſée. Mais il ſe trompe : car quoique cette méthode (qui n'eſt qu'indirecte), employée adroitement, conduiſe auſſi à la ſolution requiſe ; j'en ai pourtant d'autres, & même une directe, qui m'ont toutes fourni une même ſolution. Ajoutez qu'un ſi merveilleux accord n'eſt pas la ſeule preuve que j'aye de ſa bonté, & que (s'il étoit beſoin) je pourrois la prouver encore par une démonſtration Synthétique, faite à la maniére des Anciens, & ſur-tout à l'imitation de celle que PAPPUS a donnée pour prouver que le Cercle eſt la plus grande des figures iſopérimétres. Je conſeille donc fraternellement à mon Frére de retracter la gageure qu'il offre pour le premier Article de ſon Avis ; car il perdroit infailliblement : Il eſt de mon devoir de l'en avertir.

Pour ce qui eſt du ſecond article, j'eſpére qu'il aura aſſez de candeur pour le revoquer, de ſon propre mouvement, a-

près qu'il aura vu cet éclairciſſement. Il n'y a rien à dire ſur le troiſiéme. Nous en jugerons quand il aura publié la ſolution qu'il nous promet depuis ſi long-temps.

Pour me conformer enfin à l'humeur de mon Inconnu *Non nemo*, (je ne ſaurois le nommer autrement, puiſqu'il ne veut pas ſe découvrir,) qui ne s'intéreſſe à l'avancement des ſciences, qu'autant qu'il y a de l'argent à gagner; je m'engage à perdre le quadruple de ſa promeſſe, ſi avant la fin de cette année il me détermine géométriquement, (comme je promets de le faire, s'il ne le fait pas,) *quelle demi-Ellipſe, de toutes celles qu'on peut décrire dans un plan vertical, ſur un même axe horizontal donné de grandeur, eſt parcouruë en moins de temps, ſuppoſé que le mobile commence ſon mouvement à une des extrèmités de cet axe.* Je permets que mon Frére le ſecoure. J'ajoute à ce Probléme les ſix autres que j'ai propoſés dans le Journal du 26. Août 1697. * dont Monſieur le *Marquis de* L'HOSPITAL a reſolu les cinq derniers, pour les exemples particuliers que j'y donne; mais je demande des ſolutions generales; ſur tout pour les Courbes diſſemblables, dont il s'agit dans le quatriéme & le cinquiéme. Voilà toute la Replique, que j'ai cru devoir faire à l'Avis de mon Frére.

N°. XLIII.

AVIS

De Mr. BERNOULLI, *Profeſſeur des Mathematiques à* Bâle, *ſur la Réponſe de ſon Frére inſerée dans le* Journal *du* 21. Avril 1698.

Journal des Savans 1698. 20e. Journal du 26. Mai. pag. 240. Edit. de Paris, pag. 377. Edit. de Holl.

AVANT que de publier ma Réponſe aux ſolutions de mon Frére, je le prie de repaſſer tout de nouveau ſur ſa derniére, d'en examiner attentivement tous les points, & de nous dire enſuite ſi tout va bien; lui déclarant, qu'après que j'aurai donné la mienne, les prétextes de précipitation ne ſeront plus écoutés.

* N°. XXXIX.

REPON-

N°. XLIV.

R E P O N S E

De Monſieur BERNOULLI, *Profeſſeur de* Groningue, *à l'Avis inſeré dans le* Journal du 26. Mai 1698.

JE n'ai que faire de repaſſer ſur mes ſolutions des Problémes de mon Frére: Je ſai qu'en penſer, & mon temps ſera aſſûrément mieux employé à faire de nouvelles découvertes. C'eſt aſſez que mon Frére reconnoiſſe enfin que je poſsède la méthode, puiſque c'eſt tout ce dont il s'agit ici; la précipitation qu'il croit appercevoir dans ma réponſe du 21. Avril dernier, ne faiſant, ni pour, ni contre la validité de cette méthode. C'eſt donc en vain qu'on tâche de ſe tirer par tous ces détours; & tandis que le *Non nemo* refuſera de ſe ſoumettre au jugement d'un tiers, comme il l'a refuſé juſqu'ici, nonobſtant toutes les aſſignations que je lui ai données; tout le monde verra bien que c'eſt cauſe perdue pour lui. Cependant, pour couper pied à toutes ces chicanes, je ſoutiens.

Journal des Savans 1698. 24. Journal du 23. Juin. pag. 284. Edit. de Paris. pag. 446. Edit. de Holl.

1. *Que j'ai exactement & légitimement reſolu par mes Brachyſtochrones le Probléme des Courbes, dont les ordonnées élevées à une puiſſance donnée, ſont un plus grand.*

2. *Qu'entre toutes les Cycloïdes décrites d'une même origine, & ſur une baſe horizontale, celle qui rencontre à angles droits une ligne droite (verticale,) eſt auſſi celle par laquelle le mobile deſcend le plus vite à cette même ligne droite, en commençant ſon mouvement à l'origine commune des Cycloïdes.*

C'eſt là tout ce que ma partie m'a demandé. Ainſi pour répondre juſte, c'eſt à ces deux propoſitions préciſément qu'elle doit répondre: oui, ou non, c'eſt aſſez; & ſe jetter ſur le

ſurplus d'étenduë que j'ai donnée moi-même à ces deux Problémes, c'eſt prendre le change, ou le vouloir donner, puiſqu'il ne s'agit point du tout de ce ſurplus, quoiqu'il ſoit auſſi parfaitement conforme à la vérité.

Au reſte, puiſque dans ce nouvel *Avis*, on ne fait aucune mention des Problémes que j'ai propoſés à mon *Non nemo* dans ma *Réponſe* du 21. Avril dernier; j'en conclus qu'il n'oſe riſquer ſeulement le quart de ce que j'expoſe, c'eſt-à-dire, de tout ce que je lui ai laiſſé la liberté de parier. Je lui donne encore cinq ſemaines, à compter du jour que ceci paroitra, pour déclarer s'il veut accepter la gageure. Ces Problémes ſont à la portée de l'eſprit humain, puiſque je les ai reſolus: Ainſi, s'il eſt brave, & auſſi habile qu'il veut le paroitre, il doit accepter ce défi, & ne pas reculer.

N°. XLV.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De Monſieur BERNOULLI *de* Bâle, * *du* 26 *Juin* 1698. *Contenant l'examen de la ſolution de ſes Problémes, inſerée dans le* Journal *du* 2. Décembre 1697.

Journal des Savans 1698. 30 Journal du 4 Aouſt. pag. 355. Edit. de Paris. pag. 560. Edit. de Holl.

COmme *cette Lettre étoit faite dès le temps que l'Avis de Monſieur* BERNOULLI, *inſeré dans le Journal du* 17. *Févrir* 1698, *fut publié, il n'a pas jugé à propos d'y rien changer pour l'autre ſolution du* 21. *Avril; ſe reſervant de répondre ſéparément à cette ſolution, qu'il dit être contraire à la première.*

Lorſque je propoſai, dans les *Journaux de Leipſic*, à mon Frére quelques Problémes de Géométrie, ce fut principalement dans la vûë, & dans l'eſpérance qu'il nous en donneroit un jour la ſolution. Car outre que je conſiderois, que nous pouvons avoir bonne part à la gloire de ceux qui ſe rendent habiles dans une Science, dont il n'y a pas long-

* A Mr. VARIGNON.

long-temps que nous leur avons donné les premiéres ouvertures; j'avois encore des raiſons particuliéres pour ſouhaiter qu'il y pût réuſſir, & gagner le petit prix qui y a été joint par un de mes amis. Ce que je dis, Monſieur, pour vous faire comprendre le plaiſir que j'ai eu à lire la ſolution de mes Problémes dans le cahier du Journal que vous avez eu la bonté de m'envoyer, & plus encore à y remarquer d'abord quelque conformité avec la mienne, laquelle me faiſoit croire qu'il s'en étoit aquitté en habile homme. Mais que ce plaiſir a duré peu! Il a été bien-tôt ſuivi du chagrin de voir mon attente fruſtrée; lorſqu'en ayant examiné toutes les circonſtances avec ſoin, j'ai trouvé que la ſolution de mon premier, & principal Probléme, étoit très-défectueuſe, & même fauſſe en tout ſens; bien qu'en un cas elle nous faſſe trouver, par accident, la pure vérité. Pour prévenir la ſurpriſe, qu'un aveu de cette nature pourroit cauſer; il faut conſiderer qu'en raiſonnant juſte ſur une hypothèſe vraye, l'on arrive toujours à une concluſion vraye; qu'en raiſonnant juſte ſur une hypothèſe fauſſe, l'on arrive toujours à une concluſion fauſſe; (comme l'on voit par les démonſtrations qu'on appelle *ad abſurdum;*) mais qu'en raiſonnant fauſſement ſur une hypothèſe fauſſe, il ſe peut faire, quelquefois, qu'on arrive à une concluſion vraye; une fauſſeté, pour ainſi dire, corrigeant l'autre. C'eſt juſtement ce que je crois être arrivé à mon Frére, qui, ſelon toutes les apparences, s'eſt d'abord jetté dans un principe faux, d'où par le moyen d'un Sophiſme il a tiré une ſolution, qui par un bonheur extraordinaire, ne laiſſe pas d'être en partie véritable. Quoique je ne parle que par conjectures, (il ſeroit à ſouhaiter, pour en juger avec certitude, qu'il nous eût donné l'analyſe, ou du moins la démonſtration de cette ſolution, comme j'ai fait celle de ſon Probléme de la plus vite deſcente:) je m'aſſure pourtant que ces conjectures ſont tellement fortes, que vous ayant expliqué la maniére, dont je m'imagine qu'il s'y eſt pris, vous m'avouerez qu'il eſt comme impoſſible qu'il ſe ſoit ſervi d'une autre.

Mais quand il n'y auroit rien à redire à la ſolution en elle-même, je ne trouve pas encore qu'il puiſſe prétendre au prix qu'on y a joint; d'autant qu'il n'a reſolu le Probléme, ni ſuivant mon intention, ni pleinement, & en toutes ſes parties. Vous vous ſouvenez ſans doute, Monſieur, que j'ai propoſé mes Problémes, à l'occaſion de celui de mon Frére, dont j'avois donné la ſolution par des principes de pure Géométrie; en ſorte qu'il eſt viſible, que mon intention étoit d'inviter mes Lecteurs à les reſoudre par la même voye. Mais il eſt très-probable, comme je le ferai voir, que mon Frére ne s'eſt ſervi dans cette recherche que d'un principe étranger & méchanique, qu'il devoit plu-

plûtôt prouver que ſuppoſer; c'eſt pourquoi l'on ne ſauroit aucunement dire, qu'il ait agi ſuivant mon intention. A quoi j'ajoûte, que celui qui aſpire au prix d'un Probléme, eſt obligé d'en donner une ſolution complette, qui ſatisfaſſe à tous les points de la queſtion propoſée. C'eſt ainſi que je fis à l'égard des Problémes propoſés par mon Frére dans ſon Programme de l'année paſſée: j'eus ſoin de les reſoudre tous, & en toutes leurs parties, juſqu'à marquer même un endroit où mon Frére pouvoit s'être trompé, en prenant des Courbes differentes pour une même. Et c'eſt ce qu'on ne peut pas dire de la ſolution qu'il nous donne à préſent de mon Probléme; puiſque, quand j'accorderois tout le reſte, il ne l'a pas reſolu dans la partie qui concerne l'arc BF, ou plûtôt parce qu'il l'a reſolu fauſſement, comme je dirai ci-après.

Mais entrons en matiére, & voyons quelle peut avoir été l'analyſe de mon Frére. Il dit qu'il avoit trouvé la ſolution du Probléme, le même jour qu'il vint à ſa connoiſſance; & dans *l'Hiſtoire des Ouvrages des Savans*, au mois de Juin 1697. Art. 2. * où il nous anonce ſa ſolution, il reſtreint ce jour-là à trois minutes. Ce peu de temps me fit auſſi-tôt ſoupçonner, qu'il ne l'avoit cherchée que par quelque principe étranger, ou indirect, & tel qu'il ſaute naturellement aux yeux; ſachant par expérience que celle qui ſe tire de la pure Géométrie, eſt trop recherchée pour être ainſi trouvée tout d'un coup. Je remarquai auſſi, qu'il n'y avoit rien qui ſe préſentât plus naturellement à l'eſprit, que ce principe de Méchanique: *Que les corps peſans deſcendent, juſqu'à ce que leur centre de gravité ſoit le plus bas qu'il ſoit poſſible*; par exemple, qu'un lambeau de linge BTN ſoutenu par ſes extrémités, B, N, & rempli de quelque liqueur juſqu'à ſa baſe BN, ou bien qu'une corde BTN chargée de differens poids dans tous les points de ſa longueur, doit prendre une figure, telle que le centre de gravité de cette liqueur, ou de ces poids, deſcende plus bas qu'il ne feroit dans toute autre. Et c'eſt, à mon avis, le principe dont mon Frére s'eſt ſervi en cette rencontre. Voici comme il l'applique. Il ſuppoſe un linge BTN rempli juſqu'à la baſe BN d'une certaine liqueur, qu'il conçoit être de differente peſanteur ſpécifique, & telle que le poids de chaque filet PF ſoit comme GH diviſé par BG; d'où il ſuit, que faiſant BP $= y$, PF $= x$, BF $= t$, & GH, ou PZ, $= p$; le poids du petit trapèze PC ſera $pdy : x$ (je marque la diviſion par : à la façon de Mr. Leibnitz, pour la commodité de l'Imprimeur, vous priant de rendre cette Lettre publique,) ſa force mouvante, *momentum*, à l'égard de la ligne BN ſera $= \frac{1}{2} pdy$; & par conſéquent la ſomme de ces forces $= \int \frac{1}{2} pdy$: & cette ſomme devant déterminer la

TAB. X. N°. XLV.

* Cy-deſſus N°. XXXVIII. pag. 202.

la diſtance du centre de gravité de la liqueur à la baſe BN, laquelle par l'hypothèſe eſt la plus grande qu'elle puiſſe être; il conclut que $\int \frac{1}{2} p dy$, ou bien ſon double $\int p dy$, c'eſt-à-dire, la ſomme des trapèzes QZ, ou l'eſpace BZN, eſt un *Maximum*, ce que la queſtion demande. Il s'imagine donc que, pour en venir à bout, on n'a qu'à chercher la courbure d'un tel linge, ſuivant la méthode que j'ai autrefoi pratiquée pour la Voiliére; ce qui ſe fait ainſi. Par ma Théorie de la preſſion des fluides, le poids PC étant $p dy : x$, il pouſſe la portion du linge FC, ſuivant ſa perpendiculaire FD, avec une force FD $=$ $p dt : x$, laquelle par la doctrine de la communication des mouvemens ſe peut reſoudre en horizontale FE $= p dx : x$, & en verticale ED $= p dy : x$. Que toute ces petites forces verticales, qui agiſſent ſur la partie du linge FT, ſoient ramaſſées dans le corps L, & toutes les horizontales en M; que ces deux corps tendent les deux filets FI, TI, qui touchent le linge en F & T: il faudra les mêmes puiſſances en F & en T, pour ſoutenir les corps L & M, qu'il faut pour ſoutenir le linge FT; & parce que la puiſſance T demeure conſtamment la même, en quelque endroit du linge que l'on applique l'autre F, il s'enſuit que la partie de cette puiſſance, qui eſt employée à ſoutenir le corps L eſt $= \int (p dx : x)$ ſomme des forces horizontales, qui agiſſent ſur la partie du linge BF, laquelle jointe au corps M $= \int - (p dx : x)$ ſomme des forces horizontales qui agiſſent ſur la partie FT, & que la puiſſance T porte toute ſeule, fait une ſomme conſtante. Ceci étant poſé, l'on peut conſiderer, ſuivant votre beau Théorème, dont je me ſers en beaucoup de rencontres très-utilement, que le corps L eſt à la partie de la puiſſance T qui le ſoutient, c'eſt-à-dire, $\int - (p dy : x)$ à $\int + (p dx : x)$, comme le ſinus de l'angle FIT ou CFV au ſinus de l'angle FIK ou FCV; c'eſt-à-dire, comme CV à FV, ou dx à dy: proportion qui ſe reduit juſtement à l'égalité que mon Frére donne pour la Courbe cherchée, qui eſt $dy = dx \int (p dx : x) : \sqrt{(1 - (\int p dx : x)^2)}$ ou [en mettant b au lieu de $\int (p dx : x)$] $b dx : \sqrt{(1 - bb)}$, & [dans le cas particulier de $p = x^m$] $dy = x^m dx : \sqrt{(1 - x^{2m})}$, comme l'on peut voir en ce que par la ſubſtitution de ces valeurs les termes de la proportion s'identifient.

Par un ſemblable raiſonnement on peut prétendre de trouver la Courbe BTN, dont $\int (dt : x^m)$ eſt un *Maximum* ou un *Minimum*, en feignant que cette Courbe eſt repréſentée par une corde chargée dans tous les points F de petits poids réciproquement proportionnels à x^{m+1}; par ce moyen le poids de la portion FC deviendra $dt : x^{m+1}$, la force de ce poids à l'égard de la droite BN, $dt : x^m$, & la ſomme de ces for-

ces, qui doit marquer la diſtance du centre de gravité de tous les poids à la droite B N (& par conſéquent un *Maximum*) $\int (dt : x^m)$, comme il eſt requis. Le calcul en eſt le même que ci-deſſus; on doit ſeulement remarquer, que le corps M étant nul en cette rencontre, la puiſſance T qui eſt conſtante, & que l'on peut nommer $1 : m$, eſt toute employée à ſoutenir le corps L ou $\int -(dt : x^{m+1})$; de ſorte que l'on a cette proportion, $\int -(dt : x^{m+1}) : \frac{1}{m} = dx : dy$. D'où l'on tire encore l'égalité précédente $dy = x^m dx : \sqrt{(1 - x^{2m})}$, comme mon Frére l'a trouvée.

Vous voyez, Monſieur, quelle peut avoir été l'analyſe qui l'a conduit à la ſolution qu'il nous donne de mon Probléme. Il ne faut pas être fort attentif, pour y découvrir deux défauts conſidérables. Il ſuppoſe d'abord, ſans fondement, que s'il y a pluſieurs figures iſopérimétres chargées de poids en certaine proportion par dedans, ou autour de leurs circonferences, le centre de gravité de ces poids eſt plus éloigné de l'axe dans celle que ces poids auroient donné à un linge ou à une corde, que dans toutes les autres. J'avouë que lorſqu'il y a toujours une même quantité de poids, qui agit ſucceſſivement ſur quelque matiére flexible que ce ſoit, ces poids doivent ſe ranger de telle ſorte, que leur centre de gravité ſe trouve le plus bas qu'il ſoit poſſible; mais dans la ſuppoſition précédente, la quantité des poids n'eſt pas la même dans les differentes figures iſopérimétres; ou quand il y en auroit une même quantité, il eſt impoſſible que ces poids faiſant prendre ſucceſſivement à la matiére fluide des figures differentes, puiſſent acquerir ou retenir d'eux-mêmes cette proportion ou diſpoſition qu'on leur ſuppoſe. Soient, par exemple, deux figures iſopérimétres B T N & B *b t n* N, dont celle-ci renferme un eſpace B*btn*N plus grand que B T N de tout l'eſpace B*bn*N, puiſqu'on ſait que les iſopérimétres ne ſont pas égales; qu'on conçoive à la place de la figure B T N un linge rempli juſqu'à la baſe B N de quelque liqueur ordinaire, & telle que le poids de chaque filet P F ſoit proportionnel à la longueur P F, c'eſt le ſeul cas poſſible dans la nature; que cette liqueur agiſſant enſuite librement ſur le linge, lui faſſe prendre la figure B*btn*N: Il eſt clair, qu'après cela, elle n'ira plus qu'en *bn*, & que par conſéquent le centre de gravité de l'eſpace *btn* doit bien être plus bas que celui de l'eſpace B T N; mais il n'eſt nullement évident, qu'ajoutant par deſſus celui-là la portion B*bn*N, le centre de la gravité de tout l'eſpace B*btn*N ſoit encore plus bas que celui de B T N, ou de telle autre figure iſopérimétre qu'on voudra. Je ſoutiens même que cela eſt faux, & que la figure d'entre les Iſopérimétres, dont le centre de gravité eſt le plus éloigné de l'axe, n'eſt pas

celle

celle d'un linge rempli de liqueur, mais une autre que j'enveloppe dans cette anagramme, pour donner loiſir à mon Frére de la chercher auſſi, s'il veut perſuader à nos Lecteurs qu'il poſſède la véritable méthode pour ces Problémes : $a^{12} b^2 c^3 e^9 g^2 h i^7 l^6 m^3 n^6 o^4 p^7 q r^2 s^2 t^7 v^4$. *

Cependant quoi que le centre de gravité de l'eſpace abſolu ne ſoit pas le plus bas dans la figure du linge, on peut du moins conclure que le centre de cette portion, qui eſt remplie par la maſſe liquide, doit être plus bas que le centre d'une portion égale, qu'on pourroit couper depuis le ſommet de telle autre figure iſopérimétre qu'on voudra; comme effectivement je le trouve par mon analyſe : marque indubitable de ſa bonté & de ſa juſteſſe. Et c'eſt avec cette limitation qu'il faut entendre ce que j'ai dit du centre de gravité de la Courbe élaſtique, dans les *Actes de Leipſic* de l'an 1694. pag. 276.

L'autre erreur qui ſe trouve dans l'analyſe précédente de mon Frére, n'eſt pas moins conſiderable. Elle conſiſte, en ce qu'il marque la diſtance du centre de gravité des poids par la ſomme de leurs forces; & chacun ſait que cette diſtance ſe détermine par la ſomme des forces appliquée à la ſomme des poids, & qu'ainſi elle ne peut ſe proportionner à la ſeule ſomme des forces, que lorſque la ſomme des poids demeure conſtamment la même; ce qui n'arrive pas ici, comme je viens de le remarquer.

Ibid. 31. Journal, du 11 Aouſt. pag. 361. Ed. de Paris, pag. 570. Edit. de Holl.

Voilà donc deux fauſſetés aſſez palpables dans un même raiſonnement; mais auſſi deux fauſſetés, dont l'une redreſſe l'autre ſi heureuſement, qu'elles font trouver, dans quelques cas, la véritable ſolution; quoique cela ne puiſſe être que l'effet d'un pur hazard, qui ne donne pas plus de droit à la gloire d'avoir réüſſi, qu'auroit celui, qui pour ſoutenir qu'*un caillou eſt de la pierre*, le prouveroit par ce raiſonnement : *Tout homme eſt pierre; Tout caillou eſt homme; Donc tout caillou eſt pierre.* Marque de cela, c'eſt que l'on peut propoſer tel Probléme, où l'une des fauſſetés venant à ceſſer, l'autre nous conduiroit à une concluſion néceſſairement fauſſe : comme ſi l'on propoſoit de trouver entre une infinité de Courbes iſopérimétres BTN, B*t*N, &c. (qui ſeroient toutes chargées dans leurs circonferences, en ſorte que le poids de chaque portion FC fût comme la portion correſpondante de la baſe PQ) celle qui a le centre de gravité de ces poids le plus éloigné de l'axe; car en ce cas on trouve que la chainette eſt une parabole, ainſi que je l'ai dit dans les *Actes* de 1691 au mois de Juin, pag. 288. au lieu que la Courbe cherchée doit être un Cercle; parce que la ſomme des poids étant ici comme la ſomme des PQ, ou comme la baſe BN, & par conſéquent la

 même

* Le ſens de cette Anagramme eſt celui-ci *Illa nempe* (figura) *quæ ſinum anguli tangentis & applicatæ cubo applicatæ proportionalem habet*, par où l'on déſigne la Courbe dont l'équation eſt $dy = x^3 dx : \surd(a^4 - x^4)$

même dans toutes les Courbes iſopérimétres, la diſtance du centre de gravité des poids à la baſe eſt véritablement proportionnelle à la ſomme de leurs forces, c'eſt-à-dire, à $\frac{1}{2}\int x\,dy$, laquelle on ſait n'être la plus grande que dans le Cercle.

Mais quoiqu'il en ſoit de tout ceci, il eſt ſeur que la ſolution de mon Frére, généralement parlant, eſt fauſſe; ſur tout, que celle qui regarde l'arc BC, l'eſt même dans tous ſes cas : ce qui me confirme entiérement dans la perſuaſion où je ſuis, que l'analyſe qui l'y a conduit, ne peut être differente de celle que j'ai rapportée, & qui fait trouver ſi juſtement ſa ſolution. Tout le monde ſait, qu'il eſt aſſez ordinaire qu'on arrive à une même vérité par différentes voyes; parce que la vérité n'eſt qu'une, & toujours ſimple : mais le faux étant infini en nombre, il eſt moralement impoſſible qu'on arrive à une même fauſſeté par deux raiſonnemens auſſi plauſibles & auſſi apparens que celui-là. Et c'eſt cette conſidération qui a donné lieu au premier des trois Articles du mois de Février dernier de ce Journal, où je me ſuis engagé à deviner l'analyſe de mon Frére. * Vous jugerez, Monſieur, ſi je puis avoir bien rencontré.

Au reſte, il y auroit lieu de s'étonner, ſi une analyſe auſſi défectueuſe que celle-là, n'étoit pas ſujette à pluſieurs contradictions : Auſſi l'eſt-elle à plus d'une. Premiérement j'obſerve que, ſi au lieu de ſe repréſenter la Courbe, dont $\int x^m dy$ eſt un *Maximum*, comme un linge, & celle dont $\int (dt : x^m)$ eſt un *Minimum*, comme une corde : l'on peut tourner la choſe, en ſe ſervant de la conſideration de la corde pour celle-là, & du linge pour celle-ci; & alors on trouvera des ſolutions très differentes de celles qu'on a trouvées. J'obſerve auſſi que la raiſon du choix de mon Frére, qui a préféré le linge pour la premiére, a été, ſans doute, parce qu'il a vu que, s'il faiſoit autrement, la ſolution qu'il trouveroit, ne l'accommoderoit pas pour le cas de $m = 1$, auquel on ſait que la Courbe doit être un Cercle. Je ne parle point ici de ce que, ſuivant cette analyſe, la qualité $\int (dt : x^m)$ de la Courbe cherchée devroit plûtôt être un *plus grand*, qu'un *plus petit*; je remarque ſeulement que cette Courbe ſe peut encore trouver, ſi on la conſidére comme un rayon de lumiére, qui paſſe par un milieu inégalement tranſparent, & dont la rareté à la hauteur BG eſt comme GH; mais qu'elle ne s'accorde avec celle, qui ſe trouve par la conſidération de la corde, que lorſque GH eſt comme une ſimple puiſſance de BG; ce qui eſt peut être cauſe que mon Frére, après avoir donné la Courbe dont $\int p\,dy$ eſt un *plus grand*, généralement pour tout les rapports de GH à eſt

* Ci-deſſus N°. XLI. pag. 214.

GB, ou de p à x, n'oſe faire la même choſe de $\int(dt:p)$, & qu'il ſe contente de nous dire ſimplement quelle eſt la Courbe dont $\int(dt:x^m)$ eſt un *plus petit*; bien que cette précaution ait été aſſez ſuperflue, & qu'il eût pû nous donner hardiment tout ce qu'il a trouvé ſur cette derniére ſuppoſition, l'analyſe qui s'y fonde étant tout autrement évidente que celle qui prend la Courbe pour une corde. Il faut cependant avouer qu'elle n'eſt pas plus propre que les autres pour faire trouver la Courbe dont $\int t^m dy$ eſt un *plus grand*, ou un *plus petit*; puiſque l'on conçoit aiſément que les longueurs BF de différentes iſopérimétres, qui correſpondent à une même hauteur BG, étant differentes, il faudroit que les GH qui y ont raport, & qui marquent la rareté du milieu, fuſſent auſſi differentes à la même hauteur BG; ce qui eſt abſurde. Enfin, Monſieur, cela eſt ſi clair, qu'il n'y a pas lieu de douter, que mon Frére n'ait bien vu & bien connu tout cela. Mais le moyen d'y rémédier! Il s'étoit déja précipité de publier par tout qu'il avoit trouvé la véritable ſolution, & il n'y avoit plus moyen de s'en dédire: le temps preſſoit, le terme alloit expirer, & il n'en avoit pas trouvé de meilleure. Il faloit donc publier celle qu'on avoit, malgré l'inévidence, & toutes les contradictions qui s'y rencontrent.

Deux autres Anagrammes, dont peut-être on donnera un jour la clef.

$a^{44}\ b^{8}\ c^{25}\ d^{20}\ e^{65}\ f^{3}\ g^{4}\ h^{2}\ i^{58}\ l^{21}\ m^{32}\ n^{32}\ o^{17}\ p^{19}\ q^{8}\ r^{30}\ s^{39}\ t^{42}\ v^{54}\ x.$

$a^{45}\ b^{8}\ c^{16}\ d^{10}\ e^{50}\ f^{3}\ g^{7}\ h^{2}\ i^{40}\ l^{7}\ m^{25}\ n^{33}\ o^{7}\ p^{11}\ q^{4}\ r^{18}\ s^{33}\ t^{40}\ v^{30}\ x^{4}.$

NB. Le ſens de ces deux Anagrammes eſt celui-ci.

Ex infinitis curvis, genere iisdem, illa gravi celerrimum deſcenſum ad datum perpendiculum concedit, quæ tempus totius deſcenſus, poſitis celeritatibus in ratione ſubduplicata altitudinum, duplum; in ſubtriplicata, triplum; in ſubſeſquialtera ſeſquialterum efficit ſummæ quorundam elementorum, quæ ad reſpectiva tempuſcula rationem habent duplicatam elementorum applicatæ ad elementa Curvæ. Conſtat igitur, quomodo hæc per interſectionem duarum tranſcendentium determinetur. Imo dico amplius, in ſpecialibus quibusvis curvis, quæſitam, etiam unius tranſcendentis & algebraicæ ope, ſemper inveniri.

Tangens lineæ ex infinitis genere iiſdem curvis æquales arcus abſcindentis ita reperitur. Ductis per datum in abſcindente punctum una ex infinitis, ejuſque tangente & applicata, fiat: Ut exceſſus hujus tangentis ſupra ſummam tertiorum proportionalium ad elementa abſciſſæ Curvæ & elementa applicatæ, ad ipſam Tangentem; ita ſubtangens ad quartam; Denotabit hæc portionem axis tangentibus utriuſque abſcindentis & abſciſſæ Curvæ interceptam.

Ff 3 AVIS

N°. XLVI.

AVIS SUR LA RÉPONSE

Inſerée dans le Journal du 23. Juin dernier 1698.

Ibid. pag. 364. Edit. de Paris & pag. 575. Edit. de Holl.

JE n'ai jamais cru que mon Frére poſſedât la véritable méthode pour le Probléme des iſopérimétres; mais maintenant j'en doute plus que jamais, vu la difficulté qu'il fait de repaſſer ſur ſes ſolutions. Car enfin pourquoi nous refuſer une choſe ſi-tôt faite, ſi ce n'eſt qu'il ne ſe fie pas lui-même à ſa méthode? S'il n'*a emploié que trois minutes de temps*, comme il le dit, *pour tenter*, *commencer*, & *achever d'approfondir tout le myſtère*, il y a apparence que la revuë de ce qu'il a trouvé, ne lui en coûtera pas davantage: d'ailleurs quand il y en mettroit le double, eſt-ce que ſix minutes, emploiées à cet examen, diminueroient tant le nombre de ſes nouvelles découvertes? Mais quelque peu de peine que cela lui doive donner, je veux bien encore lui faire grace de plus de la moitié, en le priant ſeulement de retoucher ce qui concerne l'arc B F, ou du moins de nous dire, s'il n'y a point de faute d'impreſſion dans ſon égalité $dv = ddy : (dt^2 - dy^2)$ Il ſait que cela fait *une partie de ce que j'ai demandé*, quoiqu'il le diſſimule; & qu'ainſi il eſt indiſpenſablement obligé de reformer ſa ſolution, ſi elle eſt fauſſe, comme je le ſoutiens; à moins qu'il ne veuille ſe déſiſter de ſes prétentions. Autrement, ſur quoi veut-il que nos Lecteurs fondent leur jugement, n'aiant vu de lui ni analyſe, ni démonſtration? (parce que peut-être il n'en oſe donner.) Je déclare que bien loin de refuſer dans tout ce differend l'arbitrage de Mr. LEIBNITZ, je veux encore accepter de bon cœur celui de Mr. *le Marquis de* L'HOSPITAL & de Mr. NEWTON, comme de tous les plus excellens Géométres de ce temps; pourvu qu'ils veuillent ſurſeoir leur jugement, juſqu'à ce que j'aie parlé à mon tour, & que j'aie achevé de répondre aux deux ſolutions que mon Frére nous a donnécs dans le Journal.

Je ne dis rien des nouveaux Problémes, par leſquels mon Frére tâche de faire diverſion dans l'eſprit des Lecteurs; tant parce que n'aiant pas encore ſatisfaction ſur le mien, je ne m'y crois pas obligé, que parce qu'il ſemble n'en vouloir proprement qu'à ſon *Non nemo*. Je ne ſais ſi celui-ci nous en donnera un jour la ſolution; mais je ſais bien qu'il eſt homme à le faire, & peut-être l'a-t-il fait déja. Du moins, ſi l'on eſt ſage, on en demeurera là, & on ne le pouſſera pas davantage.

N°. XLVII.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De Monſieur BERNOULLI, Profeſſeur *de* Groningue, *du* 22 Aout 1698, *pour ſervir de Réponſe à celle de ſon* Frére Profeſſeur *à* Bâle, *inſerée dans les* Journaux *du* 4 & 11, *du même mois.*

*COmme les dates pourroient être ici de quelque conſideration, M. V. * croit devoir avertir qu'il a reçu cette Lettre dès le 2 Septembre dernier, & que les vacances du* Journal *n'ont pas permis qu'elle parût plûtôt.*

Journal des Savans 1698. 40. Journal du 8. Déc. pag. 477. Ed. de Paris. pag. 759. Edit. de Holl.

Il eſt bien ſurprenant, qu'en voulant ménager une perſonne, il ſe trouve qu'on l'offenſe. Je croyois n'avoir affaire qu'à un Inconnu; je prenois toutes les meſures poſſibles, pour ne point donner ſujet à mon Frére de ſe plaindre de moi; je tâchois de conſerver l'union & la charité qui doit être entre deux fréres; & je me trouve malheureuſement trompé: l'extrait de ſa Lettre, que je reçus hier, me faiſant voir, que tant de meſures & tant d'égards pour lui, n'ont pu l'empêcher de s'intéreſſer de toute ſa force pour cet Inconnu, & de prendre parti contre moi; mais d'une maniére ſi chaude & ſi violente, qu'il n'y a perſonne qui ne voye qu'au lieu de cette louable émulation dont je me flattois, ce n'eſt qu'une aveugle envie qui le conduit. C'en eſt fait, ſon imagination plus forte & plus vive que celle de ces prétendus ſorciers, qui croyent ſe trouver corporellement au Sabbat, l'a ſéduit; il ſe laiſſe entrainer au torrent de ſes vaines conjectures; en un mot, il ne paroit plus donner cours à la raiſon, ni même en état d'entendre tout ce que je lui en pourrois alleguer. Je l'abandonne

* Mr. VARIGNON

ne donc à ſes paſſions ; & je me contenterai de faire voir au Lecteur l'abſurdité de ſes attaques.

Mon Frére avouë qu'il n'a point encore vû mon analyſe ; cependant il la refute : étrange maniére de refuter ! Il s'en forge d'abord une, il me l'attribuë à faux ; il y raiſonne à perte de vuë ; il en déduit des abſurdités, des contradictions, & je ne ſai quelles niaiſeries : il n'en faut pas davantage ; il eſt entêté ; il me les impute toutes ; ce ſont des ſuites de ma prétenduë analyſe ; il en parle dans tout le cours de ſa Lettre poſitivement comme de la mienne, & avec une aſſurance inconcevable. Quelle témérité ! Quelle impudence ! de me vouloir imputer à outrance une analyſe, qui n'eſt point la mienne, dont je me défens, & que je déſaprouve moi-même. Que veut-il davantage ? Voilà toute la force de ſon attaque abattue : Car je lui nie abſolument, que l'analyſe, qu'il entreprend de refuter, ſoit la mienne. Il me ſemble que j'ai été meilleur prophête que lui, en ce qu'au XV. Journal, pag. 176. * j'ai ſi bien deviné ſes conjectures ; mais d'où vient qu'il n'a pas lû cet endroit-là ? J'y dis expreſſément que ma Méthode eſt directe, géométrique, & telle qu'il la demande ; que celle des fluides employée adroitement (& non comme mon Frére l'employe) conduit à la même & véritable ſolution. En vérité, s'il avoit lû ſans prévention tout ce que je dis en cet endroit, il ſe ſeroit épargné la peine d'écrire tout ſon galimatias, lequel ne me touche aucunement, & qui n'eſt pas plus contre moi que contre le grand Turc. Je paſſe volontiers ſous ſilence toutes ſes groſſes expreſſions, ſeur qu'il s'en repentira dès qu'il reviendra à ſoi. C'eſt pourquoi je ne m'arrêterai qu'à ce qui m'oblige indiſpenſablement d'y répondre.

On ſeroit bien mieux de ſe taire, que de prétendre nous avoir donné quelque ouverture dans cette Science : Je crois que ces ouvertures ſe ſont données mutuellement ; & ſi nous voulions entrer en compte, je ne ſais à qui on ſeroit en reſte.

Je

* N°. XLII. pag. 219.

Je prie ſeulement mon Frére de ſe reſſouvenir à qui il eſt redevable de la premiére Théorie des chainettes, de laquelle il ſe ſert préſentement en Maitre dans toute ſa Lettre: les gens qui le ſavent, ſauront qu'en penſer; ces ſortes de reproches ſentent trop la vanité.

Mon Frére dit, pag. 355 * que *le plaiſir qu'il avoit d'abord, de voir quelque conformité entre ma ſolution & la ſienne, a été bien-tôt ſuivi du chagrin de voir ſon attente fruſtrée; lorsqu'en ayant examiné toutes les circonſtances avec ſoin, il a trouvé que la ſolution de ſon premier & principal Probléme étoit très-défectueuſe.* * Cy-deſſus, pag. 223.

S'il a eu du plaiſir, plûtôt que du chagrin, de voir quelque conformité entre ma ſolution de ſon premier Probléme & la ſienne, que ne me rend-il donc juſtice ſur ma ſolution de ſon dernier Probléme, que j'ai reſolu infiniment au delà de ſa condition, & même dans les cas qu'il tenoit lui-même pour déſeſperés? Que ne témoigne-t-il la joye qu'il en a? Qui eſt-ce qui le rend ſi muet? Eſt-ce l'excès du plaiſir qui lui lie la langue?

Il eſt ridicule que mon Frére ſe reſerve, pag. 356 † dans ſon intention des conditions qu'il n'a pas exprimées, ſavoir que *ſon intention étoit d'inviter les Lecteurs à reſoudre ſes Problémes, par des principes de pure Géométrie.* Pourquoi n'a-t-il pas ajouté cette condition dès le commencement? Peut-être pour avoir matiére de chicaner enſuite. Si la queſtion eſt légitimement reſolue, que lui importe de quelle méthode on ſe ſoit ſervi? Il a exigé une ſolution & non pas une méthode: ce n'eſt pas que je n'aye une méthode directe & purement géométrique, qu'il verra un jour; mais il ſuffit préſentement qu'on voye la foibleſſe de cette reſervation mentale, que les honnêtes gens abhorreront toujours comme des artifices frauduleux. S'il eſt permis d'en uſer ainſi, je prouverai ſans peine que la ſolution de ma Brachyſtochrone, donnée par Monſieur NEWTON, n'eſt pas légitime; parce qu'il n'y a ni démonſtration, ni analyſe; parce qu'il l'a tirée peut-être d'un principe méchanique. Il ne me ſera pas difficile non † Cy-deſſus, pag. 223.

plus de faire des conjectures, de forger une analyſe fauſſe; enfin de démontrer, par l'argument de mon Frére, que Monſieur NEWTON n'a rencontré la vérité que par le moyen de deux fauſſetés qui ſe redreſſent mutuellement. Mais je ſuis de trop bonne foi, pour imputer de telles pauvretés à perſonne.

* Cy-deſſus, pag. 224. Sur la fin de la même page *, mon Frére ſe vante qu'*il a reſolu tous mes Problémes, & en toutes leurs parties, jusqu'à marquer même un endroit où je pouvois m'être trompé, en prenant des courbes differentes pour une même.* Je le prie de me dire cet endroit, & de me marquer, non où je puis m'être trompé, mais où je me ſuis trompé en effet. De plus il n'a pas trop à ſe glorifier, d'avoir ſatisfait à tous mes Problémes. Dans les *Actes* de *Leipſic*, page 216. An. 1697. il confeſſe ingénûment, que ſa ſolution d'un de mes Problémes * implique une manifeſte contradiction: cela s'appelle-t-il reſoudre? S'il n'a point d'autre ſolution, je lui en donnerai une légitime, s'il la ſouhaite, & même par une courbe géométrique; ou bien qu'il la demande à Monſieur LEIBNITZ, à qui je l'ai communiquée, il y a plus d'un an, & qui l'a trouvée fort bonne.

† Cy-deſſus, pag. 225. Page 358 † Mon Frére s'arroge à tort la Théorie de la preſſion des fluides ſuivant la perpendiculaire. Il y a longtemps qu'elle a été connuë de Meſſieurs MARIOTTE, WALLIS, NEWTON, & d'autres, qui ont écrit ſur cette matiére; mais il lui arrive fort ſouvent de venir *poſt feſtum.* C'eſt ainſi qu'il croyoit être le premier qui pût démontrer, que le Cercle eſt la plus grande figure de ſes iſopérimétres, ignorant que PAPPUS l'a déja fait très géométriquement. Il ſe regardoit auſſi comme le premier inventeur des Théorémes pour l'expreſſion des développées dans les Spirales, qu'il ſe perſuadoit m'avoir été inconnus, & long-temps après que Monſieur *le Marquis de* L'HOSPITAL les avoit rendus publics &c.

Dans

* C'eſt le Probléme propoſé au N°. XXX. pag. 158. qui conſiſte à trouver une courbe telle, qu'en menant d'un point donné une droite quelconque, qui la coupe en deux points, le ſolide ſous un des ſegmens & le quarré de l'autre ſoit donné.

Dans l'autre membre de ſa Lettre page 362 * mon Frére ſoutient, qu'*il eſt moralement impoſſible qu'on arrive à une même fauſſeté, par deux raiſonnemens auſſi plauſibles & auſſi apparens que les ſiens.* Mais pourquoi n'eſt-il pas auſſi moralement impoſſible, que je ſois arrivé par deux raiſonnemens faux à une même vérité? C'eſt que le premier l'accommode, pour fortifier ſes conjectures. * Cy-deſſus, pag. 228. *Ibid.* 41. Journal du 15. Déc. pag. 481. Ed. de Paris 765. Ed. de Holl.

Je remarque, dans ce qui ſuit, un paralogiſme ſemblable à celui-ci: *Tout caillou eſt pierre; Donc toute pierre eſt caillou:* lors qu'il dit que, *ſi au lieu de ſe repréſenter la courbe dont* $\int x^m dy$ *eſt un* Maximum, *comme un linge; & celle dont* $\int (dt : x^m)$ *eſt un* Minimum *comme une corde: l'on peut tourner la choſe, en ſe ſervant de la conſideration de la corde pour celle-là, & du linge pour celle-ci;* Car il eſt bien vrai que ſi $\int (dt : x^m)$ eſt un *Minimum*, auſſi $\int x^m dy$ ſera toujours un *Maximum*: mais la converſe ne s'enſuit aucunement; puiſque j'ai trouvé par mes analyſes directes & indirectes, qu'il y a des courbes où $\int x^m dy$ fait un *plus grand*, ſans que pour cela $\int (dt : x^m)$ faſſe un *plus petit*. Ce paralogiſme de mon Frére vient de ce qu'il n'a pas pris garde, que ſon Probléme des iſopérimétres ſouffre pluſieurs ſolutions; & c'eſt pour la ſeconde fois qu'il choppe contre ce même écueil: Mr. LEIBNITZ lui ayant très bien objecté la même faute, qu'il a déja commiſe touchant la courbe Paracentrique, lorſqu'il croyoit qu'il n'y en avoit qu'une. C'eſt ce qui m'a fait prendre la précaution de dire en general, pag. 174 † qu'*on peut toujours trouver une même courbe, pour que* $\int GH dy$ *faſſe un* plus grand, *ou un* plus petit, *& pour que* $\int (dt : GH)$ *faſſe réciproquement un* plus petit, *ou un* plus grand: pour marquer que mes Brachyſtochrones ſatisfont toujours aux Iſopérimétres; mais qu'il y a d'autres courbes qui y ſatisfont auſſi, leſquelles ne ſont pas des Brachyſtochrones. † Cy-deſſus, pag. 217.

* Cy-deſſus, pag. 228. Au commencement de la page 363 * il ſemble que mon Frére ſoit dans la penſée, qu'en faiſant $m = 1$; auquel cas on ſait que la courbe doit être un Cercle pour $\int x\,dy$ *Maximum*, elle ne le ſoit pas de même pour $\int (dt : x)$ *Minimum*. Cependant je puis prouver par une démonſtration ſynthétique, faite à la maniére des Anciens, ſans faire attention ni à ſon linge, ni à ſa corde, qu'effectivement le Cercle a cette proprieté; que $\int (dt : x)$ ſoit un *Minimum*. Je ne ſaurois donc pénétrer ce qu'il veut dire par *la raiſon du choix*, que je dois avoir tenu dans cette recherche; puiſque c'eſt une même courbe conſiderée de l'une & de l'autre façon: c'eſt à dire, poſant que $\int x\,dy$ ſoit un *Maximum*; ou que $\int (dt : x)$ ſoit un *Minimum*. Je ne comprends rien non plus dans tout ce qu'il dit de ſon linge & de ſa corde; & je puis dire en conſcience qu'en découvrant cette belle convenance entre $\int (dt : GH)$ *Maximum*, & $\int GH\,dy$ *Minimum*, ou entre les Problémes des Brachyſtochrones & Iſochrones, je n'ai pas plus ſongé au chiffon de linge, & à la corde, dont il fait tant de bruit, qu'aux Lapons. Il devroit donc reconnoitre par cette ſeule découverte que je fis, que ce n'eſt ni par hazard, ni par la ſuppoſition de deux fauſſetés, que j'ai rencontré la vérité; mais que c'eſt plûtôt parce que j'en poſſede la véritable méthode; & que ſi dans mon premier écrit il ſe gliſſa une faute légére, que je corrigeai ſi aiſément dans le ſecond, ce n'étoit tout au plus qu'une faute de précipitation, qui laiſſe la méthode ſans atteinte. Si je ne propoſai cette proprieté dans le premier écrit, que pour la ſimple puiſſance de BG, c'eſt parce qu'il ne s'agiſſoit que de répondre au Probléme de mon Frére, & qu'il n'étoit pas queſtion de pouſſer ma découverte plus avant. Mais
† Cy-deſſus, pag. 218. s'il avoit voulu lire ce que je dis à la page 174 † où je la donne pour generale, il auroit pû ſe paſſer de ſon injuſte *peut-être*, & ſuſpendre le jugement qu'il tire de ſes fauſſes conjectures.

Voilà, Monſieur, tout ce que j'ai pû remarquer à la hâte dans la Lettre de mon Frére: touchons un peu à l'*Avis* qui

la

la ſuit immédiatement. Il me reproche d'abord que je me vante de n'avoir *emploïé que trois minutes de temps pour tenter, commencer, & achever d'approfondir tout le myſtère.* Qu'il prenne la peine de reflêchir un peu ſur ce que ces Problémes, publiés dans les *Actes de Leipſic* au mois de *Mai 1697*, ne ſont venus à ma connoiſſance que ſur la fin du même mois; que ma Lettre aſſez longue, écrite à l'Auteur de *l'Hiſtoire des Ouvrages des Savans* *, s'y trouve inſerée au mois de *Juin* ſuivant; que l'Auteur l'a retardée, à cauſe de la Figure qu'il y faloit faire graver; & que ſans cela ma Lettre auroit paru dès le même mois de Mai, ainſi que l'Auteur lui-même me l'a écrit: combien de temps me reſtoit-il donc, pour y avoir pû penſer? Si mon Frére veut conſiderer tout cela, il trouvera, ſans doute, qu'il n'y a point de gaſconade ſi palpable qu'il ſemble penſer, dans ce que j'ai dit; du moins il verra qu'il s'en faut bien que je n'y aye employé les trois mois qu'il m'avoit accordés. Mais ce ſont choſes differentes, que d'inventer une méthode, & la mettre en pratique, ou d'en faire le calcul: il eſt quelquefois facile de trouver une méthode, dont l'analyſe devient pourtant très-pénible & très-prolixe. Je dis donc à mon Frére que j'ai bien repaſſé, & plus d'une fois, ſur ma méthode, parce qu'il s'agit là d'examiner s'il n'y a point de faux raiſonnement; mais de repaſſer ſur la ſolution, ou ſur l'analyſe, comme c'eſt l'affaire d'un écolier que d'examiner s'il n'y a point de faute de calcul, il n'eſt pas beſoin que je m'en mette en peine, me fiant entiérement à ma méthode; outre que je ſoutiens, comme tout le monde le peut voir, que ce qui concerne l'arc BF n'eſt qu'une partie disjonctive, & non copulative, de ce qu'il a demandé. Mais qu'il examine bien ſa ſolution; peut-être que ſi elle eſt differente de la mienne, [ce que je ne ſais pas encore] c'eſt elle qui eſt fauſſe: il n'eſt pas infaillible. Il commence dans cet Avis d'admettre tout; il n'y a plus que l'égalité $dv = ddy : (dt^2 - dy^2)$ qui lui faſſe de la peine. Si par hazard ſa ſolution touchant

* N°. XXXVIII.

la ſimple puiſſance de l'arc BF ou de t, conſiſte en cette égalité $x^m y = t^{m+1}$, laquelle donneroit une conſtruction de la courbe fort aiſée; qu'il ſache que ſa ſolution ſeroit abſolument fauſſe. Quoiqu'il en ſoit, j'ai bien de la joye de ce qu'enfin il veut bien accepter l'arbitrage de Mr. LEIBNITZ; je ſuis auſſi content de celui de Mr. le *Marquis de* L'HOSPITAL, & de celui de Mr. NEWTON: s'il avoit accepté plûtôt cet expédient, il auroit pû éviter bien d'inutiles débats. Il y a long-temps que j'ai envoyé en dépôt à Mr. LEIBNITZ toutes mes ſolutions avec mon analyſe, * & mes méthodes tant directes qu'indirectes, leſquelles il a fort approuvées & louées; bien loin d'y trouver ces ſortes de fauſſetés, qui en ſe redreſſant font rencontrer la vérité. Je prie donc mon Frére d'envoyer auſſi inceſſamment les ſiennes, tant méthode que ſolution & analyſe, à Mr. LEIBNITZ, lequel les rendra publiques toutes à la fois, afin que nos Lecteurs, ſur tout Meſſieurs nos Juges, puiſſent les confronter, les examiner, & en juger. Demeurons-en là donc, & que mon Frére ſe taiſe, juſqu'à ce que nos ſolutions & nos méthodes aient paru: auſſi n'accepterai-je plus rien de lui, à moins qu'il n'ait livré les ſiennes à Mr. LEIBNITZ, & qu'elles ſoient publiées avec les miennes, à même temps, & en même lieu. La juſtice demande auſſi que ſon ami inconnu remette le prix entre les mains de quelqu'un de nos Juges; & il le fera, s'il eſt homme de bien & d'honneur. J'ai déja dit, & je le dis encore, que je n'y prétends rien; mais les pauvres y prétendent.

Quant aux nouveaux Problémes, que je lui ai propoſés; mon Frére dit que cet Inconnu eſt homme à les reſoudre, & me conſeille (ſi je ſuis ſage) d'en demeurer là, & de ne le pas pouſſer davantage. Je ſuis obligé à mon Frére de ce conſeil: mais il me permettra de dire, que cet Inconnu (quel qu'il ſoit) eſt très peu ſage, de n'avoir pas accepté un défi auſſi avantageux pour lui que le mien, s'il eſt vrai qu'il ſoit ſi habile

* Voiez le N°. LXXV.

bile homme, & qu'il en ait déja trouvé les ſolutions, comme mon Frére nous l'aſſure.

P. S. *Du* 4 *Octobre, reçu entre le* 14 *& le* 20.

Comme je n'ai jamais ſoutenu, que *la figure d'entre les Iſopérimétres, dont le centre de gravité eſt le plus éloigné de l'axe, & celle d'un linge rempli de liqueur, ſoient une même figure*; Je ne vois pas pourquoi mon Frére s'écrie en l'air, & s'efforce tant pour prouver leur diverſité: cependant il ne m'a pas falu tant de loiſir pour trouver celle-là; la voici cachée (à l'exemple de mon Frére) ſous cette Anagramme,

$a^8\ b\ c^2\ d^3\ e^8\ i^7\ l^2\ m\ o^2\ p^4\ q^3\ r^5\ s^7\ t^8\ v^9\ x^2\ y.$ †

dont je donnerai la clef, après la déciſion de nôtre differend, quand mon Frére aura donné la ſienne. Pour cet effet, (à moins que mon Frére ne veuille faire trainer ce procès en longueur) il me ſemble qu'il vaudroit mieux le remettre au ſeul arbitrage de Mr. LEIBNITZ, ou d'un autre, ſi ce grand homme, tout déſintéreſſé qu'il eſt, lui paroit ſuſpect. Pour lui ôter toute excuſe & tout ſoupçon de colluſion, je m'engage à deux choſes très-avantageuſes pour lui: la première, que je m'en tiendrai à la déciſion de Mr. LEIBNITZ, quand même il décideroit contre moi: la ſeconde, qu'en cas qu'il décidât en ma faveur, & que mon Frére ne s'en trouvât pas ſatisfait, je lui permettrai d'en appeller au jugement de Mr. le *Marquis de* L'HOSPITAL & de Mr. NEWTON, tant s'en faut que je les recuſe. Voilà deux articles que mon Frére acceptera infailliblement, s'il ne craint déja pour ſa cauſe. N'eſt-ce pas aſſez de condeſcendance, que de me priver de mon droit d'appeller, pour le ceder entiérement à mon Frére?

Voiés N°. LXVI.

† Le ſens de cette anagramme eſt celui-ci: *Si ſpatium curvæ quæſitæ vocetur* r, *erit, poſitis* dt *æqualibus,* dy *æquale* x∫rdx.

EXTRAIT

N°. XLVIII.

EXTRAIT

Du Traité de Méchanique *de Monſieur* DE LA HIRE.

PROPOSITION CXX.

Traité de Méchanique. Paris 1695. 12°. pag. 421. TAB. XI. N°. XLVIII.

QUE les Corps, qui tombent dans une Cycloïde renverſée, arriveront à ſon ſommet dans le même tems, de quelque hauteur que ce ſoit qu'ils commencent à tomber.

Soit la demi-Cycloïde renverſée F E D, dont A F ſoit la baſe, & D le ſommet renverſé, laquelle ſoit décrite par le demi-cercle A B D. Je dis, qu'un corps, qui tombe dans la courbure de la demi-cycloïde F E, arrivera à même tems au point D, de quelque point E que ce ſoit qu'il commence à tomber.

Si de tous les points B du demi-cercle générateur A B D, on méne des cordes B D, & que par tous les points B on méne auſſi des parallèles K G B E à la baſe A F, qui rencontrent la Cycloïde en E, & la corde la plus proche en deſſus en G, & le Diametre A D en K: on ſait, par la nature de la Cycloïde, que ſa courbure F E D eſt formée par des parties égales aux parties des cordes comme B G, qui en ſont les touchantes, & qui ne diférent pas de la courbe quand les arcs B B du cercle générateur ſont très petits.

Mais, par ce qui eſt démontré dans la précédente Propoſition, que le corps, qui tombe par le plan incliné B G, y emploie un tems, qui eſt à celui qu'il emploie à parcourir B I parallèle à A D, & compriſe entre les B E, comme les longueurs de ces lignes B G, B I, quelque viteſſe que le corps ait en B. Et puiſque la viteſſe qu'il a en G eſt la même qu'en I, il s'enſuit que la ſomme des tems que le Corps emploieroit à parcourir chaque portion des cordes de ſuite, comme B G, avec les viteſſes acquiſes ſucceſſivement dans la chute de chaque partie B G, ſera à la ſomme des tems que le corps employeroit à parcourir chaque perpendiculaire B I, comme la ſomme de toutes les parties B G, qui ſont égales à la portion de Cycloïde E E D, à la ſomme de toutes les perpendiculaires B I, qui ſont égales à B H, ou K D.

Mais

... le, la portion de la courbe
... répond dans le cercle géné-
... par la portion de Cycloïde
... perpendiculaire B H, comme

... ms de la chute par B D ſera
... à B H: Donc le tems par
... B D à B H, & le tems par
... *en raiſon égale*, le tems par
... D, ou la courbe E E D ſon
... po, les tems de la chute par
... & par conſéquent, le tems
... Cycloïde E E D juſqu'a ſon
... nt auſſi égaux entr'eux, puiſ-

... que M. HUGENS DE ZU-
... dules qu'il avoit appliqués aux
... eme inégal. Il a accommodé
... ſpenſion du pendule, ce qui
... urs ſont *iſochrones*, ou d'égale
... onſidéré comme un point, il
... ſont jointes à la ſuſpenſion,
... ur de ces Cycloïdes ſoit égal

N°. XLIX.

JOHANNIS BERNOULLI

Inveſtigatio algebraïca arcuum Parabolicorum aſſignatam inter ſe rationem habentium.

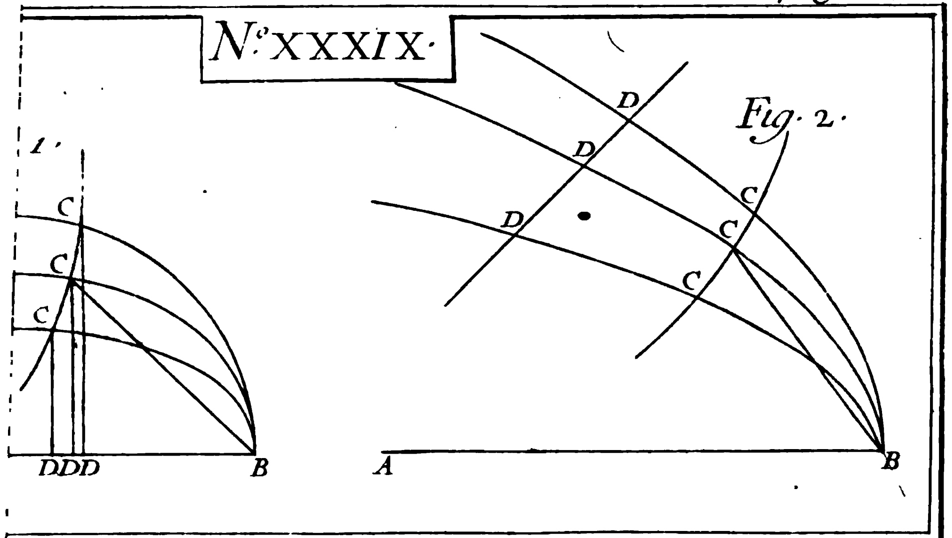
Demonſtratio Iſochroniſmi Deſcenſuum in Cycloide, &c

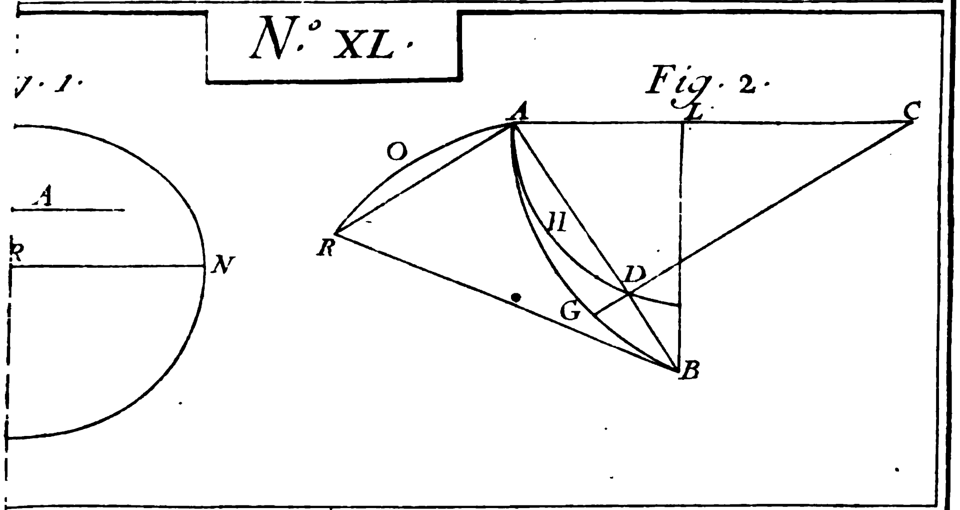
Acta Erudit. Lipſ. 1698. Jun. *pag.* 261.

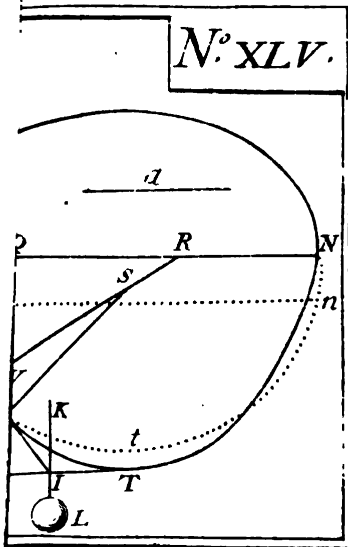
JAM diu eſt quod novimus extenſionem Curvæ parabolicæ & quadraturam ſpatii hyperbolici mutuam connexionem habere; novimus etiam areas hyperbolicas, inter aſymtoti applicatas ſecundum progreſſionem geometricam procedentes, eſſe æquales; quod pariter intelligendum de ipſis ſegmentis hyperbolicis, quibus illæ areæ a trapeziis rectilineis deficiunt: ſunt enim etiam hæc trapezia rectilinea inter ſe æqualia. Unde non difficulter ad aſſignatam aream hyperbolicam, inter aſymtoti applicatas comprehenſam, inveniri poſt alia hujusmodi area in data ratione.

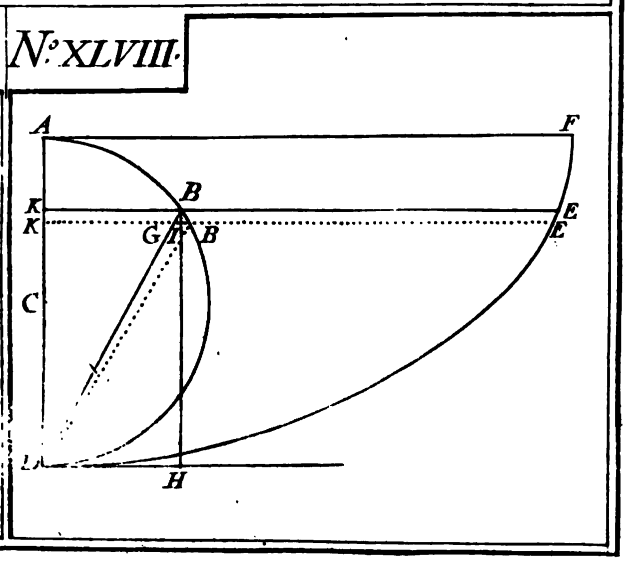
Quod ſi igitur portiones Curvæ parabolicæ in eadem eſſent ratione cum iſtis areis, oppido factum haberemus quod quærimus; hoc eſt, a dato quovis in Parabola puncto, in promtu eſſet ſtatim reſecare arcum, qui haberet ad alium datum rationem datam. Verum enimvero portiones Curvæ parabolicæ, licet generaliter dicantur per quadraturam Hyperbolæ rectificari, non tamen iſtis areis inter applicatas aſymtoti proportionari poſſunt, ſed aliis areis comprehenſis inter applicatas axis conjugati: aſt hæ areæ, ut alteræ illæ, inter ſe æquari non poſſunt, niſi binæ tantum, & quidem ſimiliter ultra citraque axem ſumtæ: unde etiam contingit, ut impoſſibile ſit dato arcui parabolico alium æqualem, ſed diſſimilem, abſcindere. Hoc enim ſi fieri poſſet, ipſam quoque rectificationem Parabolæ,

Hy-


N°. XXXIX.
1.
C
C
C
DDD
B
Fig. 2.
D
D
D
C
C
C
A
B


N.° XL.
Fig. 2.
A
N
O
A
L
C
R
D
G
B


N°. XLV.
a
R
N
S
n
K
t
I
T
L


N°. XLVIII.
A
F
B
K
K
E
E
G
B
C
H

Hyperbolæve quadraturam, poſt ſe traheret. Hinc etiam accidit, quod etiamſi ratio data ſit inæqualitatis, non tamen a quovis, in Parabola ad lubitum aſſumto, puncto reſecari poſſit arcus quæſitus; ſed id ipſum punctum, per conſtructionem demum, ſit determinandum.

Ut igitur modum invenirem comparandi arcus parabolicos, in ratione data quavis inæqualitatis; vidi quidem perfacile, areas illas hyperbolicas ſuper axe conjugato eſſe prius in data ratione ſumendas: ſed hoc ipſum eſt, quod aliquid laboris & induſtriæ requirere videbatur. Qua tamen via, Algebra duce ſola, (hic enim methodus differentialis, aliave infiniteſimalis nihil omnino præſtat,) redditus fuerim voti compos, ut oſtendam; calculi quem inivi capita principaliora indicabo.

Eſto Parabola CAN, cujus axis AX, ſemiparametet AD; in eaque arcus datus BC, ad quem aſſignandus ſit alius MN, rationem habens datam n ad 1. Ducta normali RAδ, centroque A & ſemi axe AD, deſcripta Hyperbola æquilatera IDZ; erit, ceu notum eſt, rectangulum ſub AD & arcu parabolico quovis BC æquale areæ, ſeu trapezio hyperbolico correſpondenti HRSI, quod nimirum continetur inter applicatas axis conjugati HR, IS; hoc eſt, arcus parabolici, BC, MN ſunt ut correſpondentia trapezia hyperbolica RI, αZ. Res itaque eo recidit ut, dato RI, determinetur aliud αZ, quod ſe habeat ad illud ut n ad 1; id quod ſic efficio. TAB. XI. N°. XLIX. *Fig.* 1

Ductis aſymtotis AG, AT, & ad eas applicatis DE, HF, IG, intelligantur AK, AL, AQ, AT, continue proportionales in ratione AF ad AG: palam eſt, quod ductis applicatis KV, LW, QY, TZ, non ſolum trapezia hyperbolica KW, LY, QZ, tam inter ſe, quam ipſi trapezio hyperbolico FI ſint æqualia; ſed etiam ductis ſubtenſis IH, VW, WY, YZ, ipſa ſegmenta hyperbolica VW, WY, YZ, ſint inter ſe, & ipſi ſegmento IH, æqualia: ideoque, ſi ſumantur tot continue proportionales AK, AL, &c. quot ſunt unitates in $n+1$, erit numerus ſegmentorum inter V & Z $= n$; & proinde ſumma ſegmentorum VW +

WY + &c. eſt ad ſegmentum HI ut n ad 1. Jam vero, ſi prima continue proportionalium AK ſumatur debitæ magnitudinis, ita ut demiſſis applicatis ad axem conjugatum $V\alpha$, $W\beta$ &c. ſumma trapeziorum rectilineorum $\alpha W + \beta Y +$ &c. ſeu polygonum rectilineum $\alpha VWYZ\delta$ ſit ad trapezium rectilineum RI, ut n ad 1, [quod utique fieri poteſt, quamvis trapezia rectilinea αW, βY &c. inter ſe non ſint æqualia; ſufficit enim quædam majora eſſe, quædam minora, ut ita, per compenſationem, ſimul omnia toties præciſe contineant ipſum RI, quoties n continet unitatem] hoc, inquam, ſi ita factum ſit, manifeſtum eſt aream hyperbolicam $VZ\delta\alpha$, ſeu ſummam trapeziorum hyperbolicorum $\alpha W + \beta Y +$ &c. fore ad trapezium hyperbolicum RI, ut n ad 1: eſt enim totum ad totum, ſeu polygonum rectilineum $\alpha VWYZ\delta$ ad trapezium rectilineum RI, ut ablatum ad ablatum, ſeu ut ſumma ſegmentorum VW + WY + YZ ad ſegmentum HI; utrobique nempe ut n ad 1: ergo etiam reliquum ad reliquum ſeu trapez. hyperb. αZ ad trapez. hyperb. RI, & per conſequens arcus parabolicus MN ad arcum parabolicum BC, datam habebit rationem n ad 1. Id unicum igitur intendendum eſt, ut determinetur punctum K. In hunc finem voco cognitas DE, ſeu AE, $= a$, AF $= b$, AG $= c$; incognitam AK $= x$; erunt AL $= cx : b$, AQ $= ccx : bb$, AT $= c^3 x : b^3$, &c. reperietur autem $\alpha V = x\sqrt{\tfrac{1}{2}} + aa\sqrt{\tfrac{1}{2}} : x$, $\beta W = cx\sqrt{\tfrac{1}{2}} : b + aab\sqrt{\tfrac{1}{2}} : cx$, $\gamma Y = ccx\sqrt{\tfrac{1}{2}} : bb + aabb\sqrt{\tfrac{1}{2}} : ccx$, &c. Item $A\alpha = x\sqrt{\tfrac{1}{2}} - aa\sqrt{\tfrac{1}{2}} : x$, $A\beta = cx\sqrt{\tfrac{1}{2}} : b - aab\sqrt{\tfrac{1}{2}} : cx$, $A\gamma = ccx\sqrt{\tfrac{1}{2}} : b^2 - aabb\sqrt{\tfrac{1}{2}} : ccx$, &c.

ideoque

$$\underset{\alpha V + \beta W}{\frac{cx + bx}{b}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{aac + aab}{cx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \quad \underset{\beta W + \gamma Y}{\frac{ccx + bcx}{bb}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{aabc + aabb}{ccx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \text{ \&c.}$$

multiplicatis reſpective per

$$\underset{A\beta - A\alpha\ (\alpha\beta)}{\frac{cx - bx}{b}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{aac - aab}{cx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \quad \underset{A\gamma - A\beta\ (\beta\gamma)}{\frac{ccx - bcx}{bb}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{aabc - aabb}{ccx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \text{ \&c.}$$

prove-

provenit

$$\frac{cc-bb}{2bb}xx+\frac{aacc-aabb}{bc}+\frac{cc-bb}{2ccxx}a^4,\quad \frac{c^4-bbcc}{2b^4}xx+\frac{aacc-aabb}{bc}+\frac{bbcc-b^4}{2c^4xx}a^4,$$

$\alpha V + \beta W$ in $\alpha\beta$ — 2 trapez. rectil. αW $\qquad$ $\beta W + \gamma \Upsilon$ in $\beta\gamma$ — 2 trapez. rectil. $\beta \Upsilon$

$$\frac{c^6-bbc^4}{2b^6}xx+\frac{aacc-aabb}{bc}+\frac{b^4cc-b^6}{2c^6xx}a^4, \text{ \&c.}$$

$\gamma \Upsilon + \delta Z$ in $\gamma\delta$ — 2 trap. rectil. γZ, &c.

$$\frac{c^{2n}-bbc^{2n-2}}{2b^{2n}}xx+\frac{aacc-aabb}{bc}+\frac{b^{2n-2}cc-b^{2n}}{2c^{2n}xx}a^4$$

$=$ duplo ultimi trapezii rectilinei.

His omnibus in ſummam collectis, [quod commode fieri poteſt, omnes enim primi termini, ut & omnes ultimi, conſtituunt progreſſionem geometricam, cujus numerus terminorum eſt n, medii vero faciunt ſeriem æqualium] habebitur adhibendo vulgares regulas pro ſummandis progreſſionibus geometricis.

$\frac{c^{2n}-b^{2n}}{2b^{2n}}xx+\frac{naacc-naabb}{bc}+\frac{c^{2n}-b^{2n}}{2c^{2n}xx}a^4 = 2$ ſum. trapezior. rectil. $= 2$ polyg. rectil. $\alpha V W Y Z \delta$: ſed multiplicando $RH + SI$ per RS, prodibit duplum trapezii rectilinei RI, $= (cc-bb):2+(aacc-aabb):bc+(cc-bb)a^4:2bbcc$; & ſecundum ea quæ ſupra dicta ſunt, trapez. rectil. RI eſt ad polyg. rectil $\alpha V W Y Z \delta$, ut 1 ad n, hoc eſt $(ncc-nbb):2+(naacc-naabb):bc+(ncc-nbb)a^4:2bbcc$ debet æquari $(c^{2n}-b^{2n})xx:2b^{2n}+(naacc-naabb):bc+(c^{2n}-b^{2n})a^4:2c^{2n}xx$; quibus reductis pervenietur ad hanc æquationem quadratam,

$$c^{2n}x^4:(cc-bb)=(nc^{2n}b^{2n}+na^4c^{2n-2}b^{2n-2})xx:(c^{2n}-b^{2n})-a^4b^{2n}(cc-bb).$$

 Sumta

Sumta itaque AK = radici hujus æquationis x, factoque ut b^n ad c^n, ita AK ad AT, determinabunt applicatæ KV, TZ puncta V & Z, ex quibus eductæ axi parallelæ VM, ZN, auferent ex Parabola arcum optatum MN, qui ſcilicet ad arcum expoſitum BC rationem obtinebit datam n ad 1. *Q. E. F.*

Quod notatu dignum hic venit, atque mihi, ad longe operoſiorem calculum ab initio animum præparanti, ſupra votum tamen & expectationem ſucceſſit, eſt, quod trapezia rectilinea αW, βY, &c. formaverint tres progreſſiones indefinite ſummabiles; ſi enim aliæ prodiiſſent a geometricis diverſæ, & non indefinite ſummabiles, [quod facillime accidere potuiſſet, ſi pro incognita alia quævis quam AK accepta fuiſſet] Problema ſane per unam & generalem æquationem pro numero indefinito n ſolvi non potuiſſet, ſed pro ſingulis numeris, iiſque integris & rationalibus duntaxat, ſingulares ſemper de novo æquationes fuiſſent quærendæ, magis minuſve compoſitæ pro re nata. Hoc vero incommodum opportune ſublatum eſt progreſſionibus illis geometricis; adeo ut pro numero n, non ſolum numerum integrum, ſed & fractum ſurdumve quemvis ſubſtituere poſſimus in æquatione generali; quæ ideo tamen nunquam ſupra quadratam aſcendet, unde Problema in omni caſu eſt planum. Suppono autem datarum b & c etiam datas eſſe poteſtates b^n & c^n; quarum quidem ratio, ſi n ſit numerus ſurdus, haberi non poteſt, niſi mediante Logarithmica.

Dixi ſupra, non poſſe citra ipſam rectificationem Parabolæ inveniri duos arcus æquales & diſſimiles. Jam dico porro, ſi ratio data 1 ad n ſit inæqualitatis, arcum majorem debere intra limites ſuos complecti minorem; ſeu extremitatem unam M majoris fore viciniorem vertici A, quam extremitatem minoris B, alteram vero majoris extremitatem N, ab eodem A remotiorem fore, quam minoris alteram extremitatem C: Id eſt, ſi intelligantur BO, CP normales ad axem AX, cadet neceſſario arcus OP, qui utique ipſi BC eſt æqualis, totus in-

intra MN. Quod ſi quis ſe habere putet aliam methodum, quæ aliud doceat, * per quam ſcilicet arcus minor BC, vel OP, ſive totus, ſive pro parte, extra majorem caderet; ſciat, ex hoc ſolo, aut abſolute eam eſſe fallacem, aut inventam ſe habere quadraturam Hyperbolæ, hactenus fruſtra quæſitam.

Quod ſupereſt, ex iiſdem fundamentis, quibus hic uſus ſum, poteſt etiam ſolvi ſequens: *Datis duobus, tribus, pluribusve arcubus parabolicis diſcretis, aſſignare alium arcum continuum omnibus illis ſimul ſumtis æqualem.* Memorabile quoque eſt, quod quamvis omnis arcus parabolicus rectificationem recuſet, poſſit tamen inveniri arcus, qui datum alium arcum excedat, vel ab eodem deficiat, exceſſu, vel defectu rectificabili. Hujuſmodi alia multa omitto. †

Hæc jam jam dimiſſurus accipio D. L. H. †† *Tractatum Mechanicum* A. *1695* *Pariſiis* impreſſum, quem aperiens fortuito incidi in Propoſitionem 120, ubi demonſtrare nititur *Author* Iſochroniſmum in Cycloide ab HUGENIO primo inventum. Poſteriora tantum hujus demonſtrationis verba legens, vidi eum concludere, tempus deſcenſus per Cycloidem eſſe duplum temporis deſcenſus per Diametrum verticalem circuli generatoris: hoc autem cum abſolute falſum ſcirem; (ipſo quippe HUGENIO jam demonſtrante, tempus per Cycloidem ſeſe habere ad tempus per Diametrum, in ratione ſemicircumferentiæ circuli ad Diametrum) animum inceſſit explorare, unde gravis iſte error originem traxerit.

Hanc itaque ut detegerem, demonſtrationem memoratam [quam alias, quod de Propoſitionis veritate diu ante perſuaſus eſſem, forſan nunquam legiſſem,] legere cœpi; ſed ulterius progredi non erat neceſſe, quod in ipſo ſtatim limine deprehendi anguem in herba non latentem, ſed patentem. Concludit enim poſitis quotcunque & quibuſcunque analogiis $a : b = c : d$ $m : n = p : q$; $r : s = t : u$, fore aggregatum omnium prima-

* Vide ſupra Num. XXIII. Art. III. pag. 152. & Nos. XXX. pag. 159. XXXIV. p. 171. 172. XXXV. pag. 177.

† Videatur Nus. ſequens.

†† DE LA HIRE. Vide Num. præced.

marum $a + m + r$ ad aggregatum omnium ſecundarum $b + n + s$, ut aggregatum omnium tertiarum $c + p + t$ ad aggregatum omnium quartarum $d + q + u$; quod num verum ſit, judicent alii. Hoc ſaltem dico, quod ſi id verum eſſet, Circulus, Hyperbola, & nulla non figura foret quadrabilis, & nulla non curva rectificabilis: mirabile quoque compendium nobis ſubminiſtraret inveſtigandi dicto citius tempus deſcenſus per quamcunque curvam; foret enim ſemper, ſecundum ratiocinium *Authoris*, tempus per curvam ad tempus per altitudinem ejus verticalem, ut ipſa curva ad ipſam altitudinem.

Ex dictis liquet quanto conſultius fuiſſet, nudam allegaſſe Propoſitionem nobiliſſimi hujus inventi, & Lectorem remiſiſſe ad demonſtrationem *Hugenianam*. Quod ſi vero *Hugeniana*, licet legitima, ſed ob multarum propoſitionum farraginem & perplexitatem non arriſit; laudo propoſitum ſuccinctiorem tradendi, modo tradidiſſet genuinam. Qua in re; cum a ſcopco multum aberraverit, hic ego vices ejus ſupplebo, demonſtraturus breviſſime ac perſpicue, quod *in Cycloide, cujus axis ad perpendiculum erectus eſt, vertice deorſum ſpectante, tempora deſcenſus quibus mobile, a quocunque in ea puncto dimiſſum, ad punctum imum verticis pervenit, ſunt inter ſe æqualia.* Sit Cyclois FDC, cujus axis AD, circulus generator ABD; dico tempus per quamvis portionem GMD fore æquale tempori per integram ſemicycloidem FED. Concipiatur DG diviſa in partes indefinite parvas Mm, ut & DF in alias numero æquales Ee; unde erit partium una in DF, ad partium unam in DG, ut ipſa DF ad DG; aſſumanturjam ex illis partibus duæ homologæ Mm, Ee, id eſt, tales quæ ſecent DF, DG proportionaliter in E, M; ducanturque applicatæ ET, MN, item DB, DO, DL.

TAB. XI. N°. XLIX. *Fig.* 2.

Quoniam igitur per hyp. DF, DE, & DG, DM, ſunt proportionales, ergo etiam earum ſemiſſes, quæ, per naturam Cycloidis, ſunt DA, DB, & DL, DO, harumque quadrata proportionalia, id eſt $DA\,q : DB\,q$ [$= DA : DT$] $= DL\,q : DO\,q$ [$= DH : DN$], *dividendo* $AT : DT = HN : DN$, ideoque $\surd AT : \surd HN$ [ſeu, per naturam

gra-

gravium deſcendentium, velocitas in E ad velocitatem in M] $= \sqrt{DT} : \sqrt{DN} = DB : DO = DE : DM =$ [per hyp.] Ee : Mm; quoniam itaque velocitas in E eſt ad velocitatem in M, ut Ee ad Mm, patet quod tempus per Ee ſit æquale tempori per Mm; id quod de omnibus aliis portionibus homologis demonſtratur: unde tempus per omnes Ee, id eſt, per DF, erit æquale tempori per omnes Mm, id eſt, per DG; ergo deſcenſus per DF & DG ſunt iſochroni. *Q. E. D.*

N°. L.

JOHANNIS BERNOULLI

Theorema univerſale rectificationi Linearum Curvarum inſerviens. Nova Parabolarum proprietas. Cubicalis primaria arcuum menſura, &c.

EXhibui in *Actis Anni* 1695, *pag.* 374, * modum generalem, *ad datam quamvis Curvam deſcribendi aliam, quarum ſumma, vel differentia, per arcum circuli ſit menſurabilis*, deductum ex generali illo de evolutione condeſcriptarum theoremate, quod poſtea ad alias ſpeculatione viam aperuit celeberrimis Viris LEIBNITIO & TSCHIRNHAUSIO in eodem *Actor. Anno m. Novembr.* † Ex eo tempore cogitare cœpi, an non forte, alia combinatione Curvarum, id fieri poſſit per ſolas lineas rectas; ſeu an non ad Curvam propoſitam inveniri poſſit alia, quarum ſumma, vel differentia, abſolute rectificabilis exiſtat; nec ſpe vana. Cum enim non ita pridem hæc in mentem redirent, ſequens inſigne theorema ſe mihi obtulit: *Si poſitis cujuſvis curvæ datæ coordinatis x & y, fiat alia curva cujus coordinatæ ſint* $xdy^3 : dx^3$ *&* $3xdy^2 : 2dx^2 -$

Acta Erudit. Lipſ. 1698. Octob. pag. 462.

* Supra N°. XXVI.
† Nis. XXVIII. & XXIX.

$\frac{1}{2}\int(dy^2 : dx)$ *erunt ambæ curvæ, genitrix & genita, ſimul ſumtæ rectificabiles: Facta enim recta, quæ ſe habeat ad abſciſſam curvæ datæ x, ut cubus tangentis ad cubum ſubtangentis in eadem curva data; æquabitur hæc recta longitudini curvarum ſimul ſumtarum: id eſt, expreſſione litterali adhibita, ſi elementum curvæ datæ vocetur* dt, *longitudo ejuſdem* D, *longitudo genitæ* G, *erit* $D + G = xdt^3 : dx^3$. *Notandum hic ſi Curva propoſita verſus axem ſit cava & [poſita dx conſtante],* $3\,xddy$ *ſit majus quam* $dxdy$, *tunc differentia curvarum dicta rectæ æquatur.*

Non opus eſt indicare, qua via, quave analyſi huc pervenerim; calculus foret nimiæ prolixitatis: ſi tamen alicui animus erit aſſerti veritatem explorare, poterit id commodiſſime ſynthetico more præſtare; differentiando ſcilicet aſſignatam hanc ex conſtructione rectam, & quod prodit conferendo cum aggregato elementi curvæ genitricis & elementi genitæ: reperiet enim utrobique æqualitatem. Hinc, ſive curva propoſita algebraïca ſit, ſive tranſcendens primi gradus, ſi modo $dy^2 : dx$ ſit ſummabile, curva genita tunc ſemper erit algebraïca: datur namque algebraïcæ ratio dx ad dy. Hinc etiam, quod incognitum hactenus fuit, & inter rara hujus ſæculi inventa numerari poteſt, ſequitur omnem Parabolam cujuſvis gradus, aut per ſe, aut cum alia alius gradus Parabola conjunctam, abſolute eſſe rectificabilem: per ſe, ſi exponens parabolæ ſit $= (1 + 2p) : 2p$ [per p intelligo quemlibet numerum integrum]; cum alia vero generaliter in omni caſu. Eſto enim datæ parabolæ gradus ſeu exponens n: dico eam cum alia parabola cujus exponens $= (2n - 1) : (3n - 2)$ junctim admittere rectificationem; qualiſcunque etiam ſit numerus n, ſive fractus, ſive integer, ſive ſurdus, ſive rationalis, ſive affirmativus, ſive negativus. Unde pro Parabola communi *Archimedea* reperitur parabola cubico-biquadratica, id eſt cujus exponens eſt $\frac{3}{4}$, ſeu ubi biquadrata applicatarum ſunt in triplicata ratione abſciſſarum. Hanc vero rectificationem, in quam alia quoque via particulari incidi, quoniam non poſtre-

tremam proprietatem conſtituit hujus ab omni antiquitate decantatiſſimæ curvæ, placet hic plenius exponere.

Eſto (*Fig.* 1.) AB Parabola communis, ex B agatur normalis BI ſecans axem AI in I; & IM normalis ad BI, occurrens diametro BM in M: reſecetur IK = ſubnormali ſeu ſemiparametro. Deſcripta jam Parabola cubico-biquadratica AG, cujus parameter ſit $= 3\frac{13}{81}$ parametri Parabolæ AB, ſumatur abſciſſa AH = tertiæ proportionali ad parametrum, ſeu ad duplam IK & ad BK, appliceturque HG. Dico curvam GAB compoſitam ex portionibus parabolicis AG, AB eſſe æqualem lineæ rectæ IM. TAB. XI. N°. L. *Fig.* 1.

Si hæc porro conferantur cum iis, quæ primus inveni pro ſectione arcuum parabolicorum in data ratione, quæque in *nupero Junio* * edita habentur, ubi ſimul innui ad arcum quemvis datum Parabolæ communis inveniri poſſe, ope methodi meæ, alium arcum in eadem Parabola, ita ut datam habeant differentiam rectificabilem: apparebit facile ratio comparandi quoque arcum Parabolæ cubico-biquadraticæ AG, cum arcu vel arcubus quibuſdam Parabolæ communis. Unde novum emerget inventum, meo judicio haud quaquam ſpernendum, quod facem accenderet inſignem ad menſurandam Parabolæ longitudinem per meras rectas lineas, ſi modo id poſſibile eſſet: perſpicio quippe arcum AG, cum aliquo arcu vel arcubus Parabolæ AB, poſſe habere rationem algebraïcam. Jam vero aliquis operæ pretium ageret, ſi oſtenderet arcum AG, non cum aliquo tantum, ſed cum ipſo arcu AB, comparabilem eſſe: haberet profecto rectificationem Curvæ parabolicæ & quadraturam Hyperbolæ dudum fruſtra quæſitam; dividenda enim tunc tantum adhuc foret recta IM in ratione inventa; diviſæque hinc una pars arcui AG, altera arcui AB æquaretur. Sed id ipſum quod quadraturæ Hyperbolæ impoſſibilitas pro demonſtrata fere habeatur, invictum eſt argumentum, arcus Parabolæ cubico-biquadraticæ cum quibuſdam arcubus,

 non

* N°. præced.

non cum omnibus Parabolæ comparabiles eſſe: inſolitum quidem hoc eſt, ſed tamen verum.

Quod ſi ulterius pergamus, & inquiramus, qualis exponens n debeat aſſumi, ita ut genitrix & genita fiant eædem curvæ, oportet æquari n cum $(2n - 1):(3n - 2)$ id quod dat $n = \frac{1}{3}$: adeoque eſt *Parabola cubicalis primaria*, quæ cum ſe ipſa comparata rectificari poteſt, ſeu in qua aſſignari poſſunt duo arcus quorum differentia eſt rectificabilis. Hic ergo incidimus, quaſi fortuito, in perelegantem hujus famoſiſſimæ curvæ alias irrectificabilis proprietatem; quod inventum alteri illi *Heuratiano*, ſeu, prout WALLISIUS contendit, *Neliano*, quo primum Parabola cubicalis ſecundaria rectificari cœpit, nobilitate non modo non cedit, ſed multis paraſangis præcellit, ſi id æſtimare velimus ex difficultate eruendi; vileſcit enim hoc, & deſiit eſſe novum, ex quo methodi infiniteſimales inclaruere, cum earum nulla ſit, quæ non, immediate & facillime, hujus Curvæ parabolicæ ſecundariæ rectificationem exhibeat, & vel primo mentis obtutu. Noſtra vero primaria, poſtquam omnes Geometrarum ejus dimenſionem quærentium ſudores & labores actenus eluſit, nobis in tantum obſecundavit, ut arcuum ſuorum differentia menſuram, rectis lineis algebraice determinabilem, a nobis acciperet. Nec video, qua alia via, quam hic præſcripta, ad hujus cognitionem perveniri potuiſſet. Egregiam adeoque habuiſſem occaſionem, ſi, ſuppreſſa methodo, aliis idem problematice proponendo, vanæ gloriolæ litare voluiſſem: ſed malui publicæ quam propriæ utilitati proſpicere, exponendo inventum ſine pompa. In vulgari Parabola conica eandem rem præſtiti, ut ſupra dixi: illud autem, cum ex nuda attentione ad Hyperbolam ultro fluat, præ hoc novo nihili facio. Sit itaque Parabola cubicalis primaria ABC, *(Fig. 2.)* in qua arcus expoſitus BC; a punctis B & C ducantur applicatæ BF, CG: ſumatur AI æqualis tertiæ proportionali ad vigecuplam ſeptuplam AF, & ad parametrum Parabolæ; fiatque ut AG ad AF, ita AI ad AH; ad puncta I & H ductæ applicatæ IE, HD reſecabunt arcum DE, qui ablatus ex

TAB. XI. N°. L. *Fig. 2.*

arcu

arcu BC relinquet differentiam rectilinearem, quæ ita invenitur: Duc tangentes CP, BK, occurrentes AP normali ad axem in punctis P, K: ex quibus age axi parallelas PN, KL, quæ ſecent normales ad curvam CN, BL, in N, L: erige perpendiculares NO, LM, tangentibus productis occurrentes in O, M. Dico differentiam rectarum OP, MK eſſe æqualem differentiæ arcuum parabolicorum CB, ED.

N°. LI.

ART. I.

JAC. B. * DEMONSTRATIO SYNTHETICA

Problematis de Infinitis Cycloidibus, abſque adminiculo infinite parvorum.

Item Conſtructio aliorum huic affinium a ſe propoſitorum menſe Maio A. 1697.

CUM ſub finem anni 1696. ſolutione mea Problematis de Curva celerrimi deſcenſus, quam omnibus nunc conſtat eſſe Cycloidem, *Lipſiam* paranda occuparer; animum ſubiit aliud, huic quidem quoad materiam affine, ſed quoad applicationem methodi de *Maximis & Minimis* plane diverſum, quo videlicet porro quæritur, quænam ex infinitis Cycloidibus illa ſit, per quam deſcendens grave ad datam quandam poſitione lineam citiſſime pertingat. Et quoniam ex conſideratione ſimilitudinis Cycloidum ſolutioni viam patere illico videbam; indeque animadvertebam modum operandi in omnibus aliis Curvis ſimilibus eundem exiſtere; imo non ad deſcenſum tantum celerrimum, ſed ad plurimas alias Curvarum functiones applicari poſſe; quemadmodum ſi quæratur ex infinitis Curvis ſimilibus illa, cujus inter commune principum & datam poſitione lineam interceptus, vel arcus, vel area, vel nata converſione arcus ſuperficies, aut ſpatii converſione ſolidum ſit minimum, &c. conſtitui Problema, non minus utile quam elegans, publice proponere; ut & alii ejus contemplationi vacare, mecumque in partem ſolutionis venire poſſent. Ad imitationem itaque Fra- *Acta Erudit. Lipſ. 1697. Maj. pag. 211.*

* *Jacobi* BERNOULLI.

tris, qui, in Programmate ſuo, * Problemati de Curva celerrimi deſcenſus alia minus principaliora adjunxerat, primario meo de Figuris Iſoperimetris Problemati, ipſi viciſſim proponendo, alterum hoc ſecundarium ſubjeci; ſed duobus tantum verbis, & in caſu duntaxat ſimpliciſſimo, lineæ rectæ verticalis, nec niſi Cycloidis, Circuli, Parabolæque facta mentione, ſtudioque etiam ſuppreſſa voce Curvarum *ſimilium*; tum quod perſuaſum haberem, qui in una quæſitum præſtiterit, in omnibus pariter illud præſtiturum eſſe, tum quoque ne fundamentum ſolutionis nimis aperte darem. Factum autem eſt, hoc non obſtante, ut, præter Fratrem, Illuſtriſſimus quoque Vir D. *Marchio* HOSPITALIUS adyta problematis optime penetraret, ſolutionemque non tantum hujus, ſed & aliorum, hujus occaſione, a Fratre *menſ. Auguſto* 1697. *Diarii Gallici* propoſitorum † nupero *Actorum Januario* exhiberet. Ego itaque, ne actum agam, nec tamen etiam nihil inventi mihi aſſeram, cum totum jure potuiſſem; illa tantum quæ ab Illuſtriſſimo Viro, Fratreque meo intacta relicta ſunt, delibare breviter; ac primo quidem Problematis a me in Cycloide propoſiti demonſtrationem ſyntheticam, citra adjumentum infinite parvorum, in gratiam eorum, qui horum calculum vel ignorant, vel improbant, exhibere animus eſt; quod faciam, ſuppoſitis tantum vulgo notis Lemmatibus: I. quod arcus circuli major ad ſinum ſuum, majorem habeat rationem, quam minor ad ſuum: II. quod tangens major ſit arcu ſuo.

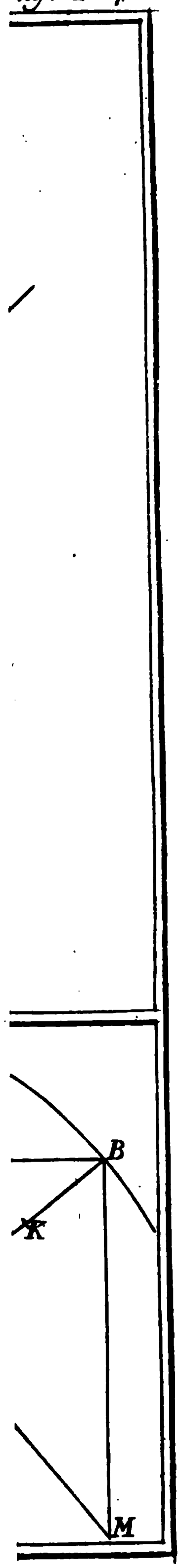
TAB.XII Fig. 1. PROP. *Si ſuper eadem baſe horizontaliter conſtituta* AR *duæ conſiſtant Cycloides* AFC, ABP, *quarum altera* AFC *datum perpendiculum* ZB *ad angulos rectos ſecat in* C; *ac demitantur ſuper illis duo gravia ex communi principio* A: *illud quod per* AFC *deſcendit, breviori tempore ad perpendiculum appellet.*

DEM: Sunto axes Cycloidum ZC, RP; ſemicirculi genitores ZLC, RTP, quorum ille radio GL in duos quadrantes ſit diviſus. Fiant AR, AZ, AH continue proportionales, ducanturque rectæ HF, FDS, CI, BE, illa perpendicularis, hæ parallelæ baſi; nec non ZDI, & huic parallela FM, ut ex Fig. liquet: erunt AR & AZ, AZ & AH, RP & ZC, RTE & ZLD partes Cycloidum ſimiles, adeoque proportionales. Quare.

1. *Hypoth. Si* $AR \triangleright AZ$. $LD : GS \triangleleft$ [*Lemm.* 1.] $LZ : GZ$: & *permutando* $LD : LZ \triangleleft GS : GZ$, *componendoque* $DLZ : LZ \triangleleft SZ : GZ$, ſumtis conſequentium duplis, $DLZ : CLZ \triangleleft SZ : CZ = SD : CI \triangleleft$ [*Lem.* 2.] $SD : CD$; *inverſe* & *permutatim* $CLZ : CD \triangleright DLZ : SD$, & tandem *per converſionem* $CLZ : DLZ \triangleleft DLZ : DLZ - SD$, hoc eſt, ex natura Cycloidis, $AZ : AM \triangleleft AM : AH$; unde $\surd AZ : \surd AH$ [$= \surd RP : \surd CZ$] $\triangleleft AM$ [DLZ]: AH

* Supra N°. XXXIII. † Supra N°. XXXIX.

ag. 254.



AH = ETR : AZ = ETR : CLZ. Ergo ETR : $\sqrt{}$RP > CLZ : $\sqrt{}$CZ. Sunt autem hæ quantitates, ut tempora deſcenſuum per AB & per AC, demonſtrante HUGENIO in *Tractatu de pendulis*, & nuper id quoque aſſumente Illuſtriſſimo HOSPITALIO. Tempus igitur per AB majus eſt tempore per AC. *Q. E. D.*

2. *Hyp. Si AR < AZ.* ZM = FD = CD > DS = HM; cum igitur hoc caſu fiat AH > AZ, erit AM major media arithmetica, eoque fortius media geometrica inter AZ & AH; unde ſtatim in ipſis terminis habetur AZ : AM < AM : AH; e quo cætera deducuntur, ut prius.

Cæterum generaliter obſervabam, in omnibus ejuſmodi quæſtionibus, ubi ex infinitis Curvis ſimilibus aliqua invenienda eſt, quæ functionem quampiam optime præſtet, quod duarum Curvarum, quarum interſectione quæſitum determinatur, altera ſemper poſſit eſſe *Linea*, quam voco, *Functionis*, adeoque nunc mechanica, nunc algebraïca, dum altera perpetuo eſt algebraïca: quod hujus vices ipſa ſemper Recta præſtare poſſit; quo caſu altera, ut ut plerumque a *Linea functionis* diverſa, ab ejus tamen deſcriptione dependet: quod ambæ denique datæ cuidam è Curvis ſimilibus ſic adaptari queant, ut earum ordinatæ, vel inter ſe ſint parallelæ, vel hujus fiant tangentes, aut perpendiculares, aut alio aliquo modo illi applicentur. Exempla ſunto.

I. *Ex infinitis Circulis per A tranſeuntibus, & centra habentibus in horizontali AB, illum invenire, per quem deſcenſus ſit celerrimus ex puncto A ad datum perpendiculum.* TAB. XII. *Fig. 2.*

CONSTR. Datus ſit ſemicirculus AQB diviſus in duos quadrantes ANC, BNC, in cujus circumferentia ſumto indefinite puncto Q, agantur rectæ QP, QB, quarum illa parallela eſt radio NC, hæc ipſum ſecat in T: & fiat Linea Functionis ASX, nempe talis, ut hujus ordinata PS tempus deſcenſus per AQ repræſentet, hoc modo: Super diametro Circuli AB erigatur quadrans curvæ Lemniſcatæ ARB (Vid. *Acta Lipſ.* 1694, p. 337, & 1695, p. 543. †) cujus nodus A, e quo ſubtendatur curvæ recta AR media proportionalis inter AB & 2PQ, ac ſumatur PS = arcui AR pro ſiniſtro, aut ARB + BR pro dextro Circuli quadrante. Quo facto, fiat Curva algebraïca AVX, cujus applicata PV quarta ſit proportionalis ad rectas AR, AB, & 2NT; hæc priorem interſecabit in puncto aliquo X, unde demiſſa in AB perpendiculari XM, erit ut AM ad AB, ſic diſtantia perpendiculi a puncto unde grave dimittitur, ad diametrum circuli quæſiti.

II. *Poſitis, quæ prius, invenire Circulum, cujus inter punctum A & datum perpendiculum interceptus arcus ſit minimus.* TAB. XII. *Fig. 2.*

CONSTR. Fiat Linea Functionis, nempe Linea Sinuum ASX, ſumta

† Hæc eſt Curva AMONA, N°. XIX.

ſumta ubique P S = arcui A Q: tum deſcribatur Curva algebraïca A V X, facta P V = N T, & ex puncto interſectionis X demittatur perpendicularis X M, eritque ut ſupra, A M ad A B, ſicut diſtantia perpendiculi a puncto A ad diametrum Circuli quæſiti. Nota tamen, Problema ſimplicius quodam modo conſtrui interſectione ſolius Lineæ functionis, ſi hujus ordinatæ in tangentes datæ Curvæ projiciantur. Vid. generalem Conſtruct. infra in *Solutione ſex Problematum fraternorum.*

TAB. XII. *Fig.* 3. III. *Ex infinitis Curvis ſimilibus, & circa punctum A axemque communem A C ſimiliter conſtitutis, quarum una data ſit A B; invenire aliam A D occurrentem recta poſitione data D E in D, e quo demiſſa in axem perpendiculari D M, vel comprehenſum ſpatium A D M, vel nata converſione curva circa axem ſuperficies, vel natum converſione ſpatii ſolidum ſit maximum minimumve.*

CONSTR. Sumto indefinite in Curva data A B puncto B, ducatur tangens B G, axi perpendicularis B C, & hinc tangenti perpendiculari C L. Quo facto, functio primæ quæſtionis, h. e. ſpatium A B C divis datur per $\frac{1}{2}$ C L; functio ſecundæ, ſive ſuperficies Sphæroidis geniti converſione curvæ A B, per ſemicircumferentiam radii B C; functio tertiæ, ſeu ſolidum ſpatii A B C rotatione effectum, per rectangulum ſub dicta ſemicircumferentia & triente C L: quotienti ſemper abſcindatur ex tangente æqualis B G, erit G ad Curvam quandam A G H, quam ſecerecta A G datæ rectæ D E parallela in G. Ex G ducatur G B tangens datam Curvam, ſitque punctum contactus B; tum juncta A B, quæ dat tam D E ſecet in D, fiat curva A D ſimilis ipſi A B. Hæc erit optata.

ART. II.

Solutio ſex Problematum Fraternorum, *in* Ephem. Gall. 26 Aug. 1697. * *propoſitorum.*

Ibid. pag. 226. PROBL. I. *In ſuperficie dati Conoidis, vel Sphæroidis, ex. gr. Parabolici, inter duo data puncta geometrice deſcribere Lineam omnium in illa ſuperficie ſic ductarum breviſſimam.*

SOL. Notanda primum ambiguitas in voce *geometrice*, quæ procul dubio in cauſa fuit, cur Illuſtriſſ. D. *Marchio* HOSPITALIUS in ſolutionibus ſuis *menſe Jan. Actorum* exhibitis hoc Problema prorſus neglexerit. Si hac voce talis conſtructio poſcatur, qua indefinite omnia punc-

* Supra N°. XXXIX.

puncta curvæ inveniantur, per meras quantitates ordinarias, ſeu algebraïcas, dico, Problema in ipſo Cono Cylindroque non minus difficile, imo impoſſibile, atque in cæteris Conoidibus, Sphæroidibuſque. Sin vero & illa conſtructio *geometrica* eſſe concedatur, in qua quantitates quoque tranſcendentes, ſeu quadraturæ, quæ ipſo Cel. D. Leibnitio adſtipulante, non minori jure *geometricarum* quantitatum nomine veniunt, adhibentur; Problema, in omnibus pariter Conoidibus ac Sphæroidibus, æque ac in Cono Cylindrove, eſt facillimum. Eſto enim Curva quæcunque ABC, cujus tantum tangens dari concedatur; ſitque baſis ejus CD $= a$, applicata quædam arbitraria baſi parallela BG $=$ c, alia indeterminata MN $= x$, tangens ME, data per x, $= t$; rotetur autem curva ABC circa axem AD, & gignat Conoides ABCFDA, cujus polus A, meridianus ABC, æquator CF, eique parallelus per M tranſiens MH. Tum ſumto æquatoris arcu CF $= \int (act\,dx : xx\sqrt{(xx - cc)})$, tranſeat per F meridianus AHF, ſecabit hic parallelum MH in puncto aliquo H curvæ cujuſdam BH, quæ talis eſt, ut quælibet ejus portio omnium aliarum, in eadem ſuperficie ductarum, & iiſdem punctis interceptarum, Curvarum ſit breviſſima; ipſa autem longitudo curvæ BH $= \int (t\,dx : \sqrt{(xx - cc)})$. Tab. XII. Fig. 4.

Applicatio Conſtructionis ad Conum. Sit Conus ACFD factus converſione trianguli rectanguli ACD circa cathetum AD; ponatur hoc triangulum ſeorſim ſuper recta infinita GD, centroque C, radio CA, deſcribatur quadrans circuli KIG, & radio minori CD, circulus PRQ; tum ſumto in latere coni AC puncto utcunque B, transferatur AB in CS, & ducatur SL parallela ipſi CK, ſecans rectam KL ipſi CD parallelam in L, ac denique per punctum L intra aſymptotos CD, CK trajiciatur Hyperbola LO: quo facto, per punctum quodvis O, in Hyperbola acceptum, duæ ducantur rectæ aſymptotis parallelæ OI, OT, quarum illa quadrantem KIG ſecet in I, hæc latus coni AC in T; arcuique quadrantis KI ex circumferentia minoris circuli PRQ, id eſt, baſis coni CF, reſecetur hinc inde æqualis arcus PR, ſeu CF, qui non nunquam totam circumferentiam excedit; ac tandem in latere coni per F tranſeunte, ſumatur AH $=$ CT; eritque H punctum optatæ curvæ BH; ipſa vero BH $= \sqrt{(CT^2 - CS^2)}$, adeoque nequit eſſe (quod quis ſuſpicari poſſet) aliqua Sectionum Conicarum, cum harum nulla rectificationem admittat: tota vero curva conum ſerpentis in modum ambit, duoque coni latera, a ſupremo curvæ puncto B utrimque æquidiſtantia, ſibi aſymptota habet; ſubinde & unum tantum, cum curva coni ſuperficiem aliquoties exacte circumit; circumit autem ſemel, ubi latus coni AC radii baſis DC duplum eſt, bis ubi quadruplum, ter ubi ſextuplum, &c. Effici præterea poteſt facile, ut curva per duo quævis data puncta tranſeat, prout ſupremum ejus punctum B in alio Tab. XII. Fig. 5. 6.

alìove latere coni, propiusque vel remotius ab ejus vertice aſſumitur.

Schol. Quia Conſtructio hæc requirit, ut ex circulis utcunque inæqualibus KG, PQ, æquales abſcindantur arcus KI, PR, quod ſupponit anguli ſectionem in data ratione; hæc vero generaliter non niſi per quantitates tranſcendentes abſolvitur; conſtat, quod dixi, curvam *geometrice*, id eſt, algebraïce non eſſe deſcriptibilem. In ſuperficie Cylindrica, puncta curvæ reperiri poſſunt continua arcus biſectione; ſed inventio omnium indefinite punctorum pariter ſectionem arcus in data ratione, vel ejus rectificationem ſupponit.

Atque hæc de primo Problemate dicta ſufficiant: Cætera ſupra laudatus Vir Illuſtriſſ. D. *Marchio* Hospitalius, nupero *Januario*, plene & eleganter ſoluta dedit. Sed quia obſervo, paulo generaliora a Fratre proponi potuiſſe, ea ſequentem in modum formo ac ſolvo:

Tab. XII. Fig. 7. Probl. II. & III. *Axi ET inſiſtant infinitæ curvæ BL, BF, genere eædem, hoc eſt, quarum ordinatæ ML, MF, conſtanter ſint proportionales; ſitque alia curva CL ex prioribus ſpatia auferens BLM, BCD, tum inter ſe, tum dato ſpatio æqualia. Quæritur, quæ ſit natura Curvæ CL, quæ ratio ducendi ejus tangentes, & quodnam in illa punctum, alteri ubivis dato puncto proximum?*

Sol. Eſto data ex infinitis una BL, datumque in Curva CL ubivis punctum C, e quo demiſſa in axem applicata CD, quæ ſecet datam Curvam in G, ducatur tangens GE; ſuper DE conſtituatur Rectang. EH = ſpatio dato BCD, fiatque CH : HD = DE : DT; juncta CT curvam CL tanget in C.

Nota ratione ducendi tangentes, natura curvæ latere nequit; eſtque ſemper, quod hic ſpecialiter annoto, reducibilis ad caſum Problematis *Beauniani* generalius concepti menſ. Dec. 1695, * adeoque, conſtruibilis per Logarithmicam, vid. menſ. Jul. 1696. † Punctum curvæ CL proximum ipſi B quodnam ſit, generaliter oſtendit Vir perilluſtris, poteſtque nullo negotio ad aliud quodvis datum punctum accommodari.

Probl. IV & V. *In eadem Figura ſunto BC, BL, infinitæ curvæ ſimiles, ſeu ſpecie eædem, e quibus curva CL auferat arcus æquales BC, BL; quæritur natura curvæ CL, ejus tangens in puncto C, & punctum curvæ dato cuipiam puncto proximum.*

Sol. Exemplum proponit Frater in Parabolis. Huic ſæpe laudatus D. Marchio ita ſatisfacit, ut ducta per C Parabola BC, ejuſque tangente CE, faciat CE — BC : BC = BD : BT. Addo, ſi in hac proportione duntaxat BD vertatur in BE, conſtructio generaliter ad omnes curvas ſimiles ſe extendet; unde & componendo ſemper erit CE : BC

* *Act. Erudit. Lipſ.* pag. 542.
† pag. 332.

BC = ET : BT. Quemadmodum etiam ſi curva CL talis eſſe ponatur, ut ex curvis ſimilibus areas abſcindat æquales BCD, BLM, reperitur triangulum CDE : BCD = ET : BT, quæ Theoremata obſervari merentur. De natura curvæ CL, punctoque in illa alteri cuidam proximo eadem tenenda, quæ in §. præced.

PROBL. VI. *Sint infinitæ Curvæ ſimiles BH, DL, circa idem punctum A ſimiliter conſtitutæ, quas trajiciant duæ rectæ poſitione datæ AH, ED, quarum altera AH tranſeat per A: quæritur arcuum ambabus rectis interceptorum maximus minimusve.* TAB. XII. Fig. 8.

SOL. Data ſit una Curvarum ſimilium BH ſecans rectam poſitione datam AH in H, alterique poſitione datæ ED ducatur per A parallela AG. Evolvatur curva HB, principio evolutionis facto in H, & gignat curvam HG, quæ rectam AG ſecet in G; filum autem evolvens, dum deſcribit G punctum, ſit GB, tangens curvam in B. Jungatur AB ſecans rectam ED in D, ac per D tranſeat portio curvæ DL ſimilis portioni BH: erit arcus DL omnium rectis AH, ED interceptorum maximus minimusve.

COROLL. Patet hinc inſignis Evolutionum uſus, nondum quod ſcio conſideratus, nempe: Si ſit Curva quævis HB, ejus evolutione deſcripta HG, filum evolvens BG, atque ex punctis H & G inflectantur rectæ HA, GA, concurrentes in quolibet puncto A, & poſteriori per B agatur parallela recta infinita BF, erit evoluta BH omnium circa idem punctum A ſimiliter deſcriptarum, ac rectis AH, BF interceptarum Curvarum maxima minimave. Quin & amplius, ſi accipiatur in Curva HG quodvis aliud punctum C, quod filum evolvens IC dum deſcribit, tangit Curvam BH in I; atque ex I recta agatur IM ductæ CA parallela, erit arcus BI omnium rectis IM, BF interceptorum maximus minimusve.

ART. III.

Solutio Problematis Fraterni in Actis menſ. Mai. 1697. p. 211. * *propoſiti de Curva infinitas Logarithmicas ad angulos rectos ſecante.*

PRoblema de Curva invenienda, quæ infinitas Lineas ordinatim poſitione datas tangit, jam *menſe Octobri* 1694 † ſolutum dedimus. *Ibid.* p. 231.

 Quæ-

* Supra N°. XXXVII. pag. 193.
† *Acta Erudit.* pag. 391 †.

Quæſtio hic eſt de tali, quæ datas omnes ad angulos rectos ſecet. Dependet autem Problema a methodo tangentium inverſa, ut nullam generalem ſolutionem admittat, eſtque pro varia datarum poſitione miræ diverſitatis; neque gradus, vel ſpecies Curvarum, eſt character facilitatis vel difficultatis Problematis; cum non nunquam in algebraïcis res difficulter, in tranſcendentibus contra facile ſuccedat.

Exempla promiſcue algebraïcarum & tranſcendentium Curvarum, in quibus ſolutio facilis:

I. *Si eidem axi inſiſtant infinitæ Parabolæ æqualium parametrorum, ſed diverſorum verticum, ſive* (quod eodem recidit) *ſi ex infinitis una ſuper plano ſuo ita protrudatur, ut ſingula ejus puncta rectas deſcribant axi parallelas*, erit Curva, quæ infinitas illas Parabolas, ſeu unicam ita motam, perpetuo ad angulos rectos ſecat, Logarithmica, cujus ſubtangens æquatur ſemiparametro Parabolæ. Et viciſſim, ſi Logarithmica dicta ratione ſuper axe promoveatur, Curva quam continuo ad rectos ſecat angulos, eſt Parabola. Ita ſi Parabola cubica ſuper axe propellatur, quam ad rectos ſecat, eſt Hyperbola; ſi altiores Parabolæ, ab altioribus gradatim Hyperbolis normaliter ſecantur, & viciſſim, &c.

II. *Si infinitæ æqualium parametrorum Parabolæ axibus parallelis inſiſtant, & vertices habeant in linea his axibus perpendiculari; ſive, ſi Parabola ita feratur, ut ſingula ejus puncta rectas deſcribant axi perpendiculares*; Curva, quam infinitæ vel unica ſic mota normaliter interſecat, Parabola eſt cubicalis ſecundi generis, cujus latus rectum ad Parabolæ parametrum eſt, ut 9 ad 16. Si alia Paraboloidea ita ferantur, aliis itidem Paraboloideis normaliter ſecantur, & vice verſa, &c.

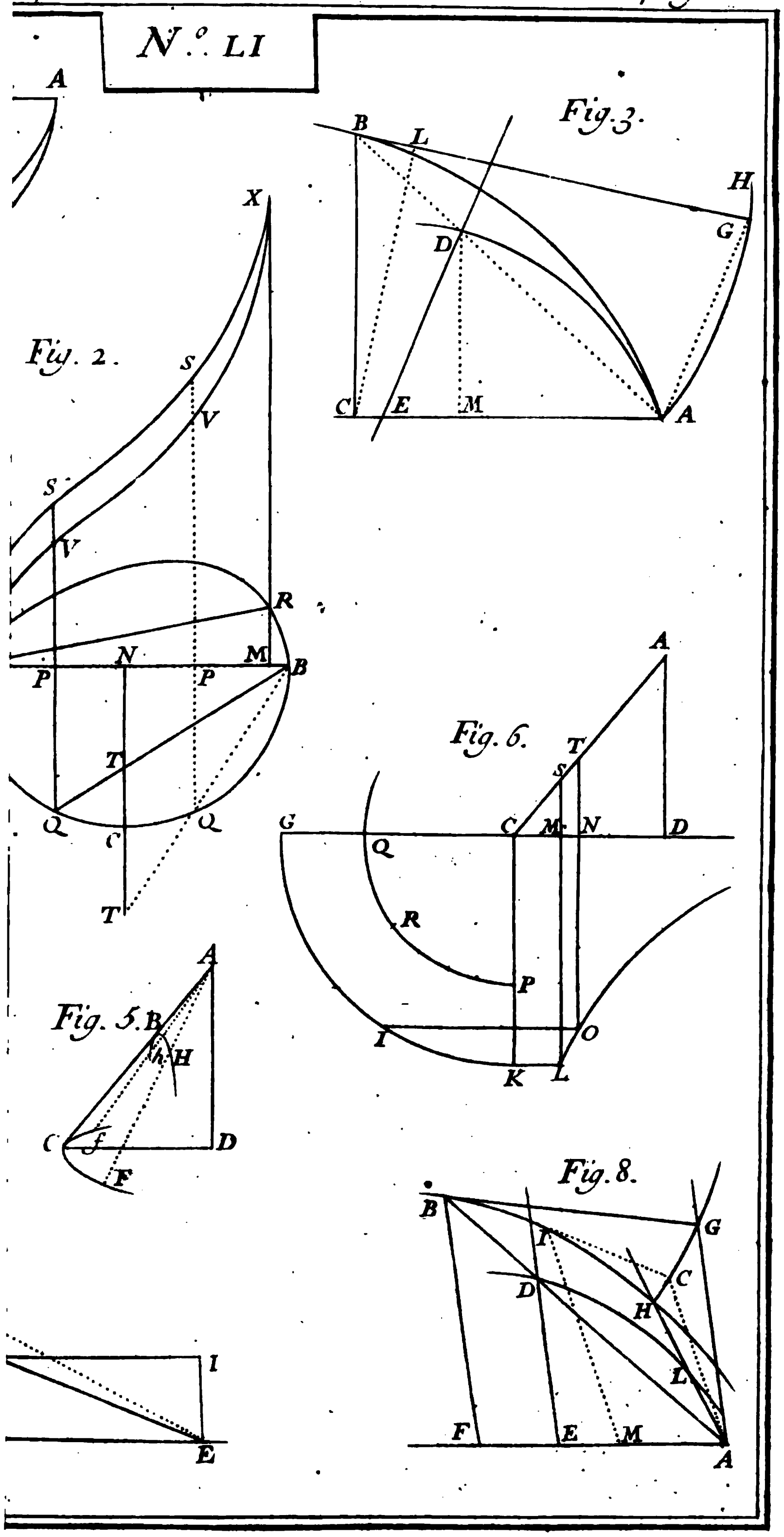
III. *Si infinita Paraboloidea ejuſdem gradus* [*cujus index ſit m*] *ſed diverſorum laterum rectorum, circa eundem axem & verticem conſiſtant*, Curva, quæ has omnes normaliter trajicit, conſtanter eſt Ellipſis, cujus centrum in communi vertice, latus tranſverſum in axe, ejuſque ratio ad latus rectum ut 1 ad *m*.

IV. *Si infinitæ æqualium ſubtangentium Logarithmicæ ſuper totidem axibus parallelis conſiſtant, tranſeantque per commune punctum B; quæritur Curva eas omnes normaliter interſecans.*

TAB. XIII. N°. LI. *Fig.* 9.

Contr. Eſto una earum data F B f, cum ſuo axe A G, inque hunc demiſſa perpendiculari B A; ſumtoque quolibet in Logarithmica puncto F, agantur ad axem perpendicularis F G, tangens F L, & huic parallela B M, ac inſuper ad partes Logarithmicæ ab axe remotiores ſtatuatur in axe recta A N, arbitrariæ longitudinis, major tamen ſubtangente G L: quo facto ſumatur inter duplam ſubtangentem & exceſſum, quo N G ſuperat A M, media proportionalis, eique in recta B A æqualis abſcindatur B I, ſurſum, deorſumve, prout punctum F ſupra, infrave

B,


N.° LI
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 8.

B, aſſumtum fuerit; ac denique ex I ducatur IH parallela axi, ſecanſque applicatam GF in H; erit H punctum in optata Curva CHD; cui ſimiles & æquales, in cæteris rectarum BA, BC, ſeſe decuſſantium angulis, conſtitui poſſunt.

Nota. Maxima Curvæ altitudo $BD = \sqrt{(2\,GL \times (AN - GL))}$. Si $GM = AN$, cadit IH in BC, fitque maxima Curvæ latitudo.

V. *Quæritur denique Linea* (quod eſt exemplum ſpeciale Fratris) *quæ omnes Logarithmicas ſuper eodem axe & per idem punctum ductas ad angulos rectos ſecat.*

Constructio talis: Eſto axis communis Am, punctum interſectionis Logarithmicarum B, earum una data FBf; demiſſa in axem perpendiculari BA, per punctum F, utcunque acceptum in Logarithmica, agantur rectæ FT, FN, ſecantes rectam BA in T & N, quarumque illa axi parallela ſit, hæc tangat Logarithmicam; [prætereaque ſupra T, ſi quidem punctum N inferius ſit ipſo T, abſcindatur TN = inferiori TN]; quo facto, diametro AN, nempe AT + TN, deſcribatur ſemicirculus APN, cui occurrat recta FT in P; ſumtaque arbitraria quadam conſtante L, abſcindatur in BA ex puncto T recta $TR = \sqrt{(\frac{1}{2}TA^2 \pm L^2)}$ & jungatur RP, [vel ſi punctum T ſuperius ſit ipſo B, deſcripto ſuper TR ſemicirculo, applicetur illi prius LP, ac tum demum jungatur RP;] junctæ in recta FT æquales hinc inde abſcindantur TS, TS; eruntque puncta S, S, ad Curvam quandam m CMC m, quæ omnes Logarithmicas, circa punctum B conſtitutas, ad angulos rectos ſecabit, ut requirebatur. TAB. XIII. No. LI. *Fig.* 10.

Nota, ſumta $TR = \sqrt{(\frac{1}{2}TA^2 + L^2)}$, occurret Curva axi in puncto m, ut ſit $Am = L$; ſed ſumta $TR = \sqrt{(\frac{1}{2}TA^2 - L^2)}$, tranſibit inter puncta A & B, nec ad axem pertinget.

Maxima Curvæ latitudo $BC = \sqrt{(\frac{1}{2}BA^2 \pm L^2)}$.

Atque horum omnium ſolutio facilis admodum fuit: dari autem poſſunt aliæ Curvarum poſitiones, quæ Problema magis arduum reddunt, & vel in ſimplici Parabola ad caſus methodi tangentium inverſæ nondum exploratos deducunt; veluti, *ſi quæratur Curva, quæ omnes Parabolas ſuper eodem axe extructas, lateraque ſua recta reſpectivis verticum à puncto fixo diſtantiis æqualia habentes, ad rectos angulos trajicit. &c.* Cui addi poteſt & hoc: *Quæritur Curva, quæ Parabolam aut aliam datam Curvam ſuper plano ſuo circa datum punctum in orbem converſam in angulo dato ſecat;* quemadmodum conſtat, rectam ita converſam circa extremitatem ſuam in angulo recto ſecari a Circulo, in obliquo a Logarithmica ſpirali.

N°. LII.

JOHANNIS BERNOULLI

Annotata in Solutiones Fraternas Problematum quorumdam ſuorum, editas proximo Actorum Maio.

Acta Erudit. Lipſ. 1698. Octob. *pag.* 466.

SI Problemata ſubinde Eruditis propono, ſcopus mihi non eſt aliorum capacitatem tentandi; ſed unice, ut ingenia excitentur, novumque capiant incrementum ſcientiæ: unde & ego delectamentum habeo, quando præſertim ſolutiones in lucem prodeuntes cum meis conſpirare deprehendo. Eorum quæ partim in *hiſce Actis*, partim quoque in *Ephemeridibus Pariſ.* quondam propoſui, nunc demum nonnulla, a Fratre ſoluta, *Actorum menſis Maius* exhibet. Gaudium, fateor, non leve mihi attulit conſenſus, quem animadvertere potui ſolutiones Fraternas inter meaſque; & perfectum fuiſſet omnino, ſi modo in generalitate quoque meis reſpondiſſent. Non igitur abs re puto, ſi hic, paucis, & omni qua poſſum modeſtia, recenſuero quid ad perfectionem omnimodam Solutionum *Fraternarum* deſiderem.

Et quidem pag. 227 * Demonſtrationem Syntheticam affert Problematis de infinitis Cycloidibus; ſed pro ſimpliciſſimo duntaxat caſu, quando ſcil. recta poſitione data verticalis eſt. Optaſſem interim generalem, pro omni recta poſitione data, imo etiam pro curva, exhibuiſſet meæ ſimilem; qua non modo a puncto ad punctum iter breviſſimum Cycloidem eſſe, ſed & ſimul a puncto ad lineam non tantum verticalem, non tantum rectam, ſed utcunque curvam, deſcenſum breviſſimum, vel interdum longiſſimum, peragi per Cycloidem lineæ datæ perpendicularem, breviter, perſpicue, directe, & Synthetice demonſtro; quam omnes, quotquot ſunt, quibus communicavi, ſummopere laudarunt & approbarunt; & nuper tantum Ampliſſimus

* Supra pag. 254, 255.

mus & Generoſiſſimus Dn. DIERQUENS Præſes in ſupremo Curia Babantina quæ *Hagæ* eſt, Vir acerrimi judicii & in his ſtudiis verſatiſſimus, una cum Filio Nobiliſſimo, Mathematicis pariter ingenioſo; quemadmodum ex ipſorum litteris ad me non ſine delectamento intellexi. Hæc vero mea Demonſtratio ſynthetica, quæ non in *Galilæana* tantum, ſed in omni alia hypotheſi, ſuccedit, jam initio ſtatim lucem publicam aſpexiſſet, niſi ſuaſu celeberrimi LEIBNITII eam etiamnum ſuppreſſam tenerem, ut jam alibi memini me monuiſſe: eo enim tempore, quo incidi in Problema de celerrimo deſcenſu, jam adinveni hanc demonſtrationem.

Cæterum, ſi verum eſt *Fratrem* celerrimum deſcenſum ad rectam poſitione datam, non ſolum in Cycloidibus, ſed & in omnibus curvis ſimilibus, determinare poſſe, vel potius tum temporis potuiſſe, cum hoc Problema proponeret; ſcire valde geſtio, quid illa verba ſibi velint, in quæ erumpit: *Qui methodum de maximis & minimis promovere volet, tentabit. Nobis ſufficiet propoſuiſſe.* De Circulis & Parabolis loquens, quæ utique etiam ſunt curvæ ſimiles, qui dicit ſibi ſufficere propoſuiſſe, tantumdem eſt ac diceret ſe non ſolviſſe; imo difficultate quaſi deterritum ne tentaſſe quidem. Quicquid ſit, longe majus quid præſtitiſſet, ſi ſolviſſet quoque in curvis diſſimilibus: tentet, & videbit immenſam difficultatem, & vel in ſolis Ellipſibus ſuper eodem axe extructis, quod jam *Non nemini* propoſui. Meus ſolvendi modus eo pertingit. Nec minus rem ſpinis obſitam ſentiet, ſi reliqua duo exempla, quæ ſine demonſtratione ſubnectit, a Circulis & Curvis ſimilibus ad quaſvis diſſimiles tranſferre voluerit.

Tranſeo jam ad ſolutiones Problematum meorum in *Ephemer. Gall. menſ. Aug.* 1697. * propoſitorum. Quod primum concernit, conqueritur ſtatim *Frater* de ambiguitate in voce *geometrice*: cum tamen jam nemo neſciat, non mihi ſoli dudum, ſed etiam acutiſſimo LEIBNITIO, imo & ipſi *Fratri* geometricum

* N°. XXXIX.

cum eſſe quicquid geometrica lege peragitur, ſeu quicquid per æquationem, ſive algebraïcam, ſive tranſcendentem, determinari poteſt. Non nego, potuiſſem plane omittere hoc vocabulum, quippe quod per ſe ſubintelligitur; id tamen conſulto adjeci, ut ſimul excluderem conſtructionem quandam ſimpliciſſimam, generaliſſimam, & facillimam, quam prævideram dari poſſe, ſed quæ mechanica eſt: *extendendo ſcilicet filum per ſuperficiem convexam ab uno dato puncto ad alterum, illudque firmiter aſtringendo: capiet enim hoc pacto ſitum breviſſimum inter utrumque punctum.* Volebam itaque evitare ambiguitatem, excludendo ſtatim quod mechanicum eſt: tantum abeſt ut illam affectaverim. Videat hinc *Frater*, annon Illuſtriſſimo *Marchioni* HOSPITALIO rem forte gratiorem feciſſet, abſtinendo verbis blandiuſculis (quibus Viri generoſi parum delectantur,) quaſi ille hoc Problema ob dictam ambiguitatem neglexerit. Ipſe haud dicet ſe neglexiſſe; imo maxime ſe ei applicuit, ut ex ipſis ejus litteris ad me datis habeo: ſed de nulla tali ambiguitate conqueſtus eſt, quia optime genuinum ſenſum Problematis intellexit; quandoquidem ſe Problema de ſuperficie curva in ſuperficiem planam reduxiſſe mihi ſignificavit. Quod vero ei res non omnino ex voto ceſſerit, indicium eſt majorem in hoc negotio difficultatem præſenſiſſe, quam ut una generali æquatione (ut *Frater* ſe feciſſe putat,) Problema in omni ſua extenſione complecti liceat. Quid interim? ſi retorquerem & dicerem, Illuſtriſſimum Virum, qui pariter unius tantum Problematum *Fraternorum* ſolutionem de celerrimo deſcenſu ad lineam verticalem exhibuit, alterum de Iſoperimetris, ob ambiguitatem & obſcuritatem Propoſitionis, (ut fere neſciam an unum, an plura contineat Problemata) noluiſſe attingere.

Ut redeam ad Solutionem *Fraternam* lineæ ducendæ breviſſimæ in ſuperficie conoidea, eam legitimam agnoſco; & gaudeo *Fratrem*, hac in parte, mecum concurriſſe. Sed patiatur ut dicam ex infinitis caſibus vix unum eſſe quem ſolverit, eumque facillimum; adeo ut immane quantum adhuc pro generali ſolutione deſideretur. Fundamentum, quo forte *Frater* uſus

uſus eſt, in eo conſiſtit, quod differentia duorum angulorum, quos facit linea quæſita cum duobus quibuſvis meridianis proximis in ſuperficie conoidis, vel ſphæroidis ductis, debeat eſſe æqualis angulo, quem comprehendunt duæ in ipſis punctis interſectionum tangentes meridianos, & in axe conoidis vel ſphæroidis concurrentes. Sed quam parum hoc eſt! Valet enim, vix ac ne vix quidem, in conoidibus & ſphæroidibus, & quidem baſium circularium: ſed neque in his omnibus; oportet inſuper axem rectum eſſe ad baſin: at vero quot ſunt conoides, quot ſphæroides, quarum axis eſt obliquus? quot ſunt iterum, quarum baſes non ſunt circulares? Vellem itaque ut reſtringeret verba ſua, quando dicit, *Problema in omnibus pariter conoidibus & ſphæroidibus, æque ac in cono cylindrove eſſe facillimum,* ad illas tantum quæ ſunt rectæ & circulares. Præterea ſi conſideremus multitudinem & varietatem infinitam ſuperficierum curvarum, quæ plane non ſunt conoides nec ſphæroides; fateri oportet, rem eſſe exigui momenti, quod in conoidibus & ſphæroidibus præſtitum, præ eo quod a *Fratre* præſtandum ſupereſt. Heic igitur me feciſſe aliquid puto, quod repererim viam generalem perveniendi ad æquationem pro quavis ſuperficie curva data, ſit conoidica, ſit non conoidica; quam *Fratri* indagandam relinquo, ut tempus habeat ſuam perficiendi, & Problemati ex aſſe ſatisfaciendi.

In cono quovis obliquo, pro quo, & quidem tantum recto, prolixiſſimam conſtructionem exhibet, & tamen non docet quomodo linea inventa per data duo puncta ducenda ſit; pauciſſimis verbis, ſine ſchemate, ita rem expedio: Ductis a duobus punctis datis ad verticem coni duabus rectis; fiant in plano duæ aliæ rectæ ipſis æquales, & angulum comprehendentes æqualem angulo ſuperficiei conicæ contento duabus iſtis rectis in cono ductis: conjungantur recta extremitates duarum rectarum in plano, quam ſecet alia recta utcunque ex angulo plani ducta; diſtantiam interſectionis transfer a vertice coni in ſuperficiem conicam, ita ut cum prioribus rectis faciat in ſuperficie conica angulos æquales angulis quos facit cum lineis

in plano ductis: Dico punctum illud, in quod diſtantia cadit in ſuperficie conica, fore in linea breviſſima, quæ interjacet inter duo puncta data. Suppono hic angulos ſuperficiei conicæ circa verticem comparabiles eſſe, vel æquales aſſumi poſſe angulis planis: quod quomodo faciendum, jam BARROWIUS docuit.

Non eſt quod diu immorer cæteris Problematum ſolutionibus: meas, jam ante annum, *Illuſtriſſimo* HOSPITALIO communicavi; quæ quodammodo ſimpliciores ſunt. Sed hoc monitum duntaxat cupio, quod tunc ſtatim etiam in litteris ad Dn. *Marchionem* innui, me, per curvas ejuſdem ſpeciei, non intellexiſſe curvas ſimiles tantum, ſed curvas quaſcunque certa lege deſcriptas, ſeu ut termino *Leibnitiano* utar, *ordinatim poſitione datas:* alias, ſi mens mea de ſimilibus tantum fuiſſet, id diſerte dixiſſem, quemadmodum, non diu poſt, feci in iiſdem *Ephem. menſ. Decembr.* ubi pag. 463, * ſeqq. illas expreſſe voco curvas *ſimiles & ſimiliter poſitas.* Quod autem in exemplum dederim Parabolas, quæ utique ſunt curvæ ſimiles; id ipſum oſtendit quod tunc de ſimilitudine curvarum ne ſomniaverim quidem; alias certe, non Parabolas ſed alias curvas diſſimiles, exempli loco propoſuiſſem: noſtra enim methodus ad omnes ſe extendit, quacunque lege datas. Aſt tantum diſcrimen comperiet *Frater* inter ſimiles & diſſimiles curvas, ut ſi Problema denuo tentare lubeat, non dubitem, quin ſit agniturus ſe, poſtquam hoc Problema pro ſpeciali iſto caſu ſolvit, ne unguem latum promoviſſe generaliter conceptum pro quibuſvis ordinatim poſitione datis; quod quam abſtruſæ ſit indaginis patebit ipſi, ſi in Probl. IV & V loco Parabolarum ſubſtituere velit eaſdem illas Ellipſes, quæ in præcedentibus duobus, exempli loco inſervierunt. Dico exempli loco; ſolvitur enim pariter per noſtram methodum in omnibus aliis curvis.

Superſunt notanda quædam circa lineas, quas vocabo Trajectorias, quæ alias ordinatim datas normaliter, vel in angulo quovis dato, ſeu etiam data lege variante, trajiciunt. Diu adeo

* Supra N°. XL. pag. 212.

adeo eſt, quod hanc materiam ſepoſuerim; quam, ni fallor, primus in lucem protraxi, ut difficulter in mentem revocem. Cum vero aliquot exempla proferat *Frater* curvarum algebraicarum, quæ, jam quatuor abhinc annis, Celeberrimo LEIBNITIO in privatis ad ipſum litteris ſoluta dedi: placet hic excerpere quæ tum ſcripſeram in Litteris d. 2. Septembr. 1694.
„ Aliud jam pridem etiam mihi conſideratum Problema non „ minus elegans quam utile, ob affinitatem quam cum hiſce „ (*curvis alias poſitione datas tangentibus*) habet, proponam: „ Datis nempe infinitis curvis poſitione, invenire curvam quæ „ omnes ad angulos rectos ſecat, vel ut Tuis verbis utar, „ *Lineis propoſitam normaliter ſecantibus poſitione ordinatim datis,* „ *invenire propoſitam.* Si poſitione ordinatim datæ ſint Pa„ rabolæ *cujuſvis gradus*, eundem axem & eundem verticem, „ ſed parametros variabiles habentes, curva optata erit Ellip„ ſis: ſi poſitione ordinatim datæ ſint Parabolæ eædem eun„ dem axem ſed variabiles vertices habentes, curva quæſita „ erit Logarithmica vulgaris: Sic in quovis exemplo peculia„ ri, rem facile expedire poſſem; Tibi autem difficile non „ erit generales pro hoc excogitare regulas. Cæterum hoc „ Problema inſignem uſum præſtat in determinanda curvatura „ radiorum lucis per medium inæqualiter denſum tranſeuntium, „ juxta hypotheſin HUGENII; ſi quidem radius nihil aliud „ ſit quam linea undulationes ad angulos rectos ſecans. Poſ„ ſet præſens Problema adhuc latius extendi, nempe ſic: *Li„ neis propoſitam ad angulum datum ſecantibus poſitione ordina„ tim datis, invenire propoſitam*, ſi lineæ datæ ſint rectæ in „ puncto coëuntes, curva quæſita (ceu manifeſtum eſt) erit „ Loxodromica plana, &c.

Hiſce Vir ſagaciſſimus in hunc modum reſpondit, in Litteris ad me datis $\frac{6}{16}$ Decembr. 1694, quod lubens huc refero, ut appareat quantum, & ille, jam tum fecerit. „ Me„ thodus, inquit, inveniendi curvam, quæ ordinatim poſitio„ ne datis occurrat ad angulos rectos, meo judicio conſiſtit

„ in duabus æquationibus, una continente relationem inter x, „ y, & conſtantem quandam in curva poſitione data, ſed pro „ diverſis talibus ordinatim datis variabilem b; altera conti- „ nente valorem ipſius $dy : dx$ in curva quæſita, expreſſum ex „ proprietate perpendicularium in curva poſitione data; cujus „ æquationis ope, datur ipſius b valor per dy, dx, y, x, pro „ re nata; quarum duarum æquationum ope tollendo b, ha- „ betur æquatio differentialis primi gradus pro relatione inter „ x, & y. Sic ſi poſitione ordinatim datæ ſint Parabolæ ver- „ ticis communis, quarum ſemiparametri b fiet æqu. $2bx = yy$. „ Jam ex conditione Problematis, ſeu perpendicularitate ad „ Parabolam, fit $b = - ydx : dy$; unde tollendo b, fit $- 2xydx$ „ $= yydy$; ſeu ſummando $aa - xx = \frac{1}{2} yy$, quæ utique eſt ad „ Ellipſin, & ſatisfaciunt Ellipſes infinitæ. Et has ordinatim „ poſitione datas manifeſtum eſt viciſſim a Parabola unaqua- „ que normaliter ſecari. Cæterum præclare a Te notatum eſt, „ hoc Problema uſum habere in Dioptricis, pro curvatura ra- „ dii in medio continue variante: nihil potuit dici aptius, „ &c.

Allata ſufficiant ad oſtendendum, methodum ad æquationem perveniendi, non in uno alterove tantum exemplo algebraicarum, ſed in omnibus, dudum nobis fuiſſe familiarem: ſed quoniam in tranſcendentibus non ſuccedit, niſi in ſimilibus, ut in Cycloidibus; vel etiam in illis, quæ ad unam conſtantem reduci poſſunt, ut in Logarithmicis; illam velut inſufficientem neglexi, nec quam excolerem dignatus ſum: alia itaque excogitanda erat, quæ generalis eſſet, & ad quaſcunque ordinatim poſitione datas, tranſcendentes æque ac algebraicas, porrigeretur. Hanc autem, poſtquam acutiſſimus LEIBNITIUS, occaſione eorum, quæ ipſi ſuper hac affinique materia communicaveram, ipſe novam differentialis calculi applicationem per utilem ſane inveniſſet, mecumque viciſſim communicaſſet, de qua hactenus nihil in publicum conſtat; hanc, inquam, quam optaveram methodum generalem ſecandi ordinatim poſitione datas, ſive algebraicas, ſive tranſcendentes, in an-

angulo recto, ſive obliquo, invariabili, ſeu data lege variabili, tandem ex voto erui; cui LEIBNITIO approbatore ne γρύ addi poſſet ad ulteriorem perfectionem; & vel ideo tantum, quod perpetuo ad æquationem deducat; in qua ſi interdum indeterminatæ ſunt inſeparabiles, methodus non ideo imperfectior eſt; non enim hujus, ſed alius eſt methodi indeterminatas ſeparare †. Rogamus itaque *Fratrem*, ut velit ſuas quoque vires exercere in re tanti momenti. Suſcepti laboris non pœnitebit, ſi felix ſucceſſus fructu jucundo compenſaverit; ſcio relicturum ſuum, quem nunc fovet modum, qui in pauciſſimis tantum exemplis adhiberi poteſt, ut modo ſupra dixi.

Quod interim ſpectat peculiarem illum caſum, quem in *Actis* propoſui; ubi ſcilicet quæritur *Trajectoria omnes Logarithmicas ſuper eodem axe & per idem punctum ductas normaliter trajiciens:* En excerpta ex litteris meis ad prælaud. LEIBNITIUM, jam ante biennium datis, die puta 27 Octobr. *1696*, quæ ſingularem exhibent ſolvendi modum per æquationem *exponentialem*, ſeu, ut ego voco, *percurrentem*: „ Eſto (*Fig.* 1.) AB axis communis omnium „ Logarithmicarum CD, C*d* ex puncto C eductarum: determinanda eſt curva D*d*, omnibus CD, C*d* normalis. Poſitis coordinatis AB, BD, x, y; & CA, a; Concipiatur ad „ lubitum determinata quædam Logarithmica CE, ad quam cæteræ referendæ ſunt. Sit illa facilioris calculi gratia talis, „ ut ipſius ſubtangens ſit æqualis ipſi CA, ſeu a. Jam ex „ puncto quovis curvæ quæſitæ D, ductam intellige DE parallelam BA, quæ ſecet aſſumtam Logarithmicam in E, ex „ quo ſi ducatur EF, deſignabit AF Logarithmum ipſius EF, „ ſeu DB, ſeu y. Nunc, ob normalitatem D*d* ad CD erit „ generaliter $dx : -dy = $ BD : BG, ſubperpendicularem curvæ D*d*, ideoque BG $= -ydy : dx$. Eſt autem, ex proprietate Logarithmicarum ſubtangens Logarithmicæ CE ad „ ſubtangentem Logarithmicæ CD, id eſt, CA ad BG, ut „ AF ad AB, quod hanc ſuppeditat proportionem $adx : -ydy = ly :$ „ x,

TAB. XIII. N°. LII. *Fig.* 1.

† De hac Methodo & toto hoc argumento Trajectoriarum, Vide Tom. II. Num. CIV. & ſeq. præcipue autem Num. CXVI.

„ x, unde habetur $axdx = -ylydy$; poteſt autem $-ylydy$ „ ſummari, [prout jam olim ad Te ſcripſiſſe memini,] hoc „ pacto $-ylydy = -ylydy - \frac{1}{2}yydly + \frac{1}{2}aydy$ [quia $dly = ady$: „ y]; ſumtis itaque ſummis per partes, erit $\int -ylydy = -$ „ $\frac{1}{2}yyly + \frac{1}{4}ayy$, & per conſequens $= \frac{1}{2}axx$; id eſt $x = y\sqrt{\frac{a - 2ly}{2a}}$ „ Vel, ſi mavis æquationem percurrentem: ſit b numerus ipſius „ a, ſeu $lb = a$, tunc erit $2yyly = yylb - 2xxlb$, adeoque $y^{2yy} = b^{yy - 2xx}$, vel etiam $b^{2xx}y^{2yy} = b^{yy}$ &c.

Haud difficilius alter caſus Logarithmicarum, cujus conſtructionem dat *Frater* §. 4, ad æquationem percurrentem reduci poteſt. Ut & ſi quæreretur Trajectoria normaliter ſecans omnes omnium graduum parabolas ejuſdem parametri, verticis, & axis; haberetur enim pro natura curvæ $a^{yy+xx} = x^{2xx}y^{2yy}$. Quapropter, videſis quæ ſcripſi de Exponentialibus *Anno ſuperiori menſe Martio*. †

Videamus autem, quomodo tandem *Frater* diſcurſum claudat. En expoſitis omnibus ſuis ſolutionibus & conſtructionibus, poſtremo duos caſus aliis ſolvendos proponit, quos hactenus inexploratos dicit, ſuiſque adeo methodis impervios & deſperatos. Sunt autem hi: *Quæritur curva, quæ omnes Parabolas ſuper eodem axe extructas, lateraque ſua recta reſpectivis verticum a puncto fixo diſtantiis æqualia habentes, ad rectos angulos trajicit*; Item: *Quæritur curva, quæ Parabolam, aut aliam datam curvam, ſuper plano ſuo circa datum punctum in orbem converſam, in angulo dato ſecat.* Gaudeo mihi anſam hic dari, qua ipſius methodo ſubvenire poſſim. Ecce ſolutionem utriuſque. Pro primo: Sit A punctum fixum (*Fig.* 2), AB axis communis Parabolarum BC, quarum parametri, ſeu latera recta, diſtantiis AB æqualia: Super axe BA producto fac Logarithmicam FG pro arbitrio, cujus ſubtangens vocetur a: ſuper AH normali ad AB, deſcribe curvam AE cujus applicata HE (poſita abſ-

TAB. XIII. N°. LII. *Fig.* 2.

ciſſa

† Supra N°. XXXVI.

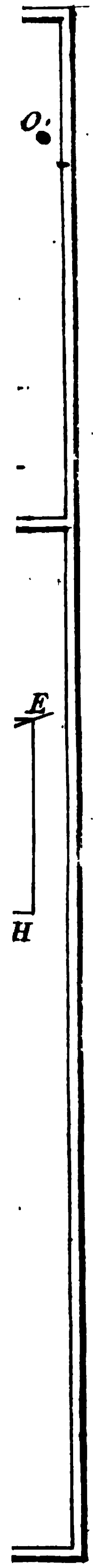
ciſſa AH $= z$) ſit $= \int \frac{a^3 dz + 4azzdz}{aaz - 6z^3}$ †: quo facto, agatur utcunque GE parallela ipſi AH, ſecans curvas in G, E, & axem in D: ſume DI, quæ ſit ad DE, ut DG ad ſubtangentem Logarithmicæ; ex I ducatur axi parallela IC, occurrens Parabolæ deſcriptæ parametro AB æquali ipſi DG; dico punctum occurſus C fore in Trajectoria quæſita CK, quæ omnes Parabolas, ut BC, normaliter trajiciet.

Alterum, quo quæritur *Trajectoria datam quamvis curvam, in ſuo plano, circa datum punctum in gyrum verſam, in dato angulo conſtanter ſecans:* ita conſtruo. Sit punctum, ſeu centrum rotationis C, (*Fig.* 3.) ex quo deſcribatur circulus AGH, aſſumaturque punctum A pro initio rotationis, ipſa vero curva data circa C rotanda ſit BF: ex cujus puncto quovis B ducatur ad C recta BC, & ad hanc normalis CD, occurrens tangenti BD in D. Vocentur radius circuli, ſeu Sinus totus, a; Sinus anguli dati, b; Sinus complementi, c; CB, y; CD, r; BD, t; (nota quod r & t dentur per y) ſumatur jam arcus AG $= \int \frac{a^3 ry \pm abctt}{bbtty - aay^3} dy$, & ex radio CG abſcindatur Cβ $=$ CB; dico punctum β eſſe in trajectoria quæſita βM, quæ curvam datam BF, circa C converſam in quovis ſitu $\beta\phi$, ſecabit in augulo dato M$\beta\phi$: qui ſi rectus ſit, conſtructio evadit ſimpliciſſima; tunc enim ſumendus eſt arcus AG $= \int ady : r$. Hujus demonſtrationem non addo, quoniam evidens & cuivis obvia eſt. TAB. XIII. N°. LII. *Fig.* 3.

† Hoc correxit Author N°. LXX. & legendum dixit $\int \frac{-a^3 dz - 4azzdz}{3aaz + az^3}$. Vid. ibid.



72.



N°. LIII.

JOH. BERNOULLI MATH.

DISPUTATIO MEDICO-PHYSICA

DE

NUTRITIONE,

Quam

Publice examinandam exhibuit

Ad diem 11. Maii 1699.

Edita primum GRONINGÆ 1699. *iterum* TIGURI 1735.



[illegible]TATIO
[illegible]PHYSICA
[illegible] E
[illegible]IONE*.

[illegible]ione actūrus non ea percur[illegible] [illegible]gula, quæ apud omnes ſe[illegible] Medicos quam Phyſicos cir[illegible] materiam leguntur. Delibā[illegible] [illegible]axat, quæ ad inſtitutum [illegible] primario tendunt: forte & [illegible]itur attingendi quæ alii in[illegible]

[illegible]

II.

Quid per Nutritionem intelligendum, neminem fugit; Vulgo eam definiunt, quod ſit *alimentorum in viventis corporis ſubſtantiam converſio & aſſimilatio:* ſeu, ſi magis arridet, quod ſit *continua effluentis ſubſtantiæ redintegratio.* Videſis paſſim Auctorum ſcripta, nimirum CASTELLI *Lexicon Medicum*, MICRELII *Lexicon Philoſ.* SENNERTI *Inſtitutiones Med.* FERNELII *Phyſiolog.* ROHAULTI *Phyſic.* Guilielmi COLE *Hypotyp.* aliorumque innumera.

III.

Eam autem duplicem faciunt, *conſervantem & augmentantem*; per illam tantundem præciſe novæ materiæ corpori apponitur, quantum continua diſſipatione ab eo ſeparatur, per hanc plus additur quam perit. Nonnulli tertiam ſpeciem afferunt *attenuantem*, qua novæ ſubſtantiæ ſuppeditatio veteris jacturam non æquat.

IV.

Omnes ergo conveniunt, (ecquis negaret!) quod corpus, quod vulgo dicitur vivens, continuo motu & agitatione partium, de ſubſtantia ſua indeſinenter amittat, quodque amiſſum per converſionem & appoſitionem alimentorum ſit reſarciendum. Quomodo vero hæc converſio & appoſitio peragatur, a variis varie explicatur. Qui exploſis Veterum chimæris delectantur, & apertis oculis circulationem ſanguinis non vident, materiam pro nutrimento primam ex ſanguine per venarum

Philoſophiæ tum temporis & Matheſeos in Academia Groningana Profeſſor, cum ab acerbis & inficetis quibuſdam hominibus accuſaretur, ideoque ob imputatum in articulo de reſurrectione mortuorum Socinianiſmum, ſcriptam & jam per plurimos annos a Viris doctis deſideratam, hic recudendam exiſtimavimus; cum ejus lectio, non Phyſicos tantum, & artis Apollineæ cultores, ſed etiam Theologiæ, omniumque bonarum artium amatores inſtruere & delectare poſſit.

rum truncos ad capillares facultate ſua attractiva eliciunt, mox quatuor humorum formam ſucceſſive induturam, *humoris* nempe *innominati*, *roris*, *glutinis* & *cambii*; quorum ultimum tanquam materia proxima jam præſto eſt, quæ relictis prioribus eligatur a facultate electrice, & aſſimiletur ab aſſimilatrice, quæ duæ facultates, mirum! in ſingulis partibus ſingulari modo ſuum exercent imperium, ita ut cambium illud in oſſa ab oſſificatrice, in muſculos a muſculificatrice, in nervos a nervificatrice, & ita porro commutetur. Belle omnino! at turbas prævideo machinæ noſtræ exitiales ex eo oriundas, ſi quondam accideret ut facultates iſtæ ſui officii immemores alia aliam ſalutando ex ſuis in aliena transmigrarent domicilia: proh ſuperi! quid fieret? quanta metamorphoſis? ſi quod jam carnoſum eſt oſſeſceret, & carneſceret quod oſſeum; ſi nervi, ſi tendines rigerent; ſi loco crurum duæ tibi eſſent marmoreæ columnæ; ſi brachia cum digitis abirent in duriſſimos arborum ramos; ſi ſolidus cortex loco cutis involveret corpus; contra ſi cranium, coſtæ, dentes, reliquaque oſſa molleſcerent; ſi aures & naſus inſtar ceræ ductiles evaderent; certe vix ſimilem OVIDIUS finxit transformationem. Jocari ſed liceat, ad ſeria pergimus.

V.

Poſtquam noſtrum inventorum ferax ſæculum, ut in omnibus aliis ſcientiis, ita in Anatomicis novas eaſque clariſſimas accendit faces, verum jam ſanguinis cognovimus motum, genuinam chyli viam, exiles lymphæ ductus Veteribus inconſpictos, venarum valvulas, arteriarum & venarum capillarium anaſtomoſes, plurimaque alia a ſagaciſſimis Microcoſmi luſtratoribus detecta; quibus cognitis, arduum non erit, nutritionis rationem intelligibiliter exponere. Quanquam & inter recentiores ſint, qui in nonnullis diſcrepent, dum alii, ut WARTHONUS, GLISSONIUS, COLE, ſuccum nutritium proxime ex nervis ſubminiſtrari volunt, alii ut WILLISIUS,

Carteſius, Rohaultius, Steno, eum ex ramulis arteriarum extremis immediate derivant; conveniunt tamen omnes, materiam ex qua ille generetur eſſe ſanguinem, inque mechanico explicandi modo parum aut nihil differunt, qui ſummatim ita ſe habet: Cibi in ore maſticati ope dentium, ab interſperſa ſaliva primam præparationem ſubeunt, deglutiti poſtea a fermento ventriculi comminuuntur & digeruntur magis, inque chylum ſeu ſuccum, cinericeum primo, dein albicantem convertuntur, qui poſt moram aliquam per ventriculi oſtium inferius, *pylorum* dictum, exprimitur in inteſtina, in quibus paulatim proreptando, cogente inteſtinorum motu periſtaltico, porro elicitur, exaltatur, attenuatur, intenſiuſque lacteſcit. Hoc modo attenuatus, oſcula vaſorum lacteorum ſubintrat, urgente ſemper eo qui ſequitur, relictis particulis craſſioribus & fæculentis, quæ excrementa componunt per alvum ejicienda; mox percolatur per glandulam magnam Aſellii, ulterioris depurationis gratia, uti volunt, dehinc affatim properans per varios ramos tendit ad commune receptaculum a Pecqueto detectum; concentratus iterum expellitur, partim a novo ſubingreſſuro, partim etiam a micatione arteriarum & motu muſculorum in vicinia jacentium, abdominis præſertim & quorundam reſpirationi inſervientium, ubi diaphragma quam plurimum præſtat, expulſum recipit ductus thoracicus, per quem iiſdem moventibus jugiter aſcendit, & denique in ſuprema parte ſeſe exonerat in venam ſubclaviam, ubi primum cum ſanguine commiſcetur. Scio quoſdam eſſe ex præſtantiſſimis modernis Anatomicis, qui quidem hac chyli via non negata, aliquam tamen ejus partem, immediate ex inteſtinis venientem, a venis meſaraicis abſorberi, & ſic cum ſanguine ſtatim mixtum ad hepar amandari ſtatuunt, quam opinionem præprimis fovent Hornius, Swammerdam, Bilſius, Borellus, Deulingius; decantatiſſimo illo experimento *Bilſiano* omnes vel plerique nixi; quo jure vero, conſulantur Pecquetus, Lowerus, Bartholini *Pater* & *Filius*, & alii, qui ad hepar nihil omnino chyli per meſaraicas deferri validiſſimis argumen-

argumentis evicerunt, & propterea ei totum ſanguificationis munus, quod ab omni antiquitate geſſerat, eripuerunt. Lectu inprimis digna ſunt LOWERI experimenta hunc in finem inſtituta, ut & quæ *Thomas* BARTHOLINUS, qui antea ipſe viriliter pro hepatis functione militaverat, tandem vero meliora edoctus in exequias ejus conſcripſit.

VI.

Chylus itaque ex vena ſubclavia continuo in ſanguinem inſtillatus, cum eo progreditur, dextrumque ſtatim cordis ventriculum pervadit, exinde per pulmones itinere emenſo, ſiniſtrum cordis thalamum ſubit, nec moram nectit, ſed validis iteratis pulſibus exploditur in arteriam aortam, ex hac in ramos, ex ramis in minores arterias, ex iſtis in capillares indeſinenter profunditur, unde iterum inverſo ordine ex venulis minoribus in majores recollectus ad cor revehitur; ſed nullis induciis conceſſis, eundem repetit circuitum, itque reditque ſemper eandem viam; atque in hoc conſiſtit ab omnibus jam recepta circulatio ſanguinis ab HARVAEO primitus detecta, poſtquam diu adeo latuiſſet, non ſine exprobranda ſuperiorum ſæculorum cæcitate. Chylus hoc modo cum ſanguine delatus, ab eo ſenſim ſubigitur, excoquitur, & elaboratur, ita ut particulæ chyli ſanguineis ſimiles a reliquis ſeparentur, ſanguinique ob ſimilitudinem facile aſſocientur, reliquæ autem, quæ ob heterogeneitatem figurarum ita intime cum ſanguine miſceri non poſſunt, variis naturæ viis ex corpore eliminentur. Dum enim per varia viſcera maſſa ſanguinea trajicitur, pro ratione meatuum partes ipſis accommodatæ ab ea ſecernuntur. Non certe alius quærendus eſt ſangnificationis modus, quam modo dictus, qui conſiſtit tantum in debita chyli permixtione cum ſanguine, & in mora ſufficienti plurium circulationum: prima etenim alterave id opus non ſtatim peragitur; teſte experientia, quæ docet, quod ſi animali, quatuor vel quinque horis poſt largiorem paſtum, arteria vel vena quæ-

vis

vis ſecetur, reddet ſanguinem multum chyli etiamnum lacteſcentis habentem.

VII.

Sanguis ex chylo factus, & a partibus heterogeneis repurgatus, conſtat tamen diverſis diverſæ indolis & naturæ particulis, pro ratione pororum cujusvis partis nutriendæ in corpore, ita ut ſingulis pro uſu & indigentia ſua ſuppeditare poſſit: ſic pars ſanguinis ſubtilior & volatilior in cerebro ſecernitur, & ſpiritibus reficiendis deſtinatur, pars vero glutinoſior nutritioni corporis inſervit. Non tamen putandum eſt, eam, dum in vaſis ſanguiferis circumfertur, glutinoſam exiſtere; quamdiu enim particulis motus ineſt, non facile ſibi adhæreſcunt, ſed ubi extra vaſa ſemel fuerint a motu rapido ceſſantes, viſcoſitatem eam induunt, quam videmus humores omnes gelatinoſos acquirere, ſi aliquandiu in loco non nimis calido ſtagnaverint, quantamcunque etiam antea habuerint fluiditatem.

VIII.

Quomodo autem ſanguis nutritioni idoneus ex vaſis promanare queat, multi non ſatis concepere; crediderunt plerique & etiamnum credunt, extremas arteriolas capillares per totum corpus diſſeminatas hiare apertis oſculis in interſtitia partium nutriendarum, ſuccumque nutritium ita quaſi eructare cum reliqua ſanguinis maſſa ab alteris oſtiolis venularum capillarium pariter hiantium reſorbenda, & ad cor revehenda. Sed huic opinioni reclamat perfecta vaſorum capillarium anaſtomoſis, quam celebris ille inviſibilium ſcrutator LEUWENHOEKIUS, fidiſſimi ſui microſcopii ope in pluribus animalibus obſervavit. Et ut fidentius loquar, facit propria autopſia, quæ me non ſemel idem docuit in anguilla, ubi, non ſine magna admiratione & delectamento, conſpexi ſæpius perelegantem ſanguinis circulationem, atque ex arteriolis in venulas continuo tractu celerrime

rime prolabentes globulos ſanguineos, in illis nimirum aſcendentes, in his vero reflexo velut itinere ſine ulla interpoſita morula deſcendentes; adeo ut ex flexura illa, quæ inter binos quoſque ramulos intercedit, evidentiſſime conſtet, quamlibet arteriam capillarem cum ſua venula unum continuum efformare vaſculum; tam certum igitur eſt quam quod certiſſimum, duo iſta genera vaſorum per immediatas anaſtomoſes inter ſe communicare, adeoque extravaſationem illam ſanguinis ex capillarium oſculis merum eſſe figmentum.

I X.

Quæ cum ita ſe habeant, ultro ſequi videtur, humorem nutritium alia longe ratione ex vaſis deducendum eſſe. Verum enim vero vix quicquam eſt quod rem clarius explicet; quam ſi dicamus, ſubtiliſſimas ſanguinis particulas, propter calorem & motus rapiditatem, ſub forma vaporum, per tunicas vaſorum capillarium tranſſudare; cum enim ipſæ tunicæ nihil aliud ſint quam expanſio & textura infinitarum fibrillarum reticulatim implexarum, fieri nequit quin multi exigui meatus pateant ad recipienda illa effluvia; cui accedit, quod validus ſanguinis motus talem transſudationem multum adjuvet: facta enim qualibet cordis ſyſtole, ſanguis magna vi ex eo ejectus, arterias impetu ſuo nimium infarciens, earum tunicas valde diſtendit, quo fit ut pori amplientur, ceu optime notavit CARTESIUS in ſuo *Tract. de Format. Fœtus:* & præterea preſſio ſanguinis, quæ momento pulſus in omnes partes interioris ſuperficiei arteriarum æqualiter ſe exerit, particulas in poros jam intruſas magis propellit, hæ vero proxime præcedentes & ita porro.

X.

Notandum interim eſt, omnes partes corporis animalis, quæ ſolidæ vulgo dicuntur, compoſitas eſſe ex innumeris fibrillis &

filamentis diverſimode intricatis & intertextis, interdum parallelis, ut in muſculis, nervis, tendinibus; quin & ipſa oſſa tali textura filamentorum gaudent, quod vel ex eo manifeſtum eſt, quod oſſa uno quam alio modo longe facilius findantur, & fiſſa facilius coaleſcant quam fracta: In fiſſura quippe fibræ manent integræ, quæ in fractura dilacerantur. Quod egregie etiam obſervatum reperio in FORGEI notis ad CARTES. *Tract. de Homine.* Cum igitur arteriæ in ramos innumeros divaricentur, & horum ſinguli in infinita vaſa capillaria, quæ totum habitum corporis ſecundum omnes dimenſiones perreptant; conceptu facile eſt, ſingula filamenta ita inſiſtere arteriolis, ex quibus ſubtiliores ſanguinis moleculas exſudare diximus, ut illorum radices harum poris reſpondeant; quælibet ergo molecularum, per arteriolarum tunicas expulſarum, impingit occurſu ſuo in radicem filamenti, atque ſi ibi foveolam offendit figuræ & magnitudini ſuæ congruam, in illam intruditur, & ita infixa & intruſa filamento iſti appropriatur; ſi vero ſtationem nullam invenit, ob incommodam quam habet figuram, vel ob injuſtam magnitudinem, a ſuccedentibus particulis ſtatim removetur & præterlabi cogitur in interſtitium duorum proximorum filamentorum, cujus longitudinem decurrendo, ubi ad extremitatem venerit, vel per poros cutis in aërem avolat, in quo proprie conſiſtit tranſſpiratio inſenſibilis, vel per vaſa lymphatica, quæ in eum finem vaſa ſanguifera ibi comitari arbitror ut ſuperfluum a nutritione humorem recipiant, ſub forma lymphæ revertitur & plurimis in locis, partim cum chylo, partim immediate cum ſanguine iterum miſcetur; quo fit, ut illæ particulæ, quæ prima vice re infecta in ſanguinem remeare coactæ fuere, forſan ſecunda tertiave circulatione aptiorem figuram adeptæ, vel jam diverſis a prioribus filamentorum porulis impactæ, ipſis facile adhæreſcant; atque ſic per ſucceſſivam illam applicationem particularum totum nutritionis negotium abſolvitur; ubi videmus quod, pro varia tum particularum nutritiarum tum meatuum figura & magnitudine, ab iiſdem alimentis variæ corporis partes nutriri de-

beant,

beant, muſculi, nervi, cutis, cerebrum, oſſa: patet etiam ex eo ſolo quod particulæ tam arcte filamentis uniantur, replendo accuratiſſime alveos quibus intruduntur, eas filamenti conſiſtentiam & naturam induere, adeo ut nullo hic glutino opus ſit ad nexum firmandum, nullaque facultate electiva & aſſimilativa.

X I.

Notandum porro, quod dum radicibus filamentorum novæ particulæ apponuntur, hæ præcedentes ante ſe protrudant, donec ita quæ radici jam proximæ, certo temporis intervallo ad ſummitatem perveniant, ad quam ubi pervenerunt, ab aëris aliorumve corporum ambientium frictione abraduntur. Interim nihil impedit, quo minus etiam quædam particulæ ex lateribus filamentorum abripiantur, & quaſi abluantur ab humore illo in interſtitiis filamentorum decurrente, cum quo vel in ſanguinem revertuntur, vel in auras avolant. Et hinc illa partium corporis continua diſſipatio; qua non obſtante, corpus creſcit quamdiu plures particulæ radicibus filamentorum agglutinantur, quam a ſummitatibus eorundem divelluntur: id quod in adoleſcentia accidit, quando nimirum, ob mollem adhuc & laxam partium ſubſtantiam, particulæ nutritiæ facilius & copioſius poris infiguntur. Media ætate, tot præterpropter particulæ ſubſtituuntur, quot ab altera parte abripiuntur; unde corpus aliquandiu in æquali mole conſervatur. Sed in ſenectute, quando pori denſiſſime coarctati ſunt, filamenta vix quicquam nutrimenti admittunt, dum interim extremitates aëri aliiſve corporibus expoſitæ continuo atteruntur, humidumque quicquid eſt exſiccatur; quo pacto longe plus abſumitur quam reſtauratur: hinc frequenter accidit quod valde decrepiti, non tam morbo, quam lento quodam maraſmo emaciati, ſine ullo ſenſu doloris extinguantur. Prævideo objectionem quam quis nobis facere poſſet, dicendo; Si filamenta in juventute ſunt molliora quam in ſenectute, ut ita recipere poſſint particulas nu-

tritias majori copia, illa vice verſa etiam tanto facilius poſſe atteri, per frictionem aëris corporumve aliorum. Ad hoc quamvis ſufficeret reſpondiſſe, nihil omnino obſtare quo minus illud quod apponitur longe plus ſit quam quod demitur; hoc inſuper reſponſi addo, quod experientia docet, duriora omnia ab attritu & frictione multo facilius conſumi quam mollia. Ita videmus metalla, quo duriora ſunt, eo melius expoliri poſſe; cujus ratio alia non eſt, quam quod in mollibus corporibus particulæ prominentes introrſum prompte cedere poſſint, & vi terenti ſe quaſi ſubducere; quod cum in duris contingere non poſſit, neceſſe eſt ut omnes aſperitates, ſuperata reſiſtentia exigua quam faciunt, a reliquo corpore avellantur.

XII.

Alia difficultas ſupereſt, quæ hanc Nutritionis explicationem premit, quæ vero facile diluitur: Eccam! Durum videbitur pluribus & tantum non impoſſibile, ſubſtantiam adeo ſolidam & compactam, ut ſunt oſſa, nutriri, dilatari, & extendi poſſe per ſolam inſinuationem ſubtiliſſimi illius roris, qui ex maſſa ſanguinea per tunicas arteriolarum tranſſudat: qui fiat quod valida oſſium textura ingreſſuris particulis non reſiſtat, vel ſaltem ſui dilatationem non impediat. At qui ex mechanicis Legibus norunt ingentem vim cunei: imbecillitatem hujus objectionis facile percipiunt. Quælibet enim particula inſtar cunei ſe habet, quando vi admodum levi quidem adigitur, ſed quæ applicata ad findendum longe majorem exercet niſum in latera. Quid igitur? ſi jam omnes particulas, quæ ſuas vires hoc modo exercent, collectim ſumas, quid non valebunt? miraberisne, nullam oſſium ſoliditatem vi dilatanti reſiſtere poſſe? ſane non magis quam quod, aëre exiſtente pluvioſo, tenſæ teſtudinum fides craſſiores etiam violenter rumpantur, quæ alias robuſtiſſimi viri manibus rupturam tentantis vires eluderent: tantum nempe valent ſolæ particulæ aquoſæ, quæ ex aëre ſeſe inſinuando intra fidium fibrillas,

las; eaſdemque dilatando, fides abbreviare affectant, quod cum fieri non poſſit, rupturam ſequi neceſſe eſt. Huc refer etiam ſtupendam potentiam qua pollent muſculi a ſpiritibus animalibus inflati; prout fuſius explicui in Diſſertatione mea *de Motu Muſculorum.* Ut jam nihil dicam de ingenti pondere, quod funes humectati quaſi ſponte attollunt, cujus mirabilis effectus experimentum ſuo tempore curioſorum oculis proponam.

XIII.

His omnibus ſerio perpenſis, liquido apparet, nullum in corpore animalis os tam durum eſſe, nullum tam compactum & ſolidum, quod non nutriatur, quodque adeo non mutetur & temporis intervallo partem ſui amittat, novamque recuperet; atque hoc multo verius eſſe quoad reliquas corporis partes, quæ ſunt minus ſolidæ. In ſimili opinione omnino fuit CARTESIUS. *Omnium corporum* (inquit ſub init. tertiæ part. De Format. Fœt.) *quæ vitam habent, quæque alimento ſuſtentantur, hoc eſt, animalium & plantarum* (harum enim nutritionis par ratio eſt) *partes in perpetua mutatione ſunt; adeo ut inter illas quæ dicuntur fluida, ut ſanguis, humores, ſpiritus, atque alteras quæ ſolida appellantur, ut oſſa, caro, nervi, membrana, nihil ſit diſcriminis, niſi quod qualibet harum particula multo tardius moveatur quam illarum.* Quis quæſo aliter ſentire poſſet, cum quotidiana experientia oſtendat, omnes machinas ex quantumvis durabili materia confectas longo uſu corrumpi, deteri, & conſumi; adeo ut nulla ſit ratio, cur machina animalis, quæ artificialibus longe infirmior eſt, a detritionis & frictionis injuria immunis eſſet, non obſtante quod ſit in motu & agitatione perenni. Quinimo omnes Medici & Philoſophi, quotquot de hac materia ſcripſerunt, huc conſpirant, & licet in explicandi modo nonnihil differant, uno tamen ore conſentiunt, alimenta per nutritionem revera converti in ipſam corporis ſubſtantiam, adeoque particulas nutritias

tias per converſionem hanc componere, *proprie & ſtrictiſſime* loquendo, id quod vocamus oſſa, carnem, nervos, &c. Quis enim ſanæ mentis cum nonnullis delirantibus ſomniaret, nutrimenta non faceſſere in ipſam corporis partium ſubſtantiam, ſed ipſis tantum apponi ut accidentale quid, eum tantum in finem, ut deinde ab iis, per inſenſibilem transſpirationem reliquaſque naturæ conſuetas vias, iterum ſeparentur & ejiciantur? Hoc ſi eſſet, neſcio, an non natura, quæ alias nihil fruſtra facit, hic ſui ipſius maxime oblivisceretur, dum tanto molimine nutritionem inſtituiſſet ad cumulanda tantum excrementa, quibus parum adeo in corpore noſtro indigemus, ut ſatius longe eſſet a cibis omnino abſtinere, quam eos vitio naturæ corrumpere, inque pravos duntaxat & excrementitios humores commutare, qui nil niſi malum corpori minantur. Regeris, nutritionem forſan a natura inſtitutam eſſe, in adultis præſertim, ad refocillandas vires duntaxat, ſuggerendo nimirum novos ſpiritus animales in locum abſumtorum. Demus hunc unicum eſſe nutritionis finem; concedendum ergo eſt ſaltem, unam corporis partem, ſcilicet ſpiritus animales novam ſubſtantiam a nutritione acquirere: Fruſtra hic mihi negares, quod ſpiritus animales conſtituant partem corporis; conſtituunt enim, ſecundum omnes Medicos, unam ex maxime neceſſariis & eſſentialibus, quarum vulgo tria faciunt genera principalia, *continentium*, *contentarum* & *impetum facientium*, ad quorum tertium ſpiritus referunt, ad ſecundum ſanguinem cum reliquis partibus fluidis, & ad primum oſſa, muſculos, nervos, &c.

XIV.

Sed piget plus temporis terere in inepta adeo opinione refutanda. Agnoverunt veritatem & Veteres & Recentiores, quorum tamen omnium authoritas me minime moveret, niſi illa per ſe ſatis clara mihi patuiſſet, ut per hactenus dicta oſtendiſſe puto. Teſtimonium tamen tot tantorumque virorum mihi

hi inſerviet pro ſtabiliendis quibuſdam conſequentiis, quas legitime ex communi ſententiam deducturus ſum, & evidenter adeo demonſtraturus, ut nemo non intelligat, quam frivole ab aliquibus impetantur, & quam injurii ſint non in me tantum, ſed. in omnes illos inſignes viros, quos ſupra citavi, & quorum multo plures citare potuiſſem. Nullius enim criminis hac in parte inſimulari poſſum, quin ſimul illi omnes mecum rei fiant. Videant igitur Zelotes mei, quo ſua mihi nocendi libidine abripiantur, diſpiciant unde eluant injuriam inſontibus impactam.

XV.

Primum, quod ex iſta communi Medicorum & Philoſophorum ſententia de perennitate fluxionis corporis animalis, ſeu de perpetua ſubſtantiæ ejus deperditione, ſequitur, eſt hoc, quod corpus noſtrum, ut & omnium animalium, ne per unicam quidem horam poſſit manere idem *numero*: (idem autem numero eſt, cum idem ad ſeipſum refertur; vide de his prolixius diſſerentis Cl. Hulsii nuperam Diſputationem *De eodem ſecundum numerum*:) mutatum enim eſt corpus poſt horam, non quoad accidentia tantum, ſed quoad ipſam ſubſtantiam: habuit quod non habet, & habet quod non habuit: quamvis illud quod intra horæ ſpatium abit & accedit modicum ſit, eſt tamen aliquid, quod pertinuit & quod pertinet ad ipſam ſubſtantiam corporis, fatentibus omnibus Philoſophis, Medicis & Anatomicis. At vero identitas numerica requirit ſubſtantiæ immutabilitatem quoad ſubjectum, quoad eſſentiam ſuam, licet quoad accidentia mutetur: ſic fructum ceræ rotundum ſi fiat cubicum, manet tamen eadem *numero* cera, quia eadem manet materia ceræ; ſed ſi aliquid demis aliudque addis tantillum ceræ, amplius non erit eadem *numero* cera, etiamſi rotunditatem ſuam ſervaret, nam non amplius eſt *idem ſibi ipſi*. Hinc patet, pro *identitate numerica* conſervanda in corpore requiri neceſſario conſervationem *quanti*, id eſt æqualis voluminis; unum idemque cor-

corpus, procul dubio, non poteſt majus minuſve ſpatium occupare uno tempore quam alio: peſſime igitur *quantum* corporis alicujus ſingularis & determinati inter ejus accidentia qualitatis refertur, cum quantitas, ſeu quæ hic intelligitur extenſio in longum, latum, & profundum, omnino ad ejus eſſentiam pertineat. Si tu mihi ducatum aureum commodares, eum vero bona parte circumciſum tibi reddere vellem, dicens, En tuum ducatum *numero* eundem, foresne contentus? Sed quidni eſſes, quando quidem *idem* redderem, quod dediſſes: Accipere etiamnum renuis? ego inſto, Accipe, aut deſine dicere, quod poſt circumciſionem priſtinus maneat ducatus. Non minus vice verſa ridiculum eſſet ſuſtinere, corpus quantacunque mole auctum, manere tamen idem *numero* corpus. Dicis hoc non eſſe ridiculum? eſto, me tibi commodaſſe vitulum, quem poſtea paſcuis tuis taurum factum repeterem; iniquum-ne cenſes petitum, cum tamen, ut ipſe fateris, nil petam niſi quod meum eſt, illum ſcilicet eundem *numero* vitulum meum. Sunt ne, quæſo, qui ejuſmodi habent ideam identitatis numericæ? vix putem, ſed pergo.

XVI.

Cum igitur ſubſtantia ipſa corporis continuo varietur, variatio autem unius horæ ſit inſenſibilis; luce profecto meridiana clarius eſt, quod illa tractu temporis fieri debeat notabilis; id quod quidem omnes Medici & Philoſophi haud ægre agnoverunt. Nemo autem, quod ſciam, extitit qui auſus fuerit mutationis illius menſuram determinare, aut quoquomodo definire quota pars corporis intra annum annoſve conſumatur, qualiſque ratio ſit inter illud quod remanſit, & inter illud quod de novo acceſſit. Eia ge! videamus, an in tanta caligine diluculum nobis ſuperſit? Proponamus nobis virum conſiſtentis ætatis, ſi vis tricenarium, optima valetudine utentem, robuſtum & athleticum; demus ipſi ordinariam ſtaturam corporis, cujus pondus ſit 150 librarum, & ſupponamus cum SANCTORIO hujus

hominis

hominis quotidianum victum eſſe librarum octo. Compertum habuit præclarus ille SANCTORIUS, per multiplicem experientiam viginti & plurium annorum atque per obſervationes ſingulares hanc in rem unice inſtitutas, quod homo ſanus temperamenti bene conſtituti, quinquageſimam circiter partem convertat in corporis ſui ſubſtantiam: Sumta igitur quinquageſima parte octo librarum, provenient $5\frac{3}{25}$ ſemunciæ pro nova ſubſtantia, quam athleta noſter ſingulis diebus corpori ſuo aſſimilat; id quod, anni ſpatio, efficit 58 lib. $12\frac{4}{5}$ ſemunc. hoc eſt, pluſquam trientem ponderis totius corporis: tantundem ergo etiam per continuam diſſipationem de ſubſtantia corporis deperdi debet, ſupponimus enim virum illum eſſe in conſiſtente ſtatu, in quo nimirum totius corporis pondus per longum tempus non mutatur. Jam vero, ſi deperditio eum in modum ſeſe haberet, ut vetuſtiſſima materia corporis primum abiret, deinde quæ proxime minus vetuſta eſt, & ſic ſucceſſive ad recentiſſimam uſque, eodem nempe ordine quo corpori fuit adſimilata; ſequeretur corpus non modo idem numero non manere, ſed ita omnino diſſipari, ut tandem ne minima quidem particula ejus ſuperſtes remaneat, alio jam plane corpore ejus locum occupante; & hoc pacto calculus foret leviſſimus: cum enim, anni ſpatio, 58 lib. $12\frac{4}{5}$ ſemunc. novæ materiæ corpori accedat, & tantundem de veteri pereat, quærendum tantum eſt ope Regulæ aureæ, quantum ergo temporis requireretur ad diſſipandas 150 libras, materiæ ſcilicet totius corporis; facta ſupputatione, reperietur quod diſſipatio totius corporis accideret intra biennium & $207\frac{1}{2}$ dies; adeo ut materia, quæ noſtri viri corpus hoc ipſo momento componitur, poſt tres annos non tantum tota foret uſu detrita & conſumta, ſed ſimul etiam bona pars novæ quæ in locum ejus ſucceſſura eſſet.

XVII.

Et quidem hoc omnino ita futurum eſſe patet, ſi, ut dixi, in diſſipatione particularum idem temporis ordo a natura obſer-

varetur qui in earundem appoſitione: a quo ſane credendo CARTESIUS & ROHAULTUS haud multum alieni videntur, quando uterque ſtatuit, quod infima particula radici filamenti appoſita, impellens & urgens ante ſe præcedentes, ad extremitatem pervenire & abradi non poſſit, niſi prius præcedentes omnes ſucceſſive fuerint avulſæ. At vero quoniam promiſcue ex veteribus & novis particulis ſimul, pro ratione utriuſque quantitatis, expelli debeant, quemadmodum liquet ex §. 11. fieri non poteſt ut unquam omnis materia, qua hoc momento componitur corpus, omnino in auras avolet, etiamſi mille annos viveret homo; ſemper enim remanebit aliquid de veteri materia commixtum cum recens advenienti, ſed magis & magis diminuitur, ita ut tandem minus evadat data quavis exigua quantitate. Quod ut eo melius intelligatur, ſimile dabo: Concipiamus vas aqua plenum continens 150 libras, unde hauriuntur $5\frac{5}{25}$ ſemunciæ, & loco exhauſtæ æquæ reaffunduntur aliæ $5\frac{5}{25}$ ſemunciæ vini puri; ſequenti die, ex mixto detrahuntur iterum $5\frac{5}{25}$ ſemunciæ, & dein adjiciuntur $5\frac{5}{25}$ ſemunciæ vini puri; tertio die, eodem modo ex mixto tolluntur $5\frac{5}{25}$ ſemunciæ & tantundem vini puri additur; hocque ſingulis diebus per intègrum annum iteratur, hauriendo nimirum dictam quantitatem ex mixto, & poſtea exhauſtum compenſando æquali quantitate vini puri; ita ut hoc pacto vas ſemper plenum maneat: quæritur ergo quantum aquæ & quantum vini, poſt finitum annum, in vaſe futurum ſit, ſeu quænam ſit proportio inter aquæ reſtantis quantitatem & vini quantitatem? Hoc problema jam pluſculum difficultatis in receſſu habet: ut enim vinum purum affunditur, ita e contrario aqua non pura detrahitur, ſed ſimul aliquid de vino affuſo; & quidem detracti copia utriuſque ſingulis vicibus mutatur; unde non, quemadmodum in priore hypotheſi, ex ſolo numero infuſionum utriuſque quantitas æſtimari poteſt: interim quantumvis ardua videatur hæc quæſtio, iis præſertim qui in Arithmeticis minus ſunt exercitati, pervenio tamen ad quæſiti cognitionem per viam haud valde ſalebroſam,

quam ecce! 150 libræ aquæ conficiunt 4800 ſemuncias, unde detractis $5\frac{5}{27}$ ſemunciis aquæ, & reaffuſa æquali quantitate vini puri, reſtabunt in vaſe $4794\frac{22}{27}$ ſemunciæ, aquæ permixtæ cum $5\frac{5}{27}$ ſemunciis vini; jam ſi ſecundo die ex hac mixtura detrahas iterum $5\frac{5}{27}$ ſemuncias, & tantundem vini puri adjicias, conſtabunt illæ $5\frac{5}{27}$ ſemunciæ detractæ non ex aqua pura, ſed tantillum vini ſecum habent, quod in eadem proportione erit ad aquam ut $5\frac{5}{27}$ ad $4794\frac{22}{27}$, ſuppono enim vinum uniformiter aquæ permixtum eſſe; adeoque ſecunda detractione $4794\frac{22}{27}$ ſemunciæ aquæ in eadem proportione diminuuntur, in qua diminuebantur 4800, id eſt, numerus aquæ reſiduæ ſemunciarum, poſt ſecundam detractionem, erit tertius proportionalis ad 4800 & $4794\frac{22}{27}$; pari modo tertio die facta ex mixto detractione $5\frac{5}{27}$ ſemunc. oſtenditur numerus aquæ reſiduæ ſemunciarum eſſe quartus proportionalis ad 4800 & $4794\frac{22}{27}$ & ſic porro: Ergo finito anno, ſcilicet poſt trecenteſimam ſexageſimam quintam detractionem, reſtantis aquæ pondus habebitur ſumendo trecenteſimam ſexageſimam ſextam proportionalem ad 4800 & $4794\frac{22}{27}$, ſeu elevando $4794\frac{22}{27}$ ad 365 poteſt. & quod provenit dividendo per 4800 elevatum ad 364 poteſtatem. Id quod immenſi adeo laboris eſſet, ut intra trimeſtre nemo calculum abſolveret; ſed ſuppetit compendium egregium ex Tabulis Logarithmorum, quod hoc eſt: Reducatur ratio numerorum 4800 & $4794\frac{22}{27}$ ad integros & minimos terminos, habebitur 1875 & 1873. Jam vero, ex doctrina Logarithmorum patet, quod Logarithmus trecenteſimi ſexageſimi ſexti proportionalis ad 1875 & 1873 ſit æqualis 365 log. 1873 minus 364 log. 1875; Ex Tabulis igitur ſumantur Logarithmi numerorum 1873 & 1875, qui ſunt 3.2725378 & 3.2730013, quorum ille multiplicetur per 365, hic vero per 364, id quod dabit 1194476297o, & 11913724732, quorum differentia eſt 3.1038238, quod quæratur in columna Logarithmorum, & reperietur ipſi reſpondere quam proxime numerus 1270, qui igitur erit trecenteſimus ſexageſimus ſextus continue proportionalis ad 1875 & 1873. Porro quoniam 1875: 1873 = 4800: $4794\frac{22}{27}$; erit

ex proprietate continue proportionalium 1875 ad modo repertum 1270, ut 4800 ad trecenteſimum ſexageſimum ſextum proportionalem ad 4800 & $4794\frac{22}{25}$, qui facta operatione Regulæ aureæ invenitur $3251\frac{1}{5}$, pro numero quæſito: Dico igitur quod poſt omnes illas mixti detractiones & vini puri infuſiones ſingulis diebus factas, tandem elapſo anno ſint remanſuræ in vaſe $3251\frac{1}{5}$ ſemunciæ aquæ, adeoque (complementum ad 4800,) id eſt, $1548\frac{4}{5}$ ſemunciæ vini.

XVIII.

Hiſce ita computatis, applicatio ad præſens negotium facile perſpicitur: aqua pura 150 librarum contenta in vaſe repræſentat materiam, qua corpus totidem librarum noſtri hominis hoc momento componitur, $5\frac{3}{25}$ ſemunciæ vini puri quotidie infuſi referunt novam materiam, quam ſingulis diebus in ſubſtantiam ſui corporis convertit & quæ cum veteri commiſcetur: reliqua per ſe ſunt clara. Ergo hinc colligo, quod ſi quotidianum diſpendium, ſeu diſſipatio tam novæ quam veteris materiæ ſimul, fiat pro ratione utriuſque quantitatis, erit materia vetus 150 librarum corporis iſtius hominis redacta ad $3251\frac{1}{5}$ ſemuncias, ſeu ad 101 lib. $19\frac{1}{5}$ ſemuncias. Reſiduum vero nemce $1548\frac{4}{5}$ ſemunc. ſeu 48 lib. $12\frac{4}{5}$ ſemunc. erit nova ſubſtantia, quæ cum illa veteri corpus humanum poſt anni finem componet. Jam vero, cum parum abſit quin 48 lib. $12\frac{4}{5}$ ſemunc. faciant tertiam partem 150 librarum, dici poteſt, quod corpus humanum, quovis anno elapſo, trientem fere amiſerit ſuæ ſubſtantiæ quam initio illius habuerat, adeoque quod ipſi non multo plus duabus tertiis partibus reſtiterit ſubſtantiæ veteris. Proinde elapſis duobus annis, reſtabunt paulo plus quam duæ tertiæ illarum duarum tertiarum, id eſt quam quatuor nonæ partes: at cum etiam $\frac{1}{2}$ ſit paulo plus quam $\frac{4}{9}$; poterimus affirmare quod intra biennium materia corporis humani quam proxime ad ſui dimidium conſumatur, & alterum dimidium nova reſtituatur. Porro duæ tertiæ partes dimidii, ſeu dimidium dua-

rum

rum tertiarum , id eſt $\frac{8}{27}$, oſtendet reſiduum veteris materiæ poſt lapſum triennii. Et ſic deinceps pro quovis annuorum numero calculare licet , ſumendo tantum duas tertias partes fractionis repertæ pro anno proxime præcedenti : quod in ſubſequentibus ad tantam tendit diminutionem , ut poſt decennium noſter Lacertoſus vixdum quinquageſimam adhuc partem ſui corporis, quod nunc habet, ſit retenturus, quamvis interim moles reſidui & adventitii collectim æquale ſemper pondus adæquet. Immediate quoque, ex methodo noſtra per Logarithmos, calculus extendi poſſet ad quotvis annos; ita enim pariter deprehendi quinquageſimam tantum partem quam proxime remanſuram eſſe, decem elapſis annis.

XIX.

Subticendum hic non eſt , quod in calculo præmiſſo ſuppoſuerimus ubique , omnes partes corporis humani æquabiliter & uniformiter diſſipari , quanquam tamen certum ſit diſſipationem oſſium lentiorem multo eſſe , quam partium fluidarum, ut ſanguinis, ſpirituum animalium, &c. Conſiderandum vero damus, quod carnes, cæteræque partes molles, medium quaſi teneant inter duras & fluidas, ita ut quanto promtius quam partes duræ , tanto vice verſa lentius quam partes fluidæ conſumantur: unde tuto & ſine notabili errore fingere poſſumus, ac ſi totum corpus eſſet una continua caro ; & ſic calculo noſtro ſua iterum conſtabit probitas. Quod ſi quis tamen hæc curioſius rimari vellet, ponere poſſet certam proportionem inter pondera triplicis illius ſubſtantiæ totius corporis, oſſeæ nimirum, carneæ, & fluidæ, ut & inter celeritates diſſipationis ſingularum; ex. gr. æſtimemus ſceletum ſeu totam oſſium compagem 60 librarum, ſubſtantiam omnium carnium & partium mollium 70 lib., maſſam vero ſanguinis & partium fluidarum 20 lib. ita enim plerique Anatomici cenſent; præterea ponamus fluidas duplo promtius diſſipari quam molles, & molles decies promtius quam duras; id eſt, eodem tempo-

ris ſpatio, ſumtis tribus quantitatibus æqualibus fluidi, mollis, & duri, duplo plus conſumi ex illo quam iſto, & decies plus ex iſto quam ex hoc. Combinemus jam rationem mollium 20, 70, 60, ſeu 2, 7, 6, cum ratione celeritatum 20, 10, 1, unde proveniet ratio 40, 70, 6, ſeu 20, 35, 3; id quod oſtendit quod quotieſcunque ex maſſa fluida corporis humani diſſipantur 20 ſemunciæ, ex partibus carneis & mollibus diſſipabuntur 35, & ex compage oſſium 3 ſemunciæ. Illæ igitur $1548\frac{4}{5}$ ſemunciæ, quas ſupra invenimus pro univerſali diſſipatione annua totius corporis, dividendæ ſunt in tres portiones quæ ſe habeant ut 20, 35, 3: reperietur autem $534\frac{2}{29}$, $934\frac{18}{29}$, $80\frac{16}{145}$: atque ſic ſingulorum ſeparatim invenimus jacturam intra annum faciendam, nempe maſſa fluidorum deperdet $534\frac{2}{29}$ ſemunc. moles carnium $934\frac{18}{29}$ ſemunc. oſſium vero ſubſtantia $80\frac{16}{145}$ ſemunc. unde liquet carnes maximum, oſſa minimum pati detrimentum.

XX.

Finiamus hanc materiam ſpeculatione aſia non injucunda, niſi forſan illis quibus omnia diſplicent, quæ ſana ratio ſuggerit. Vidimus ſupra virum noſtrum, cujus conſtitutionem corporis mire variabilem hactenus examinavimus, quotidie $5\frac{3}{25}$ ſemuncias in ſuæ machinæ reparationem acquirere: Quoniam vero nonnihil ætatis conſumit, ubi tanta quotidie quantitate alimentorum non veſcitur, quæ ſufficiens ſit ad ſuppetandas illas $5\frac{3}{25}$ ſemuncias; præſertim in tenera juventute & in ſenectute extrema; quanquam vero hæ duæ partes ætatis cum intermedia illa comparatæ exiguæ admodum ſint; reſcindamus tamen notabilem partem ab illis $5\frac{3}{25}$ ſemunciis, & ponamus illarum loco tantum 4 ſemuncias, quas ſingulis diebus in quavis ætate in ſubſtantiam ſui corporis commutet. Videamus jam quantum illud eſſet, quod per totam viam in ſui corporis ſubſtantiam commutat, ſi in unam molem colligeretur; ſeu quouſque excreſceret, ſi, præter excrementa tam

ſen-

ſenſibilia quam inſenſibilia quotidie excernenda, de propria corporis ſubſtantia nihil amitteret: ſit autem vita hujus hominis 80 annorum; calculum obiter tantum attingam, quia adeo facilis eſt ut Arithmetices tyronem ne quidem morari poſſit; multiplicetur 365 numerus dierum anni, per 4 numerum ſemunciarum quotidie corporis ſubſtantiæ apponendarum, & proveniunt 1460 ſemunciæ, pro incremento corporis annuo, qui proinde numerus porro multiplicatus per 80 numerum annorum vitæ, dabit 116800 ſemuncias, ſeu (dividendo per 32,) 3650 libras, pro omni illa ſubſtantia quæ per totam vitam corpus compoſuit: ſed 3650 libræ continent 150 libras 24⅓ vicibus, adeoque ſi ad 80^{mum} ſuæ ætatis annum nihil ſui corporis amiſiſſet, vel ſi amiſſum recolligere poſſet, tunc ad eam uſque corporis magnitudinem perveniret, quæ ordinariam ſuperaret pluſquam vicies quater. Atque ſic, ſi diutius vitam protraheret, tandem ponderoſam æquaret Coloſſi Rhodii molem; & verendum eſſet, ne ſi homines hoc artificium creſcendi haberent, more veterum Gigantum congeſtis ad ſidera montibus denuo regnum cœleſte affectarent; Videmus enim nonnullos ne ſic quidem abſtinere ab auſibus qui viribus ſuis non conveniunt, moliendo nimirum ſumma contentione multa iniqua, proximique ſui perniciem & interitum. Sed tu qui Titanico conatu montes niteris, & eniteris murem, audi, Audacule, quod mula apud PHÆDRUM muſcæ increpanti & minitanti reſpondet: *Verbis*, inquit, *non moveor tuis. Derideo qui ſine virtute vanas exercet minas.*

XXI.

Subſiſtendum hic eſſet, niſi, non tam materiæ affinitas, quam alia quædam gravis cauſa me invitaret ad mittendam tantiſper falcem in alienam meſſem. Philoſophica omnino hucuſque tractavi, ſed quid vetat quo minus in Theologicis etiam ſanam Philoſophiam adhibere ſatagamus, imo debeamus, quantum pote; ſed ita tamen ut deferamus ſemper venerationem de-

debitam myſteriis fidei. Non enim Deus fruſtra hominem ad ſui imaginem creavit, neque ut brutorum more, abdicata omni ratione, in incertum fluctuemus, vel machinæ noſtræ motu unice ad agendum rapiamur: quis inſaniæ fines adeo excedat, ut dicat, nobile hoc rationis talentum, quod Deus nobis dedit, tunc quam maxime ſub modium ſepeliendum eſſe, quando de ipſius Dei & verbi ejus cognitione agitur? Cave, cave, ne quondam a te rigide ſatis rationes exigantur tam male collocati tui talenti. Scio quam maxime, nec opus eſt ut moneam, plurima eſſe, quæ Deus in verbo ſuo nobis revelavit, captum noſtrum infinities ſuperantia, qualia ſunt momentoſiſſima fidei capita de S. S. Trinitate, de æterna generatione Filii, de ejus incarnatione, de *reſurrectione mortuorum*, &c. hæc ſane credidi, credo, & per gratiam Dei ſemper credam, quia ea revelare mihi dignatus eſt; quod autem credam, non eſt contra ſanam rationem, nec ſine ratione; eo ipſo enim quod Deus ſit ens ſumme perfectum, adeoque quod ſit infinitus, ſumme bonus, qui fallere & falli neſcit, cogor ad credendum quæcunque ab ore ejus infallibili promanant, licet mens humana, tanquam finita, ea quæ infinitam intelligentiam requirerent comprehendere & aſſequi non poſſit. Jam porro quia ex ratione clariſſime video, Deum nihil nec efficere nec dicere poſſe, quod cum ſua perfectione pugnet, vel minimam in ipſo imperfectionis notam arguat, ſane etiam in myſteriis fidei omnes contradictiones abeſſe debent; & hæc una eſt ex graviſſimis cauſis, cur primi noſtri Reformatores ex Babylone Romana tot contradictionibus ſcatente egreſſi fuerint: Ita ut impium vel mente captum potius conſiderem illum, qui ex myſterio revelatæ S. S. Trinitatis concludere vellet, quod in uno Deo ſint tres Dii, vel quod in una perſona ſint tres perſonæ; utrumque enim æque abſurdum eſt, quia manifeſtam contradictionem involvit. Quanquam igitur arcana fidei captum noſtrum longe ſuperent, ſanæ tamen menti non adverſantur: imo debemus illa uti ad ſuffocanda hujuſmodi perniculoſa deliria, ſi quis tenebrio ea exinde abſurde adeo elicere conaretur; tantum

tum abeſt ſanam rationem uſum habere nullum in explicandis & vindicandis revelatis veritatibus divinis.

XXII.

Ita etiam eadem divina authoritate perſuaſiſſimus ſum *de Reſurrectione carnis*, imo *hujus* carnis, quam homines in hac vita aliquando habuerunt; (addo *aliquando*, non enim ſemper eandem habent, ut ſupra ſatis ſuperque oſtendi:) & quidni hoc crederem, cum Deus id revelaverit? nullam hic video contradictionem; ſi enim Deus omnia corpora ex nihilo potuit creare, quanto magis jam creata iterum colligere, eorumque partes utcunque diſperſas unire poterit? At vero ſi male feriatus quiſpiam me adigere vellet ut crederem, quod ex ſua penu addit, nempe Deum, in communi reſurrectionis die, reſuſcitaturum omnem illam materiam *eandem numero*, (a cujuſmodi terminis barbaris S. Scriptura ubique abhorret) quæ olim corpus humanum per totam vitam ſucceſſive compoſuerat, (quam ſupra oſtendi Coloſſi molem adæquaturam) & tamen reſuſcitati corporis ſtaturam fore ordinariam; vel contra, ſi mihi perſuadere conaretur, embrionem vix ſpithamam æquantem & jam in utero materno mortuum, reſurrecturum cum corpore quod glorioſo corpori Chriſti ſit conforme, & tamen ei nullam novam ſubſtantiam acceſſuram; illi regerem, ut ineptas hujuſmodi contradictiones propinaret fungis & ſtipitibus, vel illis, qui credere aſſueti ſunt, totum corpus noſtri Salvatoris, quantum quantum eſt, comprehendi poſſe in exiguo hoſtiæ ſpatio. A nobis profecto ultra quod Sacra Scriptura credendum petit, exigi nihil debet: at nullo in loco dicit, Deum omnem præciſe, nec plus nec minus, corporis materiam quæ ipſi fuerat eſſentialis reſuſcitaturum; nam ſi hoc diceret, lubentiſſime etiam id crederem, quia ipſi non minus poſſibile eſſet reproducere omnem, quam partem; ſed tunc negarem homines reſurrecturos in vulgari ſtatura. En ergo hic paucis ſinceram meam confeſſionem de Reſurrectione;

quam omnis Chriſtianus nunquam ſatis ſerio meditari poteſt; eſt enim noſtra ſpes unica fruendi olim perfecta beatitudine & tranquillitate, poſt vitam hanc ærumnoſam, inſidiis, perturbationibus & perſecutionibus plenam, quas, proh dolor! etiam ii qui pacem & concordiam ſuadere deberent, continuo nobis inferre non verentur.

XXIII.

Vides hinc, mi amice Lector, quo ſenſu accipiendum ſit; quod ante annum circiter in publica Diſputatione Philoſophica, cum bihorium deſtinatum hiſce exercitiis jam elapſum eſſet, neſcio qua data occaſione velut in tranſitu dixeram, *corpora non eadem numero reſurrectura:* nimirum non quod plane nova corpora ſint a Deo ſubſtituenda, multo minus creanda; ſed quod eodem ſenſu non futura ſint eadem *numero*, quo ſupra diximus, cum omnibus Philoſophis & Medicis, in ipſa vita non eadem *numero* manere. Quamvis interim pro certo habeam, Deum homini redditurum corpus ſuum, illud nempe quod in hac vita habuit; quoniam tamen multa ſucceſſiva habuit, næ! illud unum, quod ex omnibus illis homo habebit, non poterit eſſe idem numero cum reliquis, quæ non minus ſua fuerunt, quam illud unum quod tunc iterum habebit: niſi quis forte, contra omnium communem Phyſicorum & Medicorum receptam opinionem, cavillari voluerit, illam materiam, quæ per nutritionem corpori aſſimilatur, eidem non eſſe eſſentialem; ſed ſtamina vel primordia tantum quædam immutabilia facere ipſius corporis eſſentiam, a quibus corpus unum & idem ſemper dici debeat, licet interim alia & alia materia jugiter accedat & ſecedat. Verum enimvero præterquam quod, ex ſupradictis & ex vulgari de nutritione ſententia, clariſſime conſtet nihil in toto corpore animalis eſſe quod ſit ſtabile & quod non nutriatur, adeoque ne ficta quidem illa ſtamina; reſponderi inſuper poteſt, quod ſi omne illud, quod corpori accreſcit, ſit accidentale tantum, ſane corpus ipſum ſine iſtis accidentalibus erit imper-

cepti-

ceptibile: etenim in ipſa ſtatim generatione hominis, corpuſculum ejus, quod etiamnum ovulo materno includitur, creſcere incipit & peregrinam materiam in ſui ſubſtantiam convertere: Ergo, cum ab eo momento reliqua omnia ſint accidentalia, ſequitur corpus Goliathi eſſentiale, ſepoſitis omnibus accidentalibus, tandem reduci ad inviſibilis acori magnitudinem. Riſum teneatis amici!

XXIV.

Atque hunc verborum meorum ſenſum fuiſſe, potuit colligi exinde, quod in ipſo illo actu, iteratis vicibus, ad Opponentem meum dixerim, (ſed quod accuſatores mei alto ſilentio prætereunt caute) *tu non habes idem corpus quod ante annum habuiſti;* quemadmodum omnes auditores teſtari poſſunt: adeo ut inutile fuiſſet, me, vel poſtea in alia Diſputatione ſub Celeb. BRAUNIO habita, vel hiſce pagellis, ulterius explicare. Si ergo ulla heterodoxia hac in parte commiſſa eſt, ſane non ego ſolus, ſed tota Medicorum & Phyſicorum cohors excommunicanda eſt. Sed hoc male mihi cupientes exprobrant, quod dixerim, *per oculos quibus* JOBUS *Deum viſurus eſt (Job.* XIX. 27.*)* non præciſe eos intelligendos eſſe, quos tunc in miſerando ſuo ſtatu habuerat, ſed ſimiles; quid quæſo hic impii? quid heterodoxi? annon plauſibilius eſt, Deum JOBO redditurum eos ſaltem oculos, quos habuit in ſtatu ſanitatis? An hi non æque ſunt JOBI *oculi* ac illi, intolerabilibus cruciatibus deplorandum in modum deformati, atque continuis lamentationibus tantum non penitus in lacrymas colliquati? notandum enim eſt, nullam partem corporis diſſipationi magis eſſe obnoxiam quam oculos; imo Medici obſervarunt, quibuſdam hominibus pertuſis tunicis tumorem aqueum ex oculo totum effluxiſſe, aliumque in ejus locum brevi a natura ſubſtitutum fuiſſe; jam vero, cum iſte humor aqueus unam ex principalibus conſtituat oculi partem, interim tamen utrumque, & elapſum, & reſtitutum, idem oculus capere non

poſſit; utrum tu, qui ſimilitudinem adeo abhorres, ipſi adjudicabis in reſurrectionis die? ego ſane hoc beneplacito divino relinquerem; quemcunque enim ipſi dederit, ſive effuſum, ſive reſtitutum, ſive alium quemvis, qui ex oculo illo inſenſibiliter emanavit, ſemper ipſi ſuum dederit; quia aliquando ſuus revera fuit. Confirmare hoc ulterius poſſem, ipſius JOBI, quem tam male adverſus me allegant, teſtimonio; quando non uno in loco conqueritur de conſumtione carnium ſuarum, *pelli meæ*, lamentatur haud procul a loco citato, *adhærent oſſa mea*; recuperavit autem perfectam ſanitatem cum reliquis corporis bonis, quibus Deus illum poſtea largius beavit, recuperavit ergo novam carnem, novam corporis ſubſtantiam, adeoque priori non eandem ſed ſimilem; & tamen dicere potuit JOBUS, *& in mea carne videbo Deum:* utraque enim ſua erat, adeo ut nil referat, utram Deus aliquando reſuſcitet.

XXV.

Novum interim non eſt, ut ea quæ ſucceſſive & inſenſibiliter ſecundum ſubſtantiam mutantur, vocentur tamen *eadem*, ſi modo eandem figuram & formam retineant; ita enim invaluit communis mos loquendi, qui plerumque originem habet ab imperita plebe a ſenſibus omnia deducente. Hinc Navis olim, qua THESEUS ſalvus ab expeditione redierat, quæque in æternam rei geſtæ memoriam diu adeo aſſervabatur, ut ſuffecta toties nova materia, rejectis ſemper aſſeribus vetuſtate corruptis, vix una alterave tabula de veteribus remaneret, ejuſdem tamen Navis THESEI nomen perpetuo gerebat. Ita quoque res omnes, quæ uſu & tempore paulatim deteruntur, detritæ reparantur, eædem habentur; quamvis vix minimum priſtinæ materiæ ſuperſit; & ſane eodem pacto ſe habet cum corpore hominis cæterorumque animalium, quod quidem, hoc ſenſu vulgari, ſine omne difficultate ſemper *idem* dici poteſt; at ſi non cum vulgo, ſed philoſophice, ſed phyſice, ſecundum

rei

rei naturam loqui velimus, dicere omnino tenemur, quemadmodum illam THESEI Navem, ita & corpus humanum *idem numero* diverſis temporibus non eſſe, ſed ſimile tantum, ſeu idem ſpecie. Quid hîc ſapit hæreſin? dic! annon omnes Philoſophi ita cenſent? quibus ergo fidiculis me ad rogum damnabis? quo colore, quin ſimul illi omnes, imo & Juriſconſulti, me eo comitari debeant? quippe & hi cum Philoſophis ſentiunt, corpus humanum, communi quidem ſenſu, dici manere idem, manere tamen idem tantum ſpecie. Aperi modo, ſi placet, Corpus Juris, & lege *l. 76.* D. *de Judiciis*, ubi ALFENUS expreſſiſſimis verbis inquit: *cujus rei SPECIES eadem conſiſtit, rem quoque eandem eſſe exiſtimari*, &, quod notabile eſt, ſententiam ſuam hoc ipſo exemplo corporis humani aliiſque multis confirmat, adeo ut ſecundum ipſum non maneat idem *numero*, ſed idem ſpecie, quod præterea Commentator repetit, & eodem ſimili de THESEI Nave apprime illuſtrat. Tot ergo mihi ſunt ſocii idem jugum mecum trahentes, ut commune malum mihi ſit ſolatio.

XXVI.

Pervenio tandem ad graviſſimam accuſationem, ſed ſimul iniquiſſimam & ineptiſſimam. Cum in prædictæ illius Diſputationis conflictu, inter alia quoque allegarem argumentum ab Anthropophagia (non rabida ſemper, ſed aliquando coacta, cujus exempl. vid. Thren. IV. 10.) petitum; neſcius tunc, vel oblitus ſaltem, (Deum teſtor!) illud quoque a Socinianis urgeri; protinus Socinianiſmi a nonnullis accuſor: Quo vero jure, quave æquitate? & vel Logices tyroni dijudicandum relinquo, qui ad illorum ignominiam melius novit, in ſecunda figura ſyllogiſmorum non affirmative concludi. Syllogiſmus enim hic, *Sociniani adhibent hoc argumentum. A. ego adhibeo hoc argumentum. Ergo ego ſum Socinianus*, non melior eſt quam alter hic, quem vulgo Ludimagiſtri in ſcholis faciunt ad tentandos ſuos adoleſcentes: *Aſinus habet aures. A. tu habes aures. Ergo tu*

es aſinus : quod etiam tunc ſtatim alio ſimili ſyllogiſmo futilitatem prioris manifeſtabam Auditoribus. Sed miſſis ejuſmodi ſcholaſticis quiſquiliis, memini me dixiſſe, orthodoxum & hæreticum eodem argumento uti poſſe, illum bene, hunc male; illum ad veritatem adſtruendam, hunc ad errorem tegendum; me enim aliter illud argumentum applicare quam Sociniani faciant. Nihil enim aliud per illud demonſtrare contendo, quam quod non omnis ſubſtantia, quæ per totam vitam corpus alicujus hominis compoſuit, ſit cum illo reſurrectura; quia nimirum aliqua ejus pars, converſa per anthropophagiam in ſubſtantiam alterius hominis, cum utroque non poſſit reſurgere; id quod mihi haud dubie facile largieris, ſiquidem corpus aliquod in duobus locis ſimul eſſe poſſe ſine manifeſta contradictione nemo ſuſtinebit: poſſem hic allegare, ex abundanti, viſibilem transformationem carnis unius hominis in carnem alterius, quemadmodum me legiſſe memini de quodam TALIACOTO Medico Italo, tantæ peritiæ ut homini, cui naſus erat amputatus, alium apponeret vivum, affabre exſectum ex lacerto alterius hominis, pretio ad dolorem & carnis ſuæ jacturam ferendam conducti. Hoc ſi verum, ut poſſibile eſt, fateberis puto mecum, fruſtum illud carnis ex uno exſectum & quaſi tranſpropriatum alteri homini, non cum utroque homine reſurrecturum. Credo interim (ſalva vi hujus argumenti,) ut id majuſculis litteris repetam, CORPUS QUOD MECUM RESURGET, ERIT MEUM CORPUS, QUOD HABUI IN HAC VITA. Quid plura deſideras, viſne ut ſupra Scripturam ſapiam? at ſi tantum didiciſti ex Logica tua, ut ſcias propoſitiones affirmantes univerſales ſimpliciter converti non poſſe, dic mecum exinde non ſequi: Ergo omnis materia, quæ in hac vita ſucceſſive corpus meum compoſuit, mecum reſurget; ſupra enim oſtendi abſurditatem ejus. Quid ſi huc traherem nonnullorum veterum Patrum, quos inter ipſius AUGUSTINI, ſententiam, corpus reſurrecturum ſine humoribus & exſangue, cum tamen ſanguis, cæteræque partes fluidæ, longe corporis ſint eſſentialiores quam

bra-

brachia vel crura: illoſne hæreſeos accuſabis, quod identitatem numericam negaverint?

XXVII.

Jam vero Sociniani utuntur anthropophagiæ argumento, ut execrandum ſuum dogma ſpecioſo quodam mangonio obducant: credunt enim ſe per illud evincere poſſe, quod, in Reſurrectione, nova corpora non tantum ſint ſubſtituenda, ſed a Deo nova creanda. An ego is ſum qui hoc unquam ſtatui? prodi, mi bellule, quiſquis es, qui ſerena fronte tantam hæreſin mihi torpenti ſcil. inurere conaris, & me id dixiſſe, vel ſcripſiſſe convince! Egone dicerem, novam novorum corporum creationem fore, qui tamen illo ipſo die ter quaterve repetii: *corpora non erunt nova, ſed illa ipſa, quorum materia jam ante ſex fere millia annorum a conditore univerſi fuit creata;* quod vero iterum ſubdole diſſimulant, utpote quod æque quadrat ad Socinianum fabricandum, quam thymbra ad lanceam. Porro ſi Socinianorum doctrinam penitius examinemus, videbimus illos omnino Reſurrectionem mortuorum negare, quod pereleganter primus animadvertit Celeb. BRAUNIUS. Cum enim ſecundum illos anima ſit pure materialis, quippe quam ridicule conſiſtere volunt in certa quadam craſi ſeu temperamento corporis, ejuſque humorum & ſpirituum, quo mortuo, vel annihilato, & ipſam animam mori vel annihilari neceſſe eſt; evidens utique eſt, ſi, ut delirant, novum corpus ſit creandum, cum illo etiam creari novum temperamentum, novam craſin, adeoque novam animam, atque ſic omnino novum hominem: homo ergo qui mortuus eſt non reſurgit, ſed alius creatur: per conſequens negant omnino Sociniani Reſurrectionem hominis.

XXVIII.

Decreveram apologiam conſcribere, qua fuſius oſtenſurus eram

eram, inter meam de Reſurrectione ſententiam, quam cum reliquis orthodoxis ſemper habui, & inter Socinianam, non minorem hiatum eſſe quam inter Lazarum & divitem Epulonem. Interim vero Cl. HULSIUS hac in parte me occupavit, & tanquam ſtrenuus Theologus, multo melius quam ego potuiſſem, qui alius longe ſum profeſſionis, Socinianorum ſtrophas ventilavit, diſcuſſit, exploſit; quapropter Lectorem B. remitto ad lectionem ejus Diſputationis nuper habitæ; reperiet ibi Socinianis larvam tam ſcite detractam, ut ſine omni difficultate, immanem illam diſcrepantiam inter me & Socinianum animadverſurus ſit. Non igitur poſſum quin hic gratum meum animum Collegæ meo honoratiſſimo teſtificer, quod me tanto labore levarit, & orthodoxiam meam ab impactis ſtultitiis tam fortiter vindicarit. Neſcio qui fiat & maximopere miror, quod aliqui ſint, ut rumor fert, qui ſiniſtram opinionem habent, quaſi per *Protea lubricum & ſophiſtam verſipellem*, quos tam maſcule conſtrinxit, præter Socinianos, etiam Philoſophos & me in primis intellexerit: quod ſane nullo modo in animum mihi inducere poſſum: præterquam enim quod Vir Cl., pro ingenuitate ſua, bene agnoſcat Mathematicos, quibus ego adſcribi valde delector, nil niſi certitudinem, ſoliditatem & evidentiam amare, proſcribentes longe omnem Protei & Sophiſtæ lubricitatem; inſignis inſuper ejus erga me humanitas non permittit, ut tale quid minimum de ipſo ſuſpicer; præſertim cum fere jam ante annum, in propriis ſuis ædibus, in quibus ipſum convenire honos mihi contigit, plenaria mea explicatione eorum quæ ſuper Reſurrectione paulo ante publice dixeram audita, me ab omni heterodoxia abſolverit, imo etiam cauſam meam (id enim ab ipſo rogaveram) apud alios, qui verba mea in alienum detorſiſſent ſenſum, fideliter ſe acturum promiſerit; nihil in mea explicatione ſibi diſplicere aſſerens, niſi quod terminum illum ſcholaſticum *idem numero* non in vulgari ſenſu me accepiſſe exiſtimaverat.

XXIX.

XXIX.

Spero liberam hanc meam defenſionem & juſtiſſimam injuſtiſſime mihi imputatæ heterodoxiæ depulſionem piis omnibus & æquis judicibus ex aſſe ſatisfacturam, neminique diſplicituram, niſi qui liberam vocem innocentis audire metuit. Silui diu, cogitabam enim cum CICERONE, quod *magna vis veritatis, quæ contra hominum ingenia, calliditatem, ſolertiam, contraque fictas omnium inſidias facile ſe per ſe ipſam defendat.* Sed ſilentium & patientiam meam vicit nonnullorum inſolentia, qui male obrutum reſuſcitant incendium, qui me nunquam viſum accuſant, & nunquam auditum condemnant. Bone Deus! qualis procedendi modus? danturne ſub ſole gentes tam barbaræ, quæ non curent tritum illud, *audi & alteram partem?* Alitne tales monſtrorum ferax *Libya*, vel inculta *Americæ occiduæ* adjacens *California*? ubi candor? ubi Chriſtiana charitas? poſito me erraſſe, erranti in diſputandi calore verbum excidiſſe, quod non apte quadret; itane ſtatim ſiniſtre interpretandum erat? itane protinus per plateas curſitandum; declamandum; rudi popello, cui alte manent veſtigia impreſſa, perſuadendum, me heterodoxum eſſe? tantane tragœdia adornanda & ſumma imis confundenda? Quod ſi id fecerunt ex fervente pietatis zelo, quod ſi ipſis propoſitum fuit, omnia heterodoxiæ ſemina evellendi & conculcandi; eja! quam bene factum eſt, quamque laudabiliter: habent pro hoc ſat magnum penſum, ſi linguam & calamum ſuum acuere dignantur contra tot hæreticorum libros, quos ut totidem lupos ovile Chriſti infeſtantes impune in mundo circumvagari patiuntur. Sed aliæ viæ præſto ſunt ad fratrem ſuum corrigendum; ovis enim aberrans recolligi debet non deglubi, hoc officium eſt boni paſtoris. Obſervandæ ſunt leges charitatis, quas CHRISTUS præſcripſit Math. XVIII: 15, 22. Luc. XVII: 2, 4. Nec eſt quod dicas, peccatum publice commiſſum etiam publice corripi debere: qui enim amicorum privatis objurgationibus non auſcultat, publicis profecto reprehenſionibus & violenta caſtigatione multo minus emendabitur, quia ſemel in-

famis factus monita omnia ſuſque deque habet, quem alias ſolus infamiæ metus a peccato liberaret. Has CHRISTI regulas ſancte obſervarunt ipſius diſcipuli, qui fratres ſuos, non publice corripiendo, traducendo, proſcindendo, lucrati ſunt, nullumque, qui heterodoxiæ ſuſpectus ſe publice explicare & purgare voluit, interruperunt & turbarunt, quin contra læti maxime a ſuſpicione liberatum apertis ulnis excepiſſent. Erit forſan unus vel alter, cui hujuſmodi admonitio, ut & ſuperiora omnia, non uſque quaque arridebunt, quem proin pruritus contra ſcribillandi facillime invadere poterit; ſcio enim multos eſſe, qui cum aliam inclareſcendi viam non habeant, in quovis muſtaceo laureolam quærunt: Sed quicquid hoc modo prodierit, ſciat ejus Auctor, me non magis id curaturum quam ſi canis me allatraſſet: ſemel enim innocentiam meam toti mundo expoſuiſſe eamque per publicam Diſputationem vindicaſſe, abunde mihi ſufficit: reliquum temporis, quod mihi ſupereſt, melius collocaſſe putabo, ſi, ut hactenus, ita porro ex arte nobiliſſima quam profiteor aliquid novi utileque in lucem emiſero, quam ſi miſeras naſutulorum rixas ſine fine retundendo oleum & operam perderem; eſt enim hujus ſeculi labes quædam & macula virtuti invidere: ſed pulchrum eſt invidorum criminationes purgare morum innocentia, & ſuæ virtutis exemplo aliorum vitia etiam tacendo coarguere.

ANNEXA PRÆSIDIS.

I. Quicunque blaterat, per experimenta nupera a me ſolemniter in Choro Templi Academici, ubi reliqua exercitia Academica peragi ſolent, inſtituta, Templum Dei fuiſſe profanatum: is, aut mente captus eſt, aut ſuum in nos noſtraque ſtudia odium & malevolentiam turpiter prodit.

II. Quicunque improbat generoſitatem Illuſtr. & Præpotent. D. D. Ordinum ſummam pecuniæ, pro coëmendis Inſtrumentis experimentalibus ſuppeditantium, is indignus eſt qui Eorum beneficio fruatur, & habendus eſt pro imperitiſſimo Miſomuſo.

III. Potentia & ſapientia Dei ex nulla re ſenſibilius patet, quam ex contemplatione operum ejus, & nemo ea melius contemplari poteſt quam Philoſophus & Mathematicus, qui eorum naturam perſcrutatur. Riſu igitur ſunt digniſſimi, qui Philoſophiam & Matheſim tantopere derident & exſibilant, tanquam nullam haberent utilitatem in rebus momentoſis.

Excerpta

N°. LIV.

Excerpta ex Litteris Domini Joh. BERNOULLII, Groningæ 7 Auguſti *1699 datis.*

Acta Erudit. Lipſ. 1699. Nov pag. 513.

ACCEPI duas plagulas priores libelli a Dn. FATIO DUILLERIO † editi, & non potui ſatis mirari modum ſcribendi, quo uſus eſt. Queritur me non dignatum ipſi exemplar Problematis * tranſmittere; ſed facilis reſponſio eſt, me nec teneri mittere talia ad ſingulos, nec divinaſſe ubi ille degat; & Dn. NEWTONO exemplaria miſiſſe, non ut eum ad certamen provocarem, ut ipſe DUILLERIUS rem interpretatur, ſed ut aliis quoque res innoteſceret. Dum me tanquam *minus modeſtum* accuſat, videtur ſub umbra modeſtiæ voluiſſe efficere, ut credamus, *ſe quoque*, *ſi qua invitatione dignus viſus fuiſſet*, *litteris ſuas dudum ſolutiones fuiſſe exhibiturum*; quaſi ſcilicet, ſi modo ſe applicare *dignatus* fuiſſet, mox myſterium fuiſſet detecturus. Interim nobis non dicit, quanto tempore fruſtra inſudaverit, quantum laborem hanc in rem impenderit. Nempe antequam de libello *Fatiano* aliquid reſciviſſem, didici a Viro fide digno, qui nuper venit ex Anglia, Dn. DUILLERIUM, cum amico etiam in Anglia extraneo, ante duos circiter annos, magna contentione Problemati huic, cujus notitia mature ad ipſum pervenerat, ſeſe accinxiſſe, & ambos certatim in eo laboraſſe. *Amicum* illum primum deſtitiſſe re infecta; & DUILLERIUM, poſt quam diu ſatis fruſtra inſudaſſet, etiam abjeciſſe arma. Tandem tamen hunc, multo poſt, reſumſiſſe Problema deſperatum,

 eique

† *Nicolai* FATII DUILLERII R. S. S *Lineæ breviſſimi deſcenſus Inveſtigatio geometrica duplex, cui addita eſt Inveſtigatio geometrica ſolidi rotundi, in quo minima fiat reſiſtentia.* Lond. 4°.

* Supra N°. XXXIII.

eique acriter & tenaciter inhæſiſſe. An autem abſolviſſet, Relator ignorabat. Certe, ſi *modeſtia* impedit, quo minus quis ſua inventa publici juris faciat; nemo aliquid in publicam utilitatem edere poterit, niſi immodeſtus eſſe velit. Quod ſi vero nomen exprimere jactantiæ eſſe dicat, quidni & ipſe ſuas problematum difficiliorum *curvæ catenariæ, velariæ, iſochronæ, &c.* enodationes &c. methodoſque, quas diu poſſidere ſe dicit, publico bono promulgat, ſuppreſſo ſuo nomine? Quantum ad ipſas, quas edidit, ſolutiones, hujusmodi Problemata, noſtro more tractata, nullum, aut perbrevem calculum requiſiverunt, aut ex ſola contemplatione infinite parvorum, adhibita quadam dexteritate, fluxerunt. Calculi vero, quos inſtituit, admodum ſunt perplexi; quos ut examinarem, a me impetrare non potui. Problema *Curvæ ſolidi minimæ reſiſtentiæ* vocat magis arduæ diſquiſitionis, quam Problema *celerrimi deſcenſus*; ſed tale fuit DUILLERIO forte, qui genuinam ſolvendi methodum non habebat. Hoc enim Problema tantæ facilitatis deprehendo, ut ad ejus ſolutionem nullo prorſus calculo fuerit mihi opus; nam charta & calamo deſtitutus, & in lecto decumbens, ſolius imaginationis ope plenarie id ſolvi.

TAB. XIV. N°. LIV. Fig. 1. Eſto curva quæſita BFN (*Figur.* 1.), quæ ex revolutione ſua circa BM deſcribat ſolidum, in quod minima fiat reſiſtentia, ſi moveatur ſecundum plagam ipſius axis BM. Elementa applicatarum NM concipiantur diviſa in partes æquales NR, RP: ſint NL, LF duo elementa curvæ reſpondentia elementis NR, RP: producatur RL ad O, ita ut LO infinite parvum ſit reſpectu RL. Ductis NO, FO, erit, ex natura *Minimi*, reſiſtentia in Zonam ex converſione elementi curvæ NLF (quod ut duas lineolas rectas NL, LF conſidero,) factam æqualis reſiſtentiæ in Zonam ex converſione lineolarum NO, OF, adeoque reſiſtentia Zonæ NL — reſiſt. Zonæ NO = reſiſtentiæ Zonæ FO — reſiſt. Zonæ FL. Jam vero, aſſumta hypotheſi communi, qua & NEWTONUS utitur p. 325 ſeqq. * nimirum reſiſtentiam obli-

* Phil. Natur. Princip. Mathem. Lib. II. Sect. VII. Prop. 34.

obliquam in NL eſſe ad reſiſtentiam directam in NR, ut NR^2 ad NL^2; exprimentur reſiſtentiæ elementorum curvæ, ex. gr. ipſius NL, per $NR^3 : NL^2$, adeoque reſiſtentia Zonæ NL per $MN \times NR^3 : NL^2$. Hinc igitur $MN \times NR^3 : NL^2 - MN \times NR^3 : NO^2 = MR \times RP^3 : FO^2 - MR \times RP^3 : FL^2$. Sunt autem OT, LS diffetiæ ipſarum NO, NL, & LF, OF harum reſpectu incomparabiles, ideoque $MN \times NR^3 : NL^2 - MN \times NR^3 : NO^2$ tantumdem quod $2\, MN \times NR^3 \times TO : NO^3$; & $MR \times RP^3 : FO^2 - MR \times RP^3 : FL^2$ tantumdem quod $2\, MR \times RP^3 \times LS : FO^3$. Hoc igitur illi eſt æquale. Et diviſis per $2\, NR^3$ & $2\, RP^3$ (quæ per hyp. ſunt æqualia) provenit $MN \times TO : NO^3 = MR \times LS : FO^3$. Ut autem TO, LS, incomparabiles cum reliquis, eliminemus; obſervo quod, propter triangula ſimilia, $NO : RO = LO : TO$, adeoque $TO = RO \times LO : NO$. Et, ob eandem rationem, $LS = VF \times LO : FO$. Subſtitutis itaque hiſce valoribus loco TO & LS, & diviſis per communem LO, habebimus æquationem elementis conſtantem $MN \times RO : NO^4 = MR \times VF : FO^4$ affectam ſuis reſpective applicatis. Unde concludo curvam quæſitam BFN ejus eſſe naturæ, ut ſuppoſitis elementis applicatarum æqualibus, applicata quævis multiplicata per reſpondens elementum abſciſſæ, & diviſa per biquadratum elementi reſpondentis curvæ, producat quantitatem conſtanti æqualem. Quæ ergo conſtans, ſervata lege homogeneorum, ſumatur ad lubitum. Hinc ſi BM vocetur x; MN, y; NR, RP, &c. dy; RO, dx; NO $[\sqrt{(dx^2+dy^2)}] = ds$; fiet $ydx : ds^4 =$ huic aſſumtæ quantitati conſtanti & homogeneæ $a : dy^3$; quæ reducta dat hanc æquationem differentialem primi gradus $ydy^3\, dx = ads^4$, quæ curvæ quæſitæ naturam exprimit. Ubi notandum, proprietatem hujus curvæ a Dn. NEWTONO ſine analyſi & ſine demonſtratione traditam p. 327, ſi reſolvatur in æquationem, eandem omnino dare quam hic inveni. Miror profecto DUILLERIUM ſuam ſimpliciorem, hanc vero perple-

xiorem dicentem; cum tamen hæc illam exhibeat facile, non vero vice verſa, niſi ſumma cum difficultate; quam ipſe ſane non facile ſuperabit, id eſt, non facile a cognita proprietate radii oſculantis ad proprietatem tangentis aſcendet; cum tamen contra, nullo labore, ex proprietate tangentis proprietas radii oſculantis innoteſcat.

Cum tamen maxima adhuc difficultas ſuperſit, ut conſtructio ex proprietate, ſeu æquatione, jam inventa eliciatur; ecce eam ſatis elegantem, quæ tantum ſupponit Logarithmos: Nempe ad axem CE (*Figur.* 2.) deſcribantur duæ curvæ, una algebraica DAH, altera tranſcendens IK; hac lege, ut poſita abſciſſa CE, m; applicata illius EH ſit $= m^3 : aa + 2m + aa : m$, applicata vero hujus EK ſit $= 3m^4 : 4a^3 + mm : a - lm$ [poſito lm ſignificare log. ipſius m,] erunt KE, EH, coordinatæ curvæ quæſitæ. Ad quam igitur conſtruendam aliud nihil opus eſt, quam ut ad CM, applicatis parallelam, tanquam ad axem, ducatur & producatur perpendicularis KM in N, ita ut MN ſit $=$ EH; puncta enim N erunt in curva quæſita BN, quæ nempe circa CN converſa producit ſolidum, in quod ſi moveatur ſecundum plagam axis CM, fluidum faciat reſiſtentiam minimam. *Q. E. F.*

TAB. XIV. N°. LIV. *Fig.* 2.

Et curvæ † æquatio tranſcendens exponentialis erit, $m^{4a^3\,la} = a^{3m^4 + 4aamm - 4a^3x}$ Ubi la ſignificat logarithmum ipſius a.

Ex P. S. *ejuſdem.* Dum poſteriores haſce lineas ſcribo, Tuas ſecundas litteras cum adjunctis ſchedis accipio. Percurrens obiter ultimam plagulam ſcripti DUILLERII reperio conſtructionem, quæ cum mea nonnihil affinitatis habere videtur. Sed eam examinare jam non licet; certus ſaltem ſum, quod eam non inveniſſet ex ſua ſolutione, niſi *Newtoniana* proprietate adjutus; quod patuiſſet, ſi methodum, qua ad eam pervenit, adjeciſſet. Cæterum vides quam brevi tempore, quam promte hæc omnia expedierim. Triduum enim eſt, quod tuas priores cum chartis *Fatianis*, quæ hiſce meis anſam

† IK, Vid. Num. LVI. ſub finem.

anſam dederunt, accepi. Miror vero operam ingentem quam FATIUS huic problemati impendit, non tantum deſcribendo in ampliori, ut vocat, charta, ſed & calculando integram Tabulam. Ut jam ipſi propria verba reddi poſſint. Nam *e veſtigio in arenam deſcendi*, etſi *Problema* fuerit, *cui ſolvendo Autor opportunum otium nactus fuit, cui tractando diu inſudavit, quod amavit & ardentiori ſtudio proſecutus fuit, quod mihi hactenus ignotum in libro delituit. Id me interim paratum corripuit, quamvis ideo propria ſtudia non deſeruerim:* quod & ipſe potuiſſet facere, ſi adeo, ut aſſerit ipſe, methodos noſtras in poteſtate habuiſſet.

N°. LV.

DOMINI MARCHIONIS HOSPITALII

Facilis & expedita Methodus inveniendi Solidi rotundi, in quod, ſecundum axem motum, minor fiat a reſide fluido reſiſtentia, quam in quodvis aliud ejuſdem longitudinis & latitudinis.

DONO miſit ad me nuper D. FATIO librum ab ipſo *de murorum inclinatione, fructiferas ad arbores ſuſtinendas, benigniorique Soli oſtendendas aptiſſima*, Londini recens editum; ad calcem cujus reperi ſolutionem Problematis, de *Solido rotundo in quod minima fiat reſiſtentia.* Hujus autem Solidi affectionem jamjam unam notaverat Doctiſſimus NEWTONIUS, pag. 327 * exquiſiti Libri ſui, *de Philoſophia naturalis principiis Mathematicis;* cujus inveniendæ artificium cum illic celatum ſit, nil ex ea lucis ſperandum eſſe Clariſſimus FATIO exiſtimat. Ut ut ſit, quam hic detexit, ejuſdem Curvæ proprietas, viam eum a *Newtoniana* diverſam iniviſſe liquido monſtrat. Atque hinc id conſilii mentem ſubiit; ut hanc ſagaciſſimi NEWTONII viam exquirerem; nec ſpe (ut reor) vana, cum eandem, quam ille, fuerim aſſecutus affectionem Curvæ quæſitæ. Perfacilis autem Methodi, qua uſus ſum, eo lubentius copiam facio, quod ea ſolvendis aliis quamplurimis ejuſmodi quæſtionibus inſervire poſſit. Sit igitur

Acta Erudit. Lipſ. 1699. Aug. pag. 354. *Memoires de l'Acad. Royale des Sciences de* Paris. 1999 pag. 107. Ed. de Paris. pag. 147. Ed. de Holl.

PROBLE-

* Lib. II. Sect. VII. Prop. 34. ſchol.

PROBLEMA.

TAB. XIV. N°. LV. *Fig.* 1. *Invenire Curvam DM, quæ circa axem AL rotata, deſcribat ſuperficiem Solidi, quod in fluido quieto motum ſecundum axis directionem ab L verſus A, minorem patiatur reſiſtentiam, quam Solidum quodvis aliud, per eadem puncta D & M pari ratione deſcriptum, inibique ſimillime motum.*

Fig. 2. Solutio. Fingantur rectulæ MN, NO, quaſi latera duo Polygoni infiniti-lateri quod conſtituit Curvam quæſitam. Tum ordinatim applicatis MP, NQ, ad axem AL, huic parallela fiat GNF, cui ad angulos etiam rectos occurrant OG & MF, ut & recta DM lateri MN.

His ita paratis, conſtat rectulas MN & MF, ſecundum axis directionem motas ab L verſus A, iiſdem a fluido reſiſtentiæ viribus impediri, quæ actionis eſſent fluidi hujus, in eas quietas pari velocitate moti ab A verſus L. Atqui, hoc in caſu, vis ſeu niſus fluidi propellentis FM ab A verſus L, eſſet ad niſum ejuſdem prementis MN ab M verſus D, ut MD ad DP. Præterea, niſus hic ſecundum MD eſſet etiam ad ejuſdem fluidi niſum in MN ab A verſus L, ut MD ad DP. Ergo, ordinatim multiplicando, vis ſeu niſus fluidi propellentis FM, ab A verſus L, eſſet ad eum quo premit MN ad eaſdem partes, ut DM^2 ad DP^2; vel ut [ob ſimilia triangula DPM & MFN] MN^2 ad FM^2. Unde ſi fluidi, in rectas MN & MF impacti, velocitas exprimatur per conſtantem AB [a]; palam fit, totum fluidi niſum in planam & perpendiculariter obviam ſuperficiem, deſcriptam ab FM rotata circa AL, æquari producto ex hac ſuperficie per velocitatem a, ſeu (aſſumpta c in circuli peripheriam, cujus radius ſit a) producto $c \times MF \times MP$. Ergo ſi fiat MN^2 ad MF^2 ut $c \times MF \times MP$ ad $c \times MF^3 \times MP : MN^2$: quartus hic terminus vim etiam exprimet fluidi prementis ab A verſus L ſuperficiem, quam pariter deſcribit MN rotata circa AL; vel (quod eodem recidit) quantitas $c \times MF^3 \times MP : MN^2$ eam ipſam exhibebit reſiſtentiam, quam ſuperficies hæc, reipſa partes ad contrarias mota, patitur a reſide fluido. Eadem ratione conſtabit reſiſtentiam ſimilem, quam ab eodem fluido patitur ſuperficies orta ex rotato latere NO circa AL, indicari per $c \times OG^3 \times NQ : NO^2$.

Jam vero, fictis punctis M, O, & recta GF, quaſi poſitione datis in eodem plano cum axe AL; inquiro, quod debeat eſſe punctum N rectæ GF, in quo ſi conveniant rectulæ MN & ON, ſuperficies ex iiſdem circa AL rotatis orta minimam patiatur reſiſtentiam, ſive minorem, quam ſi concurſus earum fieret in alio quovis puncto rectæ GF.

Hoc

Hæc autem ut inveniatur punctum N; ſint conſtantes $MF = m$, $MP = f$, $OG = n$, $NQ = g$; & variabiles $FN = v$, $NG = t$: ac proinde etiam $MN^2 = mm + vv$ & $NO^2 = nn + tt$, ob triangula rectangula MFN & OGN. Ergo reſiſtentia $[c \times MF^3 \times MP : MN^2]$ qua ſuperficiem, ortam ex rotato latere MN circa AL, impediri mox inventum eſt, erit $= cm^3 f : (mm + vv)$; Item & altera $[c \times OG^3 \times NQ : NO^2]$ quam ſimiliter patitur ſuperficies, pari ratione orta ex latere NO, erit $= cn^3 g : (nn + tt)$. Unde, & ex Problematis conditionibus, ſequitur, quantitatem $cm^3 f : (mm + vv) + cn^3 g : (nn + tt)$ debere eſſe *minimum*; adeoque [juxta doctrinam Libri *Analyſeos infinite parvorum*] differentiam ejus æquandam eſſe zero: Quod ſi fiat, invenientur $2cm^3 fvdv : (mm + vv)^2 = -2cn^3 gtdt : (nn + tt)^2$ atque hinc, cum ex FG $[v + t]$, ob fixa puncta M & O conſtante, fluat $dv = -dt$, erit etiam $m^3 fv : (mm + vv)^2 = n^3 gt : (nn + tt)^2$ Ergo ducta $AB = a$, perpendiculari ad axem AL, cum BC & BH parallelis ad infiniti-lateri polygoni latera MN & NO; erit $4 AB^2 \times AC : BC^3 = BC : MP$, Ac etiam ſimiliter $4 AB^2 \times AH : BH^3 = BH : NQ$. ſiquidem his ita poſitis, habebitur $m^3 fv : (mm + vv)^2 = a : 4 = n^3 gt : (nn + tt)^2$.

Conſtat igitur indolem, ſeu naturam hanc eſſe Curvæ quæſitæ DM, ut aſſumta $AB = a$ in AK perpendiculari ad axem AL, ductaque BC parallela tangenti Curvam in quovis puncto M, ſemper & ubique $4 AB^2 \times AC : BC^3 = BC : MP$, applicatam hoc in reſpondenti puncto M. TAB. XIV. N°. LV. *Fig.* 1.

Et vero cum hæc affectio Curvæ, tangentibus innixa tantum, primas duntaxat differentias in ejuſdem expreſſione requirat; nullatenus crediderim, quod aſſerit D. FATIO, hac ſimpliciorem eam eſſe quam ipſe protulit, quæ nimirum oſculi radios comprehendens, ſecundas differentias adhibet, ubi primæ nobis ſufficiunt. His adde, ex affectione mox inventa, Curvæ conſtructionem ultro fluere a ſola Hyperbolæ quadratura dependentem; quo ſane nil ſimplicius hac in quæſtione poteſt haberi. Sic autem Curva hæc conſtruitur.

Aſſumantur $AB = a$ in AK perpendiculari ad axem AL, & $AE = \sqrt{\frac{1}{3} aa}$ in AL producta ad partes A; ſitque per E deſcripta Logarithmica FEN, cujus aſymptotus AK, & ſubtangens $= \frac{1}{4} a$; præterea, ponatur AC magnitudinis ad libitum, quam appello z, ducaturque CN, parallela ad AK, uſque ad occurſum cum Logarithmica in N. Tum ſi fiat $AK = aa : 4z + \frac{1}{2} z + z^3 : 4aa$, & $AP = zz : 4a + 3z^4 : 16a^3 - \frac{5}{48} a \pm CN$, nimirum $-CN$ cum eſt

$AC > AE$, & $+ CN$ cum eſt $AC < AE$; perficiaturque parallelogrammum KP; angulus ejus M, ſeu concurſus laterum KM & PM, erit ad Curvam quæſitam DM.

Nam manente $AC = z$, ſi fiant inſuper $AP = x$, & $PM = y$; affectio mox inventa Curvæ dabit AK ſeu PM $[y] = (a^4 + 2aazz + z^4) : 4aaz$, ac proinde etiam $dy = \frac{1}{2}dz + 3zzdz : 4aa - aadz : 4zz$. At ſiquidem (*hyp*) BC eſt parallela tangenti in M, eſt quoque $dx = zdy : a = zdz : 2a + 3z^3 dz : 4z - adz : 4z$, ejuſque integralis $AP [x] = zz : 4a + 3z^4 : 16a^3 - \int(adz : 4z)$ + vel — conſtanti alicui quantitati $\frac{5}{48}a$; qua fit, ut evaneſcente CN, integrali nempe differentiæ $\mp adz : 4z$, evaneſcat & ipſa AP $[x]$. Ergo &c.

Hic porro notare juvat, Curvam DM axi AL propiorem eſſe nequire, quam in puncto D ſui concurſus cum AK. Aſt ubi fit AC minor quam AE; alia Curvæ pars deſcribitur DO concavitatis averſæ: adeo ut ſolidum quæſitum, concavum æque poſſit ac convexum eſſe; quod, inquam, notatu dignum videtur. Atque hinc, cum in iſtius conſtructione Curvæ Dn. FATIO aſſumat $AE = a$, & AC majorem ſemper quam AE; ſequitur punctum, quod in Curva primum ſtatuit, non omnium ejuſdem axi proximum eſſe, ſolamque partem ejus convexam ab hoc *Authore* deſcribi.

Cæterum monuiſſe ſufficiat, ſpatii ADMP quadraturam, citra ullam ab Hyperbolæ quadratura dependentiam facile reperiri. Verum ab hac eadem quadratura pendent rectificatio Curvæ DM, dimenſio ſuperficiei ab ea circa axem rotata genitæ, & menſura reſiſtentiæ qua ſuperficies hæc impeditur a fluido. Quod autem hic de arcu DM, idem etiam ſit dictum de altera Curvæ parte DO.

TAB. XIV. N°. LV. *Fig.* 3.

SCHOLIUM. Nunc quidem conſtat, Curvæ mox inventæ [quæ hic eſt ABCD] latera duo minima quæcunque AB, BC, convenientia in puncto B rectæ KN, parallelæ ad axem LP, circa eundem rotata deſcribere ſuperficiem minori objectam reſiſtentiæ, quam ſi occurrerent ea ſibi in alio quovis iſtius rectæ puncto. At non id æque patet de ſuperficie orta ex ſimili rotatione trium quorumvis ejuſdem Curvæ laterum AB, BC, CD, convenientium in punctis B, C, rectarum axi LP parallelarum NK, MH, fixis manentibus punctis extremis A & D; nimirum ſuperficiem hanc impediri minus a fluido, quam ſi alibi his in rectis eadem latera convenirent. Ne autem quis, hac in re, vel minimum hæreat, en hujus etiam demonſtrationem, quæ & ſuperficiei ex quotvis ejuſdem Curvæ lateribus ſimili ratione genitæ conveniat.

Iiſdem igitur poſitis, quæ videntur in *fig.* 3, ſint conſtantes AK = m,

m, BH $= n$, DM $= p$, AP $= f$, BQ $= g$, CR $= h$; & variabiles BK $= v$, CH $= t$, CM $= s$. Conſtat, ex ſuperioribus, reſiſtentias quæ fiunt in latuſcula AB, BC, CD, exprimi per $cm^3 f : (mm + vv)$, $cn^3 g : (nn + tt)$, $cp^3 h : (pp + ss)$; adeo ut quantitas $cm^3 f : (mm + vv) + cn^3 g : (nn + tt) + cp^3 h : (pp + ss)$ debeat eſſe *minima*, ejuſque differentia $2cm^3 fvdv : (mm + vv)^2 + 2cn^3 gtdt : (nn + tt)^2 + 2cp^3 hsds : (pp + ss)^2 = 0$. At, juxta Curvæ mox deſcriptæ affectionem, ſuperius inventam, eſt $\frac{1}{4} a = m^3 fv : (mm + vv)^2 = n^3 gt : (nn + tt)^2 = p^3 hs : (pp + ss)^2$. Ergo ſi harum ſingularum quantitatum loco, ponatur conſtans valor earum $\frac{1}{4} a$, fiet $cdv : 2a + cdt : 2a + cds : 2a = 0$, requiſitum videlicet, ut ſuperficies, orta ex rotatione circa axem trium ejuſdem Curvæ laterum AB, BC, CD, minimam a fluido reſiſtentiam patiatur. Atqui hoc ita eſſe liquet, ex eo quod NK $[v + t + s]$, ob fixa puncta A & D conſtans, differentias habeat $dv + dt + ds = 0$, ſive $dv + dt = - ds$. Ergo &c.

Hæc utique demonſtratio pari ratione convenit quatuor, quinque, imo quot volueris lateribus Curvæ mox deſcriptæ; atque ita tandem hæc ipſamet eſt quæ quæritur, hiſque Problema cumulate ſolvitur.

N°. LVI.

JOHANNIS BERNOULLI

De Solido rotundo minimæ reſiſtentiæ,

Addenda iis quæ de eadem materia habentur in Actis Anni *ſuper. Menſ.* Novembr.

LÆtus intellexi meam hujus Problematis ſolutionem non parum placuiſſe Eruditis, nec eos ſe melius *Fatianæ* ſolutionis perplexitatem agnoſcere potuiſſe, quam perſpecta demum meæ brevitate & ſimplicitate. Quandoquidem autem Conſtructionis analyſis (quam tamen in Epiſtola expreſſeram) in excerptis fuerat omiſſa: eam rogatus lubentiſſime communicabo, & ne quid minimum ad plenariam hujus curvæ cognitionem deſideretur, unum alterumve annotabo.

Acta Erud. Lipſ. 1700. Mai. pag. 208.

Perveneram ad æquationem differentialem primi gradus hanc $ydy^3 dx = ads^4$, quam dixi curvæ quæſitæ naturam exprimere: Ut igitur ejuſdem Conſtructionis rationem detegam; ſubſtituatur valor ipſius ds, qui eſt $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ut habeatur $ydy^3 dx = adx^4 + 2adx^2 dy^2 + ady^4$; jam vero, cum indeterminatarum differentiæ ſint implicatæ; ad ſeparationem inſtituendam, tranſmutatione quadam opus eſt, quam ſæpe in intricatiſſimis caſibus feliciter adhibeo. Ponatur itaque $dx = mdy : a$ [id eſt, mdy diviſum per a; qua diviſionis expreſſione, exemplo Celeb. LEIBNITII, ad facilitandam Typothetæ operam, nunc iterum & in poſterum utar *], quo ſurrogato in æquatione, eaque poſtea diviſa per dy^4, prodibit æquatio algebraica hæc $aamy = m^4 + 2aamm + a^4$, adeoque $y = m^3 : aa + 2m + aa : m$ & $dy = 3mmdm : aa + 2dm - aadm : m^2$. Hinc $mdy : a$ ſeu $dx = 3m^3 dm : a^3 + 2mdm : a - adm : m$. Sumtis igitur horum integralibus, erit $x = 3m^4 : 4a^3 + mm : a - lm$. Sic igitur inventi ſunt valores coordinatarum x & y expreſſi per duas quantitates, unam tantum communem indeterminatam m involventes: Unde illa quam dedi in *Actis* reſultat conſtructio. Notandum autem (quamvis ad rem ipſam parum faciat,) curvam IK male eſſe repræſentatam; ea enim cum recta CE non concurrit, ſed eodem fere modo quo curva HAD poſtquam aliquouſque ad CE appropinquavit, ab ea iterum recedit in infinitum, & magis magiſque accedit rectæ CM, quæ proinde communis eſt aſymtotos curvarum IK & DAH, hujus ad dextram, illius ad ſiniſtram communis axis CE. Animadverſione dignum eſt, duas illas curvas, licet diverſiſſimæ naturæ, unam quippe algebraicam, alteram tranſcendentem, ita tamen inter ſe conſpirare, ut ad axem ſuum communem CE accedere ſimul deſinant, vel ab eo recedere ſimul incipiant, id eſt, ut utriuſque curvæ punctum axi CE proximum æqualiter a recta CM diſtet; ſumta enim $CE = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, erunt & EK, & EH omnium

TAB. XIV. N°. LIV. *Fig.* 2.

* Eam ſemper in hac Editione, quia jam uſu invaluit, adhibuimus.

nîum ſuarum reſpective applicatarum minimæ & quidem minima EH erit $= \frac{16}{9} a\sqrt{3}$; & (poſito a pro unitate, ita ut $la = 0$) erit minima EK $= \frac{5}{12}a - l(a\sqrt{\frac{1}{3}})$, quæ quantitas eſt affirmans, quia logarithmus numeri unitate minoris, $l(a\sqrt{\frac{1}{3}})$ eſt quantitas negativa, quæ per conſequens negata vertitur in affirmantem.

Hic ſimultaneus curvarum acceſſus proximus, rationem jam manifeſtat, cur quæ ex illis conſtruitur curva ſolidi rotundi minimæ reſiſtentiæ BN, duas habeat partes convexitates ſibi mutuo obvertentes (quo fere modo ab Aſtronomis ſignum arietis vulgo pingitur) & deſinentes in acumen, quod punctum *reverſionis* appellare ſoleo (*point de rebrouſſement*) diſtans a CM intervallo quod eſt æquale minimæ applicatæ EH. Quam curvæ reverſionem eleganter etiam obſervatam video ab Illuſtriſſimo *Marchione* HOSPITALIO in *Actis ejuſdem Anni menſis Auguſti*, quanquam ex ejus conſtruendi modo non tam manifeſte ea appareat. Interim noſtræ ſolutiones mirifice conſentiunt; nec aliud in conſtruendi modo diſcrimen eſt, quam quod Illuſtriſſimus Vir syntheſi magis uſus fuerit quam analyſi; ut pote in animo habens proprietatem curvæ ab Acutiſſimo NEWTONO jam traditam, ad quam collineavit, ut oſtenderet ſuam æquationem (vid. pag. 313) $m^3 fv : (mm + vv)^2 = n^3 gt : (nn + tt)^2$, reſolvi poſſe in proportionem *Newtonianam* $4\,AB^2 \times AC : BC^3 = BC : MP$; loco quod ego mere analytice, ſine ullius proprietatis ab alio jam præinventæ auxilio, ad quæſitum pervenerim.

Cæterum coordinatæ ab Illuſtr. Viro aſſignatæ $aa : 4z + \frac{1}{2}z + z^3 : 4aa$ & $z^2 : 4a + 3z^4 : 16a^3 - 5a : 48 \pm$ CN ſunt ſimillimæ meis, inverſo terminorum ordine $m^3 : aa + 2m + aa : m$ & $3m^4 : 4a^3 + mm : a - lm$; niſi quod quantitatem conſtantem, brevitatis gratia, neglexerim; quippe quæ in ipſa curva nihil mutat præter ſitum: ſic ut ſecundum axem ſuum retrorſum antrorſumve magis promoveatur, ea ipſa quantitate conſtante & arbitraria, quæ affirmative vel negati-

gative; pro lubitu, aſſumi poteſt: præterea quod mihi in expreſſione coordinatarum eſt a & m, id Illuſtr. *Marchioni* eſt $\frac{1}{4}a$ & $\frac{1}{2}z$: hoc exinde venit, quod NEWTONI proportionem $4AB^2 \times AC : BC^3 = BC : MP$ ſecutus, poſuerit $m^3 fv : (mm + vv)^2 = \frac{1}{4}a$, cum tamen ſi feciſſet $AB^2 \times AC : BC^3 = BC : MP$ (quæ proportio non minus convenit curvæ, quam illa cujus primus antecedens hujus primi quadruplus eſt, imo alius quivis multiplus æque ſatisfaceret;) potuiſſet ponere ſimpliciter $m^3 fv : (mm + vv)^2 = a$; quod ſi fuiſſet factum, ad meas omnino perventum fuiſſet expreſſiones; quæ, quod careant iſta inutili ſubquadruplicitate, quodam modo ſimpliciores ſunt: profecto neſcio cur Vir Illuſtr. vel ante eum ingenioſiſſimus NEWTONUS ſumendo $4\,AB^2$ potius quam ſimplex AB^2 voluerint entia multiplicare præter neceſſitatem.

TAB. XIV. N°. LV. *Fig.* 1.

Quod porro attinet ad figuram curvæ, elegantiſſime eam delineatam dedit Illuſtr. HOSPITALIUS, (vid. ejus *Fig.* 1) ſciendum tamen eſt, utramque curvæ partem DM & DO, ab utroque axe AL & AK magis ac magis removeri diſtantia quavis data majori, quod notari velim, ne quis putet partem DO, prout in Schemate exhibetur, in infinitum continuatam non niſi ad certum intervallum ab AK diſcedere.

Augulus quem curva DM, DO, in puncto reverſionis D facit cum axe conjugato AK, triens eſt anguli recti, adeoque complementum, ſeu duo trientes recti, erit inclinatio curvæ maxima & minima ad axem AL; nimirum maxima partis DM, minima vero partis DO: quod alicujus uſus eſſe poteſt in re nautica; quod ſi enim navis conſtrueretur ſecundum curvaturam DM, patet utique ambo proræ latera cum axe navis non poſſe majorem angulum capere quam ad ſummum 60 grad. Si vel tantillo major eſſet, jam non facillime aquam ſulcaret, inter omnes naves quæ ejuſdem eſſent amplitudinis & longitudinis. Monendum hic eſt non tantum convexam ſuperficiem a curvæ parte DM, vel concavam a parte DO, rotatis circa axem AL deſcriptas, minimam pati reſiſtentiam a fluido; ſed etiam perinde eſt ſi

illius

illius ſumatur ſuperficies concava & hujus convexa. Illæ enim ſuperficies, ſive a P verſus A, ſive ab A verſus P moveantur, fluidum utrovis modo ſimiliter & æquali vi illis reſiſtit.

Veriſſimum eſſe deprehendo, quod Generoſus *Marchio* dicit, ſpatii ADMP quadraturam, citra ullam ab Hyperbolæ quadratura dependentiam facile reperiri: At quod idem etiam affirmet de ſolidi, ab hoc ipſo ſpatio circa axem rotato deſcripti, *cubatura*, ſeu potius *cylindratura*, non nihil feſtinantius pronunciavit; ſi revidere dignetur, comperiet eam citra Hyperbolæ quadraturam haberi non poſſe.

In excerptis litterarum mearum in fine † habentur hæc verba: *Et curva æquatio tranſcendens exponentialis erit*, *&c.* Supple, *Et curva IK* &c. Modum perveniendi ad hanc æquationem exponentialem, ſeu ut mihi etiam dicitur *percurrentem*, pariter rogatus hic pando: Quoniam EK, ſeu CM, ſeu $x = 3m^4 : 4a^3 + mm : a - lm$; multiplicata per $4a^3$, & deinde reducta, habebitur $4a^3 lm = 3m^4 + 4aamm - 4a^3 x$; cujus membrum prius $4a^3 lm$ eſt quantitas logarithmica; alterum vero cum ſit quantitas ordinaria, ut pariter logarithmicæ formam induat, multiplico totam æquationem per logarithmum aliquem conſtantem, qui uniformatis litterarum gratia, ſit la [jam vero pro unitate alia quævis quam a ſumenda eſt, alias foret $la = 0$] erit itaque $4a^3 la . lm = (3m^4 + 4aamm - 4a^3 x) la$; at cum æqualium logarithmorum æquales ſint numeri, ſumtis hujus æquationis quantitatibus numeralibus, ſecundum geneſin & regulas logarithmorum, proveniet hæc æquatio percurrens ſeu exponentialis $m^{4a^3 la} = a^{3m^4 + 4aamm - 4a^3 x}$ prout in *Actis* habetur. Si jam pro la, quæ eſt quantitas determinata, ponas b, æquatio libera erit a logarithmis, & referri debet in cenſum pure percurrentium, de quibus fuſius egi in *Actis An.* 1697. *m. Martio.* *

† pag. 31?

TAB. XIV. N°. LIV. Fig. 2.

Occaſione id ferente, ingratum non erit, ſi hic oſtendero,

* Supra N°. XXXVI.

ro, quam latum uſum habeat illa tranſmutandi methodus, qua ſtatim uſus ſum pro conſtructione æquationis differentialis $ydy^2 dx = ads^4$, ſeu $ydy^2 dx = adx^4 + 2adx^2 dy^2 + ady^4$; ne quis itaque arbitretur, eam pro hoc ſpeciali exemplo tantum ſuccedere, neve temere me dixiſſe, in intricatioribus, feliciter eam poſſe adhiberi: Dico, omnis æquatio differentialis, in qua alterutra indeterminatarum deficit, hac methodo conſtruibilis eſt; nec refert qualicunque modo differentiales dx, dy, & altera indeterminata x, vel y, earumque poteſtates, quot & quotæcunque inter ſe fuerint implicatæ: quo ſane neſcio, an unquam generalius quid fuerit traditum, in hoc abſtruſo differentialium implicatarum ſeparationis negotio, quod unicum eſt adhuc, cujus perfectio pro univerſali hujuſmodi æquationum conſtructione deſideratur. Methodus autem, de qua ſermo, ita habet: ſi ex. gr. deficiat x, ponatur $dx = mdy : a$, quo ſubſtituto in æquatione propoſita loco dy, manifeſtum eſt, æquationem inde ortam diviſibilem fore per aliquam poteſtatem ipſius dy, ita ut, præter quantitates ordinarias, in æquatione nihil habeatur; unde inter m & y proveniet æquatio pure algebraica, exprimens naturam alicujus curvæ pariter algebraicæ, cujus abſciſſæ y, & ſpatia curvæ iſtis reſpondentia [$\int mdy$] diviſa per conſtantem a, dabunt coordinatas curvæ quæſitæ pro conſtructione æquationis differentialis propoſitæ. Ut rem exemplo illuſtrem, eſto hæc æquatio $y^3 dx^5 + aa\, ydx^4 dy = a^3 dy^5$, quæritur conſtructio curvæ æquationi reſpondentis: Fiat $dx = mdy : a$, quod ſurrogetur in æquatione, & habebitur $y^3 m^5 dy^5 : a^5 + ym^4 dy^5 : aa = a^3 dy^5$; & diviſa per $dy^5 : a^5$ proveniet æquatio algebraica $y^3 m^5 + a^3 y m^4 = a^8$.

TAB. XIV. N°. LIV. *Fig.* 2. Facta itaque huic æquationi convenienter curva algebraica IK in qua CM, y; MK, m; fiat MN æqualis ſpatio CMKI diviſo per conſtantem a, vel ſimpliciter fiat MN ubique in ratione ſpatii CMKI, dico punctum N fore in curva optata. Alias, quæ mihi ſunt, regulas pro perfectione methodi tangentium inverſæ, cum ſint extra inſtitutum, hic omitto, partim jam alibi datas, partim forte adhuc dandas.

N°. LVII.

DEMONSTRATIO THEOREMATIS LEIBNITIANI

Vires vivas eſſe in duplicata ratione celeritatum.

COncipe corpus C moveri oblique in elaſtrum L, velocitate CL, ut 2, angulo inclinationis CLP exiſtente 30 grad. cujus nempe ſinus eſt ſemiſſis radii CL. Suppono autem eam eſſe reſiſtentiam in elaſtro, ut ad illud tendendum requiratur præciſe unus velocitatis gradus in illo corpore, ſi perpendiculariter impingeret. Quid ergo jam fiet poſt incurſionem obliquam corporis in elaſtrum L? Quoniam motus per CL componitur, ut notum eſt, ex duobus collateralibus per CP, & PL; & cum CP, ſecundum quam corpus directe impingit in elaſtrum L, exprimat dimidiam celeritatem corporis per CL, conſumetur hic motus per CP, tenſo elaſtro, [perinde enim eſſet, ac ſi Corpus C, celeritate CP, perpendiculariter incurreret in elaſtrum, quod, per hypotheſin, eam celeritatem deſtruere poteſt] remanente corporis celeritate & directione PL. Producta igitur PL in M, ita ut LM ſit $= PM = \sqrt{3}$ [ponitur enim $CL = 2$], & applicato in M alio ſimili elaſtro faciente cum LM angulum LMQ, cujus ſinus $LQ = CP = 1$; per eandem rationem manifeſtum eſt corpus C, poſt tenſionem elaſtri L, tenſurum eſſe elaſtrum M, amiſſo motu per LQ, & ſervato motu per QM. Prolongata itaque QM ad N, ut fiat $MN = QM = \sqrt{2}$; ibique ſubſtituto elaſtro ſimili tertio conſtituente eum MN angulum MNR ſemi-rectum, quo ſcilicet MR iterum ſit $= CP = 1$; patet ſimiliter, motum per MR totum impendi in tenſionem elaſtri N, corpore interim moveri pergente directione & celeritate $RN = 1$. Denique ſi hac celeritate reſidua impingat perpendiculariter in elaſtrum O, huic flectendo totam ſuam vim reliquam dabit: ipſum

WOLF. *Elementa. Matheſeo univerſæ* El. Mechanicæ. cap. VII. §. 327. Tom. II. pag. 62. Edit. Genev.

ipſum itaque corpus ad quietem redigetur. Hiſce ita præmiſſis, patet nunc potentiam corporis C tantam fuiſſe, ut per ſe ſolum tendere poſſit præciſe quatuor elaſtra, ad quæ ſingula ſeorſim tendenda requiritur dimidia velocitas corporis æqualis ipſi C; adeoque, cum effectus illius quadruplo major ſit, quam effectus hujus, evidens eſt quoque vim corporis, velocitate 2 grad., quadruplam eſſe vis corporis ejuſdem vel æqualis, velocitate 1 gr. Haud abſimili modo demonſtrarem corpus C, velocitate 3 gr. tendere poſſe 9 elaſtra, ad quorum unum tendendum, unus velocitatis gradus in eo corpore requiritur, & tandem, in genere, numerum elaſtrorum tenſorum ſemper eſſe quadratum numeri graduum velocitatis. Unde igitur ſequetur, Vires corporum æqualium eſſe in duplicata ratione celeritatum. *Q. E. D.*

Videatur Tom. II. Nus. CXXXV.

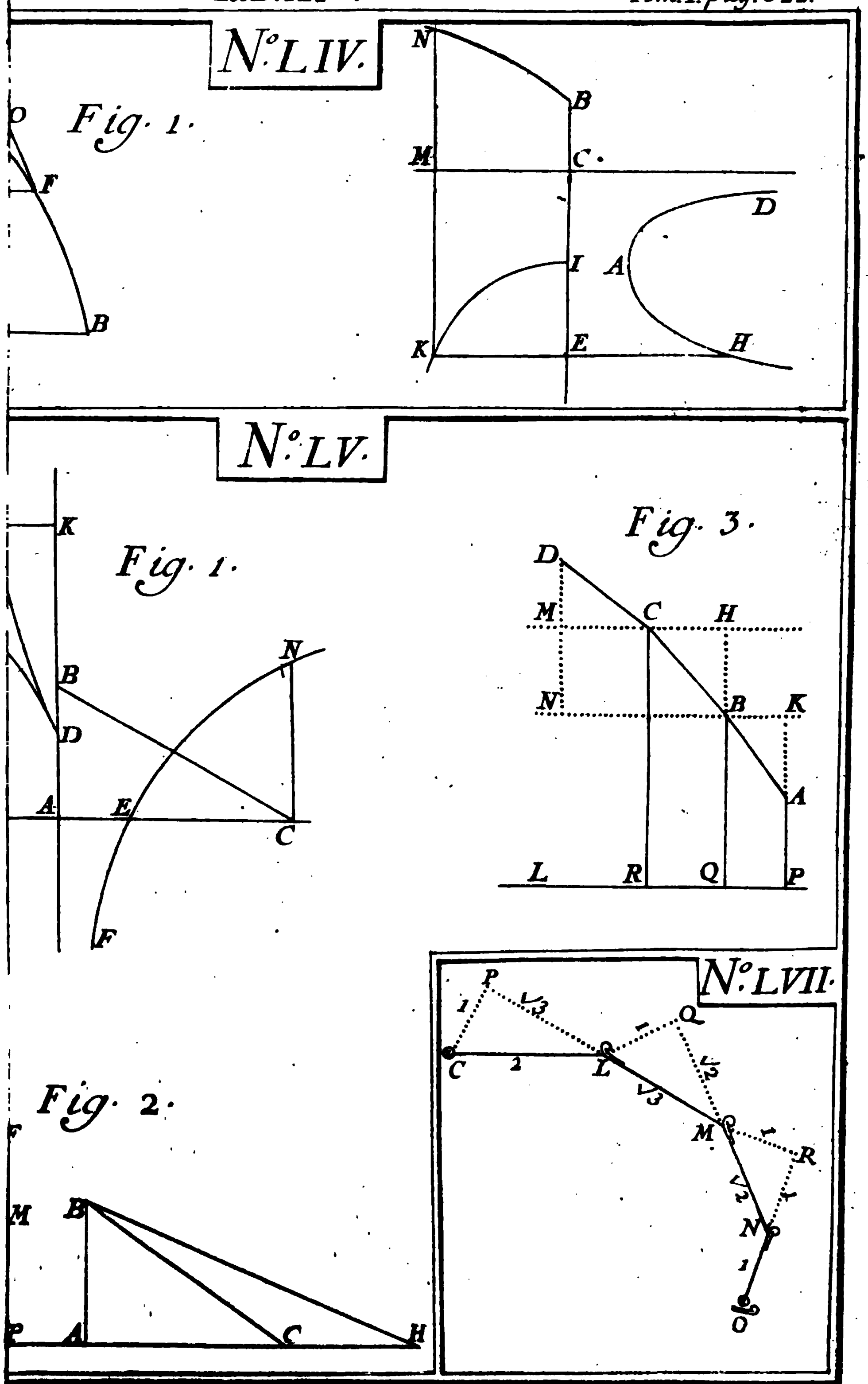
N°. LVIII.

CYCLOIDIS PRIMARIÆ

Segmenta innumera Quadraturam recipientia; aliorumque ejuſdem ſpatiorum quadrabilium determinatio: poſt varias illius fortunas nunc primum detecta
a Joh. BERNOULLIO.

Acta Erud. Lipſ. 1699. Jul. pag. 316. *Memoires de l'Acad. des Sciences de Paris.* 1699. p. 134. Edit. de Paris. p. 180. Edit. de Holl.

PRæciſe centum ſunt anni, (anno nimirum 1599, uti Author eſt TORRICELLIUS,) quod inſignis hæc Curva GALILÆO primum fuerit conſiderata, & ab eo *Cycloidis* nomen acceptum in hunc uſque diem geſſerit. Poſtea MERSENNUS, cui primam inventionem vindicant Galli, hoc velut pomum Eridos in turbam projecit; cui certatim, & ſumma animi contentione, ſe accinxere præſtantiſſimi illius temporis Geometræ, TORRICELLIUS, LALOVERA, ROBERVALLIUS, CARTESIUS, alii: unde, ut fieri ſolet, tot accen-


N°. LIV.
Fig. 1.
O
F
B
N
B
M
C
D
I
A
K
E
H
N°. LV.
Fig. 1.
K
B
D
A
E
C
N
F
Fig. 3.
D
M
C
H
N
B
K
A
L
R
Q
P
Fig. 2.
M
B
P
A
C
H
N°. LVII.
P
1
√3
Q
1
C
2
L
√2
√3
M
1
R
√2
1
N
1
O

ſæ ſunt lites, TORRICELLIUM inter præſertim & ROBERVALLIUM, qui præ aliis primarum Cycloidis proprietatum primi inventoris titulum ambientes, & ægre alter alterum in partem honoris admittentes, miſerum in modum ſe mutuo proſciderunt, atque nefandi, proh pudor! plagii inſimularunt; idque non minori vehementia, quam ſi pro patria in diſcrimine verſante militaſſent: ut videre eſt ex eriſticis hinc inde editis, exque prælonga ROBERVALLII Epiſtola expoſtulatoria ad TORRICELLIUM, prout illa habetur in *Operibus Mathematicis & Phyſicis, Pariſiis,* 1693 impreſſis; in quibus continentur inventa *Robervalliana*, nonnulla ſatis ingenioſa. Unum tamen alterumve deprehendi, ubi Author fœde paralogizat; ut mirer Editorem errores non animadvertiſſe & ſuppreſſiſſe.

Hæc vero velitatio viam præparabat, & quaſi præludebat longe acriori pugnæ non diu poſt ſubortæ, ex occaſione quorumdam problematum ſuper Cycloide, a DETTONVILIO, ſeu PASCALIO, cum annexo præmio propoſitorum; cujus fabulam toto cœlo notiſſimam ſi quis ignorat, illius Tractatum legat, ut & WALLISII *Præfationem ad Tractatum* ſuum *de Cycloide*, & quæ ad HUGENIUM, hac de re, prolixe ſcripſit. Ex eo tempore nullus extitit, qui vel tantillum ſupra Mathematicorum vulgus ſibi ſapere viſus eſt, qui ad hanc ingenii cotem ſuas vires acuere, atque novi quid exinde producere non tentaverit: interim primi quoque ordinis Geometræ non minus aſſidui ſemper fuere, in perſcrutandis quæ alii intacta imperviaque reliquiſſent.

Hinc, præter illa vulgaria dudum cognita, qualia ſunt dimenſio lineæ Cycloidis, comparatio ſpatii cum circulo, & ſolidorum variorum ex converſione ortorum cum cylindris, centrorum gravitatis determinatio, &c. alia majoris momenti & indaginis abſtruſioris poſſidemus; inter quæ merito referenda, quæ incomparabilis HUGENIUS de identitate evolutarum, deque tautochoniſmo, [a me non ita pridem breviſſi-

me demonſtrato *] primus, & poſt eum ſubtiliſſimus NEWTONUS in pereruditis ſuis Operibus † prodiderunt: quibus addi poſſent, quæ quondam Pariſiis excogitavi, quorum nonnulla *Frater* recenſet in *Actis* 1692, pag. 292 ††. At non poſtremum locum obtinet Quadratura ſegmenti recti, cujus ſubtenſa diſtat a vertice Cycloidis quarta parte axis; quod ſemi-hexagono [concinnius ego dicerem triangulo æquilatero, tantumdem enim eſt,] æquale oſtendit HUGENIUS: huic ſuperaccedit alterum illud ſegmentum obliquum, cujus quadratura Celeb. LEIBNITIUM pro primo inventore agnoſcit. Denique Brachyſtochroniſmus, ſeu celerrimus deſcenſus, noviſſime a nobis detectus †††, inter primarias Cycloidis noſtræ proprietates, nemine refragante, merito ſibi locum vendicat primum; quod & Frater agnoſcere videtur, dum eum inventorum omnium circa Cycloidem factorum quaſi coronidem, ultra quam nihil amplius ſperandum, deprædicat. (Vid. *Acta* 1697, p. 214.)

At vero non prius de palæſtra diſcedere velle videtur, quam per integrum exactum ſæculum omnia ſua exuiſſet myſteria, nobiſque pandiſſet quidquid in extremis haberet receſſibus ſuis. Prodit enim, ecce denuo, in ſcenam nobilis noſtra Curva, ſpectatoribus quaſi cum agonizante hoc ſæculo valedictura, ut tandem candide ſiſtat infinitorum ſuorum ſegmentorum, aliorumque ſpatiorum Quadraturam: quod quanti ſit, aliis judicandum relinquo, qui ſciunt Cl. WALLISIUM, limatiſſimi judicii Virum, ſegmentum illud HUGENIANUM quadrabile [quod unicum facit ex infinitis noſtris,] dignum ſatis reputaſſe, cujus primam inventionem, non uno in loco, WRENNIO ſuo pro virili aſſereret; ne ſcilicet gloriæ Anglicanæ, cujus ſtrenuum vindicem agit, aliquid decederet, quod de jure ipſi competere ratus eſt Vir perſpicaciſſimus.

Ut

* Supra N°. XLIX.
† Philos. Nat. Princ. Math. Lib. I. Sect. X. Prop. 48–53.
†† Supra N°. VIII.
††† N°. XXXVII.

Ut ad rem veniam: Sit Cyclois primaria E A G, cujus baſis EG, axis AF, circulus generator ALF: Ductæ pro lubitu duæ applicatæ IB & KD, illa a centro H, hæc a vertice A æqualiter diſtantes, determinabunt in Cycloide duo puncta B & D, quibus junctis recta BD, ductiſque LF & MF: Dico *Segmentum Cycloidicum BCDB fore quadrabile*, *æquale nimirum (in Fig. I.) ſummæ triangulorum rectilineorum LFI + MFK*, *& (in Fig. II.) differentiæ eorumdem LFI — MFK*: quod ſic demonſtro. Concipiantur ductæ HL, HM; item NAO, parallela baſi EG; & BN, DO parallelæ axi AF. Applicatis IB, KD (*Fig. I.*) exiſtentibus ad partes oppoſitas, erit ſegm. BCDB = trapezio BNOD demtis duobus trilineis ANB & AOD; Eſt autem trapez. BNOD = ($\frac{1}{2}$BN + $\frac{1}{2}$DO) in NO = [ob HI = AK] $\frac{1}{2}$HA in NO = $\frac{1}{2}$HA in NA + $\frac{1}{2}$HA in OA. Jam ex natura Cycloidis, $\frac{1}{2}$HA in NA = $\frac{1}{2}$HA in (arcum AL + rect. LI) = ſectori LHA + triang. LHF = ſectori LFA; eodem modo demonſtratur $\frac{1}{2}$HA in OA = ſect. MFA. Hinc trapez. BNOD = ſect. LFA + ſect. MFA. Quoniam vero iterum, ex natura Cycloidis, trilin. ANB = ſegm. circ. AIL, & trilin. AOD = ſegm. circ. AKM; ablatis AIL & AKM, a ſectoribus AFL & AFM, remanebunt duo triangula rectilinea LFI + MFK = trapez. BNOD — ANB — AOD = ſegmento cycloidis BCDB. *Q. E. D.* Porro applicatis IB, KD (*Fig. II.*) exiſtentibus ad partes eaſdem; ſegm. BCDB = trapez. BNOD — trilin. ANB + trilin. AOD. Jam prioribus veſtigiis inſiſtendo habetur trapez. BNOD = $\frac{1}{2}$HA in NA — $\frac{1}{2}$HA in OA = ſect. LFA — ſect. MFA; ſurrogatis igitur, loco trilineorum ANB, AOD, ipſis æqualibus ſegm. circ. AIL, AKM, prodibit ſector LFA — ſect. MFA — AIL + AKM, id eſt triang. rectil. LFI — MFK = ſegmento Cycloid. BCDB. *Q. E. D.*

TAB. V. Nº. LVIII. *Fig.* 1. *Fig.* 2.

COROLL. I. Si puncta K & I coincidunt, manifeſtum eſt, haberi [*Fig.* I.] ſegmentum rectum *Hugenianum* = triangulo æquilatero, circulo generatori inſcripto, coaleſcentibus quippe in unum triangulis LFI & MFK.

Coroll. II. Quod ſi vero puncta K, & I, in ipſum verticem & centrum cadant, prodit tunc, in utraque *Fig.* ſegmentum obliquum *Leibnitianum*, æquale ſoli triangulo LFI; altero MFK evaneſcente: quod quidem LFI tunc, ut patet, quartam efficit partem quadrati circulo generatori inſcripti.

Coroll. III. Patet etiam, ex omnibus ſegmentis quadrabilibus nullum eſſe, cujus ſubtenſa BD tranſeat infra medietatem radii AH; adeoque illorum omnium, quæ *Fig.* I. & II non comprehenduntur, quadraturas eſſe impoſſibiles.

Hæc de ſegmentis quadrabilibus Cycloidis. Ecce jam innumeros ſectores Cycloidales quadraturam pariter admittentes, curioſorum in gratiam huc referendos, ut habeant quo alant ſuam mirabilis hujus Curvæ admirationem. Si a puncto I, quod (*Fig.* III.) a centro H iterum tantumdem diſtare ſuppono, quantum diſtat punctum K a vertice A, ducantur duæ rectæ IB, ID, ad puncta B, D, in quibus applicata BKD Curvæ occurrit; item duæ aliæ rectæ FL, FM, ad puncta L, M, in quibus eadem circulum ſecat. Dico ſectorem Cycloidicum IBAD, æqualem exiſtere triangulo iſoſceli LFM. Quod quidem ad modum præcedentem tam facile demonſtrari poteſt, ut actum agere mihi viderer, ſi peculiarem pro hoc contexerem demonſtrationem. Notare hic convenit, concurrentibus punctis I & K, ſectorem BID degenerare in ſegmentum rectum Hugenii: at vero I in A, & K in H pervenientibus, mutari eundem in duo ſegmenta obliqua Leibnitii; adeo ut duplici ratione Illuſtrium horum Virorum inventa ſub generaliſſimis noſtris, tanquam ſpeciales caſus, contineantur.

Tab. XV. N°. LVIII. *Fig.* 3.

Cæterum quamvis ex omnibus ſegmentis, quæ ſubtenſam ad axem normalem habent, unicum ſit quadrabile; fieri tamen quam maxime poteſt, contra opinionem *Celebris cujuſdam Geometræ* * (vid. *Act.* 1687, p. 526.) ut infinita alia ſpatia exiſtant quadrabilia: cui aſſerto, præter ſegmenta & ſectores quos hac-

* De Tſchirnhauſen.

[illegible] fidem facient. Vocetur TAB. XV. N°. LVIII. *Fig.* 4.
[illegible] *Fig.* IV.) Jam ſi ſuma-
[illegible] ad K applicetur K D,
[illegible] M L = arcui A M; duc-
[illegible] atium, vel zona cycloi-
[illegible] M, A L, H M, H L,]
[illegible] — H A M — K A M.
[illegible] hujus æquationis cubicæ,
[illegible] us M L ſumatur duplus
[illegible] iterum quadrabilis. At-
[illegible] M L, ſi modo ſit nume-
[illegible] ationem algebraicam ma-
[illegible] x *x* novam perpetuo de-
[illegible] ctam. Hujusmodi zona-
[illegible] lgari methodo repertam,
[illegible]; dum non, ut ſegmen-
[illegible] onſtructione aſſignari poſ-
[illegible] alia ſpatia cycloidalia,
[illegible] determinantur: quæ omnia
[illegible] ſertim cum perſpicaciori-
[illegible] jam dictis eruere, noviſ-

N°. LIX.

JACOBI BERNOULLI

Quadratura Zonarum Cycloïdalium demonſtrata.

Acta Erud. Lipſ. 1699. Sept. pag. 427.

Omnia, quæ circa quadraturas ſpatiorum Cycloïdalium inveniri poſſunt, una Cycloïdis proprietate dudum detecta nituntur, & ex ea tam aperte fluunt, ut Viri celeberrimi Hugenius & Leibnitius, qui duo ejus ſegmenta quadrarunt, non potuiſſent non pari facilitate cætera omnia ſegmenta & ſectores quadrabiles reperire, ſi animum intendere voluiſſent.

TAB. XV. N°. LVIII. *Fig.* 2. & 4.

Cum enim, ut vulgo notum BL, æquetur arcui circulari AL, & ſpatium externum ABN ſegmento circulari ALI, poterit, proprietatis hujus ope, ſpatium Cycloïdicum quodvis imaginabile eo reduci, ut non niſi figuræ rectilineæ & ſegmenta quædam circularia habeantur; idcirco, ut ſpatium fiat quadrabile, illi tantum termini, qui ex ſegmentis circularibus conſtant, mutuo ſe deſtruere ſunt fingendi, & nihilo æquales ponendi; [quod fundamentum ſolutionis eſt,] e qua deinde ſuppoſitione, quantitates aſſumtæ facile determinantur. Quæritur ex. gr. quantæ ſint aſſumendæ rectæ HK, HI, ut zona IKDB quadraturam admittat: Pono HA $= a$, HK $= x$, HI $= z$, KM $= p$, IL $= q$, AM vel DM $= s$, AL vel BL $= t$; erunt ſectores AHM $= \frac{1}{2} as$, & AHL $= \frac{1}{2} at$; adeoque ſegmenta AKM [ADO] $=$ AHM $-$ KHM $= \frac{1}{2} as - \frac{1}{2} px$, & AIL [ABN] $=$ AHL $-$ IHL $= \frac{1}{2} at - \frac{1}{2} qz$. Sed ſegmentum cycloïdicum AKD $=$ KO $-$ ADO $=$ KO $-$ AKM $=$ AK $\times$ (KM $+$ MD) $-$ AKM $=$ AK $\times$ (KM $+$ AM) $-$ AKM $= (a - x) \times (p + s) - \frac{1}{2} as + \frac{1}{2} px = ap - \frac{1}{2} px + \frac{1}{2} as - xs$; & pariter ſegmentum alterum AIB $= aq - \frac{1}{2} qz + \frac{1}{2} at - zt$; ac proinde zona IKDB $=$ AIB $-$ AKD $= aq - \frac{1}{2} qz - ap + \frac{1}{2} px + \frac{1}{2} at - zt - \frac{1}{2} as + xs$; ubi liquet, quatuor priora membra denotare figuras mere rectilineas, ſolaſque quantitates reliquas, quas ingrediuntur t & s, impedire quo minus zona ſit quadrabilis: facio ergo has æquales nihilo, ut ſit $\frac{1}{2} at - zt - \frac{1}{2} as + xs = 0$; ubi ſi poſuero t habere ad s rationem quamcunque [numeri tamen ad nume-

rum,

rum, ut uno arcu dato alter geometrice conſtrui poſſit,] ſemper habebo æquationem, quæ, litteris t & s eliminatis, relationem ipſius z ad x patefaciet; nempe, ſi $t = 2s$ fiet $z = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}x$; ſi $t = 3s$, habetur $z = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}x$; ſi $t = 4s$, erit $z = \frac{3}{8}a + \frac{1}{4}x$, & ſic perpetuo in eadem progreſſione. Cumque etiam ex data recta HK, ſinu nempe complementi arcus AM, pervulgata analyſi reperiri poſſit ſinus complementi arcus dupli, tripli, quadrupli, &c. poterit adhuc z in aliis terminis inveniri; nempe ſi $t = 2s$; erit $z = (2xx - aa) : a$; ſi $t = 3s$, $z = (4x^3 - 3aax) : aa$; ſi $t = 4s$, $z = (8x^4 - 8aaxx + a^4) : a^3$, &c. qui valores cum ſuperioribus, ſinguli cum ſingulis collati, novas porro æquationes ſubminiſtrabunt, per quas ipſa quoque x, ſeu HK, determinabitur.

Atque ad eundem modum infinita alia ſpatia quadrabilia detegi poſſunt. Sic reperiri poteſt ex. gr. ſector quadrabilis DAB rectis AB, AD comprehenſus, vel Zona BDLM, arcu cycloïdali BD & circulari LM intercepta, quæ quidem perpetuo ſectoris dupla eſt. Exiſtente namque HK ſeu $x = \frac{1}{8}a + \frac{1}{8}\sqrt{33}$, vel $x = a\sqrt{\frac{5}{6}}$, vel $32x^4 - 32aaxx - a^3x + 4a^4 = 0$; &c. & aſſumto arcu AL vel duplo, vel triplo, vel quadruplo, &c. ipſius AM, erit ſubinde ſector BAD = Triang: HAL — Triang: HAM, & Zona differentiæ Triangulorum dupla.

Methodum vero tam facilem haud alia fini pandere volui, quam ut Frater, exemplo meo, ad paria præſtanda incitatus, mei quoque Problematis Iſoperimetrici promiſſam analyſin tandem aliquando nobis impertiat.

N°. LX.

JOHANNIS BERNOULLI,

Ad novas ſpatiorum Cycloidalium quadraturas, in Actis *1699,* menſe Jul. *exhibitas Augmentum; Et de Centro gravitatis quædam.*

Acta Erud. Lipſ. 1700. Jun. pag. 266.

MOmenti alicujus, & nobile ſatis inventum eſſe; quod in *Actis* exhibui, quadraturæ infinitorum ſpatiorum, præſertim vero ſegmentorum, hujus per integrum ſeculum decantatiſſimæ curvæ, teſtatur ſplendidum judicium mihi perſcriptum, quod de eo tulit *Regia Scientiarum Academia*, cui id, ante quam publicarem, ſubmiſeram. Interim plane non miror, quod, glacie a me prius fracta, inventus ſit modus ſpatia cycloidalia quadraturas admittentia determinandi. Nihil enim factum video, quod non a quovis mediocri ingenio, nedum a perſpicacioribus, fieri poſſe prævidebam; teſtibus verbis quæ in fine Schediaſmatis mei *Act. ſuperioris anni, pag.* 320, * non inconſulto adjeci: *Ejuſdem methodi uſu, varia alia ſpatia cycloidalia, quadraturarum capacia, algebraice determinantur, quæ omnia huc afferre ſupervacaneum duco, præſertim cum perſpicacioribus arduum non ſit futurum illa ex jam dictis eruere, noviſque augere.* Supereſt tamen circa hanc materiam feraciſſimus novorum inventorum campus, ſed quæ paulo plus artificii requirunt, quam jam exhibita; adeo ut multum deſit quo minus totum penſum abſolutum ſit: horumque nonnulla ſpecimina hic dabo. Videamus autem prius, quid in ſolutione *Fraterna* Zonarum quadrabilium, *Act. anni* 1699, *pag.* 427, † animadverterim.

In

* Supra N°. LVIII. pag. 327.
† Supra N°. LIX.

In æquatione, ad quam pervenit, terminos illos, qui ex arcubus circularibus conſtant, æquales ponit nihilo, (quod fundamentum eſſe ſolutionis meæ recte quidem, ſed facile augurari poterat,) unde reſidui æquationis termini meras figuras rectilineas deſignant: Sic in æquatione zonæ IKDB $= aq - \frac{1}{2}qz - ap + \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}at - zt - \frac{1}{2}as + xs$, facit terminos, in quibus arcus s & t reperiuntur æquales nihilo, nempe $\frac{1}{2}ta - zt - \frac{1}{2}as + xs = 0$, ubi ſi ponatur t habere ad s rationem quamcunque *numeri tamen ad numerum*, (de qua cautela, unde artificium hauſiſſe videtur, præmonui in *Schediaſmate meo*, *pag.* 327, l. 11, 12.) habetur æquatio, quæ litteris t & s eliminatis, relationem ipſius z ad x patefacit; nempe ſi $t = 2s$ fit $z = (a + 2x) : 4$; ſi $t = 3s$ habetur $z = (2a + 2x) : 6$; ſi $t = 4s$, eſt $z = (3a + 2x) : 8$, & ſic perpetuo in eadem progreſſione: Optime, ſed quidquid eſt negotii hujus, ex ipſo ſchematiſmo meo generaliter ſic breviſſime explico. Concipiatur punctum medium inter A & H, quod vocetur P: dico, ſi quærantur arcus AM, AL, rationem habentes reciprocam diſtantiarum ſuorum ſinuum a puncto P, id eſt, qui ſint ut PI ad PK; erit, ſi P cadit extra K & I, differentia ſegmentorum cycloidalium BAI, DAK, id eſt Zona IKDB, quadrabilis; ſin intra cadit, erit ſumma ſegmentorum eorumdem (quæ ad partes oppoſitas ſumi poſſunt, ut fiat figura unico arcu cycloidali & meris rectis comprehenſa, qualis repræſentatur (in *Fig.* I. per IBADKI) iterum quadrabilis. Revera igitur quæſtio huc redit, ut pervulgata analyſi, ex ſinu arcus AM, quæratur ſinus arcus multipli ſubmultiplive alicujus; cujus quidem tres primos tantum caſus ſimpliciſſimos exhibet *Frater*, ſed in quibus nulla omnino elucet progreſſionis uniformitas pro altioribus arcuum multiplicibus, nedum pro eorum ſubmultiplicibus, determinandis. Quocirca ut Problemata Zonarum quadrabilium generaliter ſolvat, quærat, rogo, ſinum arcus habentis ad arcum expoſitum rationem, ut n ad 1; ut ita habeatur formula univerſalis, quam ego adinveni, pro quavis arcus multiplicatione vel diviſione;

unde jam intricatiſſimum ſectionum angularium Problema, pleniſſime & ſimul univerſaliſſime, ſolutum habemus: namque per n intelligo numerum quemvis, ſive integrum ſive fractum, imo & ſurdum: quod, an a quoquam hactenus tentatum, mihi nondum conſtat. *

At vero miſſis iſtis, en quædam ſpecimina modo ſupra promiſſa, quæ dixi ſolo illo fundamento a *Fratre* indicato non niti, quæque, ſi nulli alii ſuppeterent ſolvendi fontes, deſperata forent: Ut ſi, ex omnibus ſegmentis cycloidicis rectis, quæratur quodnam illud ſit, cujus centrum gravitatis *algebraice*, id eſt, citra ullam quadraturam, determinari queat. Eſto

TAB. XV. N°. LVIII. &c. *Fig.* 3.

radius $AH = a$, $AK = x$, arcus $AL = t$: reperietur diſtantia centri gravitatis ſegmenti cycloidici BADB a vertice A, $= (6xxt - 3aat + (4xx + ax + 3aa)\sqrt{(2ax - xx)}) : (12xt - 6at + (6x + 6a)\sqrt{(2ax - xx)})$; ubi tam in denominatore, quam in numeratore littera t, ſeu arcus circularis involvitur: quem igitur ſi eliminare vellemus, nudo illo fundamento adhibito, ponendo ſcilicet quantitates, ubi t reperitur, utrobique æquales nihilo, ita ut tam $6xxt - 3aat = 0$, quam $12xt - 6at = 0$, proveniret ex illa æquatione, $x = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, ex hac vero, $x = \tfrac{1}{2}a$, quæ ſimul ſtare non poſſunt. Talis igitur arcuum circularium deſtructio, in hac, aliiſque ſimilibus occaſionibus, prorſus inutilis eſt: interim alia nobis ſunt adminicula, quibus quæſiti clauſtra reſeramus. Eorum unum hoc eſt: pono quantitates, ubi t reperitur, in numeratore eandem habere rationem ad quantitates ubi t reperitur in denominatore, quam habent reliquæ numeratoris quantitates, ad reliquas denominatoris quantitates: id eſt, pono $6xxt - 3aat$, ad $12xt - 6at$ [ſeu $2xx - aa$, ad $4x - 2a$] ut $(4xx + ax + 3aa)\sqrt{(2ax - xx)}$ ad $(6x + 6a)\sqrt{(2ax - xx)}$ [ſeu $4xx + ax + 3aa$ ad $6x + 6a$] id quod dat $x = 2a$; hac operatione fit, ut $(6xxt - 3aat + (4xx + ax + 3aa)\sqrt{(2ax - xx)}) : (12xt - 6at + (6x + 6a)\sqrt{(2ax - xx)})$ convertatur in $(6xxt - 3aat) : (12xt - 6at)$ quod jam per communem t dividi poteſt, & fit

* Vide Num. LXIX.

ſit $(6xx - 3aa) : (12x - 6a) =$ [ob $x = 2a$] $\frac{7}{6}a$ unde ſequitur, facta $x = 2a$, ſeu ſumta AK = AF, ſegmentum cycloidicum, quod hoc caſu degenerat in ſpatium cycloidis totale, habere ſuum centrum gravitatis diſtans a vertice A, $\frac{7}{6}a$, ſeu $\frac{7}{12}$ totius diametri circuli generatoris; & hoc unicum eſſe omnium ſegmentorum rectorum, cujus centrum gravitatis, independenter ab ulla quadratura, ſit aſſignabile.

Eadem methodo ſi quæratur, quænam portio curvæ cycloidalis AB, converſa circa axem AK, deſcribat ſuperficiem conoideam, habentem centrum gravitatis algebraice determinabile, reperietur iterum, AK ſumendam eſſe æqualem AF: atque tunc centrum gravitatis ſuperficiei, a Cycloide tota ABE circa axem AF deſcriptæ, diſtare a vertice A, $\frac{2}{3}$ AH, ſeu $\frac{1}{3}$ axis totius AF; & ſic præter integram ſuperficiem cycloidis circa axem converſæ, aliam partialem nullam dari quæſito reſpondentem.

Quod ſi vero idem poſtuletur pro ipſo conoide, id eſt, pro ſolido ſegmenti recti circa axem converſi; reſpondeo rem eſſe omnino impoſſibilem: ſingula enim iſtorum ſolidorum (nullô excepto,) ut & totum conoides, vel potius ſemiſphæroides EAG, centri gravitatis determinationem non admittunt, niſi aſſumta quadratura circuli, vel dimenſione arcus circularis.

Interim, quod memorabile eſt, inveni ſectorem ſolidum IBAD, qui nempe oritur ex converſione ſectoris plani IAB circa axem AI, qui unicus eſt inter infinitos alios, cujus centrum gravitatis ſub poteſtatem algebraicam cadit: quem, non obſtante, quod hic methodum meam maxima parte aperuerim, inveniendum *Fratri* propono. Quæro itaque ab ipſo, quis ille ſit ſector planus AIB, qui rotatus circa AI faciat ſectorem ſolidum, in quo ſit centrum gravitatis independens ab ulla quadratura vel rectificatione; hoc quod a me præſtitum eſt. Non provocationis cauſa, multo minus ad oſtentationem ipſi propoſitum volo; ſed tantum, ut illi de hujuſmodi inventis benignius ſentire anſam ſuppeditem; ſi forte in hoc plus negotii deprehenderit, quam initio putaverat.

Cæterum & hoc prætermitti non debet: quæ hanc circa materiam dicta ſunt, ſive de particularibus ſpatiorum quadraturis, ſive de centris gravitatis in uno alterove caſu algebraice aſſignabilibus, deque aliis id genus; ea multis aliis lineis curvis commode & eleganter applicari poſſe: ex. gr. illi curvæ, quam ROBERVALLIUS vocat *Trochoidis*, id eſt *Cycloidis Sociam*, vel *Comitem*; quæ ejus temporis Geometris non minus fere quam ipſa Cyclois celebrata fuit; quamque etiam WALLISIO ſub nomine *Curvæ ſinuum verſorum*, aliiſque noſtrorum annorum Mathematicis egregiis conſideratam reperio. Generatur autem applicando ubique ad K rectam æqualem arcui circulari AL, vel etiam motu quodam continuo, aliiſque modis, quos vide apud ROBERVALLIUM, qui de ea, juxta & de Cycloide, fuſe ſcripſit, deditque quidquid fere deſiderari poteſt: ſit pro ſpatiorum ſolidorumque variis modis factorum dimenſione; ſit pro eorumdem centrorum gravitatis, ut ut per quadraturas, determinatione; nihil tamen de ipſius Curvæ longitudine habet, quæ reperitur æqualis circumferentiæ ellipſis alicujus, in qua axis major duplus eſt ſuæ parametri. De algebraicis vero caſibus, de quibus hic ſermo, nec apud ipſum, nec apud alios, vel hilum extat. Dico itaque, etiam in hujus curvæ ſpatio infinita eſſe ſegmenta abſolute quadrabilia. Ductis enim duabus applicatis, una ad dextram, altera ad ſiniſtram, & a centro circuli generatoris hinc inde æqualiter diſtantibus; recta connectens applicatarum extremitates abſcindet ſegmentum, quod eſt æquale rectangulo ſub diametro, & ſub correſpondenti applicata circuli: reliqua de ſectoribus, zonis, conoidum ſuperficiebus & ſolidis, ut & de centris gravitatis, quod unicuique nunc pateant, lubens prætereo.

Deberem hic aliquid dicere de Cycloidibus *contractis* & *protractis*, etenim etiam hiſce fere omnia competunt quæ de *primaria* oſtendi. Suffecerit autem, ſi hic generalem regulam indicavero, pro determinatione omnium ſegmentorum abſolute quadrabilium, ſive in *contractis*, ſive in *protractis Cycloidibus*: alii qui plus otii nacti ſunt, reliqua ex dictis facile indagabunt.

Eſto

pag. 336.



Eſto radius circuli generatoris, ſeu diſtantia puncti deſcribentis a centro rotationis $= a$, radius vero circuli ſuper recta rotati $= b$; applicentur duæ ordinatæ ad partes axis, ſive eaſdem, ſive oppoſitas, quæ a vertice Cycloidis ita diſtent, ut earum diſtantiæ ſimul ſumtæ ſint $= 2a - aa : b$. Dico lineam rectam connectentem extremitates duarum harum applicatarum reſecare ſegmentum quadrabile in iſta *Cycloide*, quæ erit vel *contracta*, vel *protracta*, prout a, vel b, major eſt. Hoc autem ſegmentum, ſi applicatæ ſunt ad eaſdem partes, erit $= (b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y)\sqrt{(2ax - xx)} - (b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x)\sqrt{(2ay - yy)}$; ſin ad oppoſitas erit $= (b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y)\sqrt{(2ax - xx)} + (b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x)\sqrt{(2ay - yy)}$ intelligo per x & y diſtantias duarum applicatarum a vertice Cycloidis, ita ut $x + y$ ſit $= 2a - aa : b$. Unde patet ſi $2a - aa : b$ ſit, vel nihilo æqualis, vel quantitas negativa, id eſt ſi $2a$ ſit $=$ vel $<$ $aa : b$; ſeu ſi b ſit $=$ vel $<$ $\frac{1}{2}a$, ſegmentum quadrabile fore tunc imaginarium, adeoque impoſſibile. Hinc memorabile fluit, omnes quidem *Cycloides protractas* habere infinita ſegmenta quadrabilia, ſed non omnes *contractas*: Etenim illæ tantum, quæ b majus habent quam $\frac{1}{2}a$, pariter gaudent infinitis hujuſmodi ſegmentis, reliquæ vero omnes, ne unico quidem.

JAC. B.

N°. LXI.

JAC. B.* QUADRATURA ZONARUM CYCLOÏDALIUM PROMOTA

Problema item centri gravitatis ſectoris ſolidi Cycloïdici ſolutum.

Confer. *Acta Lipſ.* pag. 316 & 427. Anni 1699. †

Acta Erud. Lipſ. 1700. Decemb. pag. 551.

Tab. XV. N°. LI.

QUemadmodum Problema Sectionis Angularis in ratione determinata numeri ad numerum, algebraïcum eſt; ſed indefinite in data ratione quacunque, tranſcendens: ita quoque Zonæ Cycloïdales quadrabiles, qualis IKDB, algebraïce quidem determinantur, ſicubi ratio arcuum AM & AL datur in numeris; indefinite vero, & generaliter, nulla æquatione algebraïca finita exhiberi poſſunt; quamvis interim Problema facillime conſtruere liceat, hoc modo: Sit AC portio Cycloïdis, A vertex, AH axis, AQ quadrans circuli genitoris, H centrum circuli. Fiat AP perpendicularis & æqualis ipſi AH, datoque in ea ubivis puncto G, biſecetur GP in R, ac junctæ HG ducatur parallela recta RS. Trajecta porro indefinite recta EF parallela ipſi HQ, quæ ſecet Cycloïdem in C, circulum genitorem in E, & axem in F; abſcindatur in HQ quarta proportionalis ad AH, AG & CE, quæ ſit HF: centro T, radio circuli genitoris, deſcribatur arcus circuli ſecans Cycloïdem in duobus punctis, quorum remotius ab axe ſit V, per quod tranſeat recta VN, parallela ipſi HQ, & producta in Q, ut ſit NO = HF; erit O ad curvam quandam OSP, quæ rectam RS ſecabit in puncto optato S: hinc enim ſi demittatur in axem SK parallela HQ, eique abſcindatur æqualis HI, ac per K & I agantur rectæ KD & IB, itidem parallelæ ipſi HQ, quæque ſecent Cycloïdem in D & B, circulum genitorem in M & L, erit & Zona IKDB quadrabilis, hoc eſt, æqualis triangulis rectilineis HAL — HAM + IAL — KAM; & arcus AM ad AL in ratione data AG ad AH, ut requirebatur. Demonſtrationem, quæ intellecta noſtra Analyſi ** p. 427. A. 1699. neminem latere poteſt, addere ſuperſedeo. Inventio porro ſectoris ſolidi IBAD, (Fig. 3. Tab. XV. N°. LVIII) oriundi ex converſione ſectoris plani IAB circa axem AI, qui centrum gravitatis habeat algebraïce determinabile, calculum requirit prolixum magis, quam arduum. Salvo enim hujus errore, reperio quod, poſita $AH = 1$, ſumtaque $AK = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}$, & $KI = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2}$, diſtantia centri gravitatis ſectoris a vertice A, ſit futura $(9 + 22\sqrt{\frac{1}{2}}) : (6 + 30\sqrt{\frac{1}{2}})$.

Videatur Nus. LXIX.

Nouvelle

* Jacobi Bernoulli. † Nris. LVIII. & LIX. ** N°. LIX. pag. 329.

Nº. LXII.

Nouvelle maniere de rendre les Barometres lumineux.

Par Mr. BERNOULLI, Profeſſeur à Groningue.

Extraite d'une de ſes Lettres écrite de Groningue, le 19 Juin 1700.

AIANT lû dans un petit Livre, qui porte pour Titre, *Traitez des Barometres, & Notiometres, ou Hygrometres*, le Phenomene extraordinaire, qui arriva en 1675, au Barometre de feu M. PICARD, ſçavoir cette lumiere entrecoupée, qu'il apperçut par hazard dans le mouvement du vif argent, en tranſportant le Barometre d'un lieu à un autre, dans une grande obſcurité, & duquel il eſt encore fait mention dans la premiere Edition de l'*Hiſtoire Latine de l'Académie* pag. 312; je l'ai jugé digne d'y faire quelques réflexions; & ce d'autant plus, que l'Auteur de ce Traité invite les curieux à perfectionner cette découverte, & dit que dans ce qu'on a déja fait d'expériences ſur pluſieurs autres Barometres, pour voir ſi la même choſe arriveroit, on n'en a trouvé qu'un qui approchât de celui de M. PICARD; c'eſt apparemment celui de M. CASSINI, dans lequel Mr. DU HAMEL dit avoir été obſervé le même effet, quoique moins ſenſible que dans l'autre. Je m'y ſuis donc appliqué; & après quelques méditations faites ſur ce ſujet, accompagnées des expériences néceſſaires, dont le ſuccès a répondu à mon ſouhait, & conformément au raiſonnement que j'en faiſois *a priori*; il me ſemble que j'ai découvert la véritable cauſe de ce Phenomene, & une maniere de faire paroître une lumiere fort vive dans tous les Barometres ſans diſtinction en tout temps & en tout lieu: en ſorte que voila une nouvelle eſpece de Phoſphore perpétuel, qui ne ſe conſume pas comme ceux qu'on fait par la Chymie.

Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences, de Paris 1700 pag 178. Edition de Paris. pag. 230. Edition de Hollande.

Avant que de vous expliquer mon raiſonnement, je vous dirai que le même ſoir que je lûs ce Phenomene dans ce petit Traité, je voulus faire l'eſſai ſur mon Barometre, qui avoit été en expérience environ quatre ſemaines: je le tranſportai donc dans l'obſcurité, je le balançai d'abord legérement, mais ſans aucun ſuccès, n'y remarquant pas la moindre lumiere; mais l'ayant enfin balancé avec violence (ce que je puis faire ſans danger de caſſer le tuyau, ou de répandre du vif argent, le tuyau étant monté ſur une planchette, & comme enchaſſé, & le vif argent d'en bas enfermé dans une boëte de buïs attachée à la planchette & cloſe par tout, enſorte que c'eſt par les pores du buïs ſeulement que l'air entre pour preſſer ſur le vif argent,) j'obſervai que lorſque le vif argent (montant & baiſſant avec une grande vîteſſe par une longue partie du tuyau,) étoit tout au bas, il jettoit un éclair fort foible, & qui s'évanoüiſſoit, dès que le vif argent commençoit à remonter. Cela me fit penſer, que celle des conjectures, que l'Auteur du Traité allegue pour rendre raiſon de ce que cette lumiere n'avoit encore paru que dans un ſeul Barometre, ſçavoir que pour les autres *il n'y eût peut-être pas aſſez de temps qu'ils fuſſent en experience*, ne pouvoit avoir lieu; vû que mon Barometre n'avoit été en expérience que quatre ſemaines ou environ.

Après cette expérience, je voulus eſſayer ſi les autres conjectures de l'Auteur ſeroient admiſſibles: il dit que les autres Barometres n'ont pas fait le même effet, *ſoit qu'ils ne fuſſent pas aſſez épurez d'air, ou que le vif argent n'en fût pas aſſez pur*. Pour m'en aſſeurer, après avoir nettoyé ſoigneuſement le vif argent, en le forçant de paſſer par les pores d'un morceau de peau, je le mis encore dans un récipient dont je tirai l'air, & l'y laiſſai pendant vingt-quatre heures, afin de lui donner le temps de laiſſer évaporer les particules d'air mêlées dans le vif argent. Après l'avoir ainſi purgé, j'en remplis un tuyau à l'ordinaire, avec toute la précaution poſſible, pour empêcher qu'il n'y demeurât quelque petite bulle d'air; mais le Barometre ainſi monté n'en fit pas plus d'effet. Car quelque violent balance-

lancement que je donnaſſe au vif argent, à peine en pouvois-je tirer cette foible lueur, qui ſe montroit & s'évanouiſſoit preſque dans le même inſtant.

J'ai laiſſé le Barometre en cet état pour l'uſage ordinaire, ayant jugé être dommage de le démonter, après avoir pris tant de peine & de ſoin à le monter ſi exactement, que je ſuis aſſûré, que ni dans la partie vuide du tuyau, ni parmi le vif argent, il n'y a pas la moindre choſe d'air groſſier.

J'ai donc conclu de cette ſeconde expérience, que les autres conjectures de l'Auteur du Traité n'étoient pas valables non plus; ou du moins, que ni la purification du mercure, ni le vuide parfait de la partie d'en haut du tuyau, n'étoient pas la principale cauſe de l'apparition de cette lumiére.

Cela étant, j'en ai cherché la véritable cauſe; & voici comme je me ſuis pris dans mon raiſonnement. Comme la lumiére ne paroit dans chaque balancement, que lorſque le vuide ſe fait, c'eſt-à-dire, dans la ſeule deſcente du vif argent; j'ai compris, que quand le vif argent deſcend, il en doit ſortir, & remonter au même inſtant, une matiére très-déliée & très-ſubtile, pour occuper & remplir en partie l'eſpace du tuyau que le vif argent quitte: je dis en partie, parce qu'il faut bien croire, que les pores du verre, étant ſans doute plus amples que ceux du vif argent, (comme il paroit par la legèreté de l'un, & la grande peſanteur de l'autre,) il entre en même temps, par les pores du tuyau, une autre matiére bien plus ſubtile que l'air groſſier, mais bien moins que celle qui ſort du vif argent: & ces deux matiéres ſe mêlant incontinent, rempliſſent l'eſpace que le vif argent leur cede par ſa deſcente. Il n'importe quels noms vous donniez à ces deux matiéres: vous pourrez, s'il vous plait, appeller avec M. DESCARTES, celle qui pénétre les pores du tuyau, la matiere du ſecond élement, ou les globules céleſtes; & celle qui eſt ſi fine qu'elle ſort du vif argent, la matiere du premier élement. En effet M. DESCARTES a aſſez bien montré, dans ſes *Principes de Philoſophie*, Part. IV. art. 58.

art. 158. que les particules du vif argent laiſſent entr'elles des angles ſi étroits, qu'ils ne peuvent être remplis, que par la matiere la plus fine, c'eſt-à-dire, par celle du premier élement.

Or vous ſçavez, comment M. DESCARTES explique la production de la lumiere, la faiſant conſiſter dans le mouvement très-rapide de la matiere du premier élement, aſſemblée ſeule dans quelque eſpace, & dans l'effort qu'elle fait ſur les globules céleſtes. Je dis donc, que pendant que les particules du premier élement ſont diſperſées dans ces petits interſtices, & comme opprimées par les particules terreſtres du vif argent, elles ne peuvent pas acquerir ce mouvement rapide, ni agir & faire effort conjointément pour produire de la lumiere; mais auſſi-tôt que, par la deſcente du vif argent, elles en ſortent en abondance, elles vont s'unir enſemble; & dégagées ainſi d'abord de toute autre matiere, elles prennent ce cours rapide, qui leur eſt ordinaire quand elles ſont libres; & par l'effort qu'elles font ſur les globules céleſtes, qui viennent à leur rencontre, elles produiſent cette lumiere. Delà ſe voit la raiſon, pour laquelle cette lumiere ne s'obſerve que dans la deſcente du mercure; car quand il remonte, bien loin qu'il en ſorte de la matiere du premier élement, il y entre plûtôt une partie de ce qui en étoit ſorti dans ſon abaiſſement précédent: & le reſte eſt chaſſé avec les globules céleſtes, hors du tuyau, par les pores du verre. Voilà encore la raiſon pour laquelle cette lumiere accompagne toûjours le haut du mercure deſcendant, & qu'elle eſt comme attachée à ſa ſuperficie ſupérieure; pourquoi la lumiere produite dans une deſcente n'eſt pas durable; & pourquoi chaque deſcente finie, cette lumiere finit & s'évanoüit auſſi-tôt. Cela vient de ce que les particules du premier élement, qui étoient unies en ſortant du mercure, & ayant fait tant ſoit peu de chemin en s'éloignant de la ſurface du mercure, ſont d'abord diſſipées & diſperſées par la foule des globules céleſtes, qui avec leur impétuoſité les accablent, & leur ôtent ainſi toute la

la force de produire cet effet de lumiere : de ſorte qu'elle ne peut durer, qu'à meſure qu'il ſort du mercure une continuelle & nouvelle matiere du premier élement, pour ſuccéder à celle qui ſe diſſipe auſſi continuellement ; à peu près de même que la flamme d'une chandelle ſe diſſipe & ſe renouvelle à tout moment. Il eſt donc manifeſte, que la lumiere en queſtion ne peut durer tout au plus, qu'autant que dure chaque deſcente du vif argent.

Il me reſte à faire voir le principal : ſçavoir pourquoi cette lumiere ne ſe montre pas dans tous les Barometres, & pourquoi elle n'a été obſervée juſqu'à preſent que dans deux ou trois : comme auſſi la maniere de rémédier à cela pour la faire paroître infailliblement dans tous les Barometres, en tout temps, & avec une vivacité ſurprenante, pourvû qu'on le faſſe dans un lieu fort obſcur : l'un & l'autre fortifiera & confirmera parfaitement bien les raiſons, dont je me ſuis ſervi dans l'explication que je viens de faire de la cauſe de ce Phenomene.

J'ai remarqué, que ſi on expoſe du vif argent, dans quelque vaſe, à l'air libre, on en trouvera au bout de quelque temps la ſuperficie, par où l'air le touche, toute trouble & couverte d'une pellicule très-mince ; laquelle étant ôtée par le moyen d'une plume nette, la premiere clarté revient à la ſuperficie, qui ſera derechef polie comme un miroir ; mais ſi on laiſſe le vif argent expoſé à l'air, une autre pellicule, d'abord ſemblable à une toile d'araignée, qui s'épaiſſit avec le temps, s'étendra par-deſſus. Que ſi on l'examine bien avec le Microſcope, on verra qu'elle reſſemble beaucoup à de l'argent battu en feuille : en effet ce n'eſt autre choſe, qu'un tiſſu très-fin d'une eſpèce de mouſſe, ou de poil folet, qui ſe forme de petits filaments, leſquels ayant été ſéparés du vif argent par l'agitation continuelle de l'air, & ne pouvant pourtant pas ſuivre ſon mouvement, retombent avec d'autres ordures, qui ſe trouvent toûjours dans l'air, ſur la ſurface du vif argent ; & s'entrelaſſant peu à peu, compoſent

cette pellicule. Nous remarquons la même choſe dans toutes ſortes de liqueurs ; leſquelles, ſi on les laiſſe repoſer, en ſorte que l'air les puiſſe ſeicher par deſſus, ſe couvrent enfin d'une peau, plus ou moins épaiſſe, ſelon la conſtitution des corpuſcules qui s'exhalent, & retombent enſuite ſur les liqueurs. Tout cela bien conſideré ; je dis que c'eſt cette pellicule, qui empêche l'apparition de la lumiere dans les Barometres, qui ont été remplis à la maniere ordinaire : Voici comme je conçois la choſe. Lorſqu'on fait le Barometre, on prend un tuyau ſcellé hermétiquement par un bout, & par l'autre on verſe du vif argent, qui tombe goute à goute tout le long du tuyau; en ſorte que chaque goute, en penetrant & en fendant l'air depuis le haut juſqu'en bas, en eſſuye, pour ainſi dire, & entraine tout ce qu'il y a d'impur ; ce qui fait que, dans ce moment employé à couler le long du tuyau, le vif argent ſe charge plus de cette mouſſe, qu'il ne feroit en deux ou trois jours, étant ſimplement expoſé à l'air. Ce que je viens de dire eſt ſi vrai, que ſi vous laiſſez tomber, de la hauteur d'un pied ſeulement, une goute de vif argent le plus netoyé & purifié qu'il ſoit poſſible, dans un vaſe où il y en ait auſſi de ſi bien purifié, que la ſuperficie en ſoit unie & polie comme la glace d'un miroir ; vous verrez que la goute tombant ſur cette ſurface polie, la ternira à l'endroit où elle entrera dans la maſſe du vif argent, & y laiſſera une tache viſible ; marque certaine, que la goute, toute nette qu'elle étoit, avoit été infectée de l'impureté de l'air. C'eſt ainſi que les goutes du vif argent, verſé dans le tuyau, ſe couvrent de cette pellicule en coulant ; mais par la chûte des goutes les unes ſur les autres, & par la preſſion du vif argent, ces pellicules particulieres crevent aiſément, pour permettre une continuité dans le vif argent ; & ces ordures ne pouvant pas s'accorder, ni avec le mouvement, ni avec la figure des particules du vif argent, ſont obligées, comme des excrémens, de ſe retirer hors de la ſubſtance intime du vif argent, & de ſe mettre par tout à côté, entre la ſurface concave du tuyau & la convexe du mercure.

Voila

Voila donc toute la colonne mercuriale enveloppée de cette peau très-déliée, comme d'un épiderme. Certes il y a beaucoup d'apparence, que la choſe ſe paſſe comme je viens de dire; car le tuyau étant rempli de la ſorte, ſi on vient à le renverſer, pour en faire le Barometre, en bouchant l'ouverture avec le bout du doigt, juſqu'à ce qu'elle ſoit enfoncée dans le vif argent contenu dans le vaſe; on obſervera en retirant le doigt, que le mercure, en deſcendant dans le tuyau, laiſſera en arriere des reſtes de cet épiderme, attachés aux côtés du verre de la partie vuide du tuyau, en forme d'écume de plomb fondu.

Il n'eſt donc pas difficile de concevoir, que le Barometre étant fait, la ſuperficie horiſontale & ſupérieure du cylindre mercurial, doit être couverte d'une pellicule plus épaiſſe, que nulle autre partie de la ſuperficie de ce cylindre; parce qu'elle s'épaiſſit, en partie par ces reſtes, qui demeuroient attachés à la partie vuide du tuyau, & qui ſe détachant enfin, retombent ſur le ſommet de la colonne mercuriale; & en partie par celles qui ſont au deſſous, & qui ſont pouſſées en haut par la peſanteur du mercure.

Donc pour derniere concluſion, il me ſuffit de dire, que cette pellicule qui occupe le deſſus du mercure, quelque déliée qu'elle paroiſſe à nos yeux, couvre ſi bien les pores de la ſuperficie du vif argent, qu'elle ferme, ou entierement, ou en plus grande partie, le paſſage à la matiere du premier élement, qui ſeule par ſon élancement peut produire de la lumiere: d'où il s'enſuit que dans les Barometres remplis à l'ordinaire, il n'en paroîtra point du tout, ou fort peu, à force de grands balancemens, comme dans le mien, dont j'ai parlé ci-deſſus. On ne doit pas trouver étrange, qu'une pellicule ſi mince & ſi délicate puiſſe empêcher les particules du premier élement de ſortir des pores du vif argent, ou du moins de ſortir avec tant d'abondance & de véhémence; vû que nous voyons tous les jours, que le vif argent même paſſe aiſément par les pores des peaux de preſque tous les animaux; mais que le paſſage ſe ferme

me entierement, ſi on n'en ſépare pas cette taye tendre, que les Médecins appellent *Epiderme* ou *cuticule* : Quelle contradiction y a-t-il donc, qu'une pareille choſe puiſſe arriver dans nôtre ſujet ?

Tel eſt juſqu'ici le raiſonnement que je faiſois, ſur la cauſe d'un effet ſi étrange. On n'eſt jamais mieux aſſûré qu'on ne s'eſt pas trompé, en raiſonnant ſur des choſes de Phyſique, que lorſque les expériences, faites enſuite exprès, s'accordent avec les conclusions, qu'on avoit tirées par le ſeul raiſonnement. Or ſi jamais raiſonnement *a priori* fut confirmé, dans toutes ſes circonſtances, par le ſuccès des expériences, je puis dire que le mien a eu ce bonheur : car voyant bien, qu'en conſéquence de mes raiſons, il faut que cette lumiere dans le Barometre ſoit très-vigoureuſe, ſi par quelque moyen on peut empêcher que la colonne mercuriale ne ſe couvre de cet épiderme ; pour ce ſujet, je me ſuis bien aviſé de deux manieres, qui toutes deux ont très-bien réüſſi.

Voici la premiere. Je pris un tuyau de verre, d'environ trois pieds & demi de long, ouvert par les deux bouts, que j'eus ſoin de bien dégraiſſer & netoyer par dedans, pour n'y laiſſer aucune ordure ni humidité ; en ayant plongé un bout dans du vif argent, contenu dans un vaſe large, d'une petite hauteur, mais le plus obliquement que le bord du vaſe le permettoit, en ſorte que l'angle, que le tuyau faiſoit avec l'horiſon, comprenoit environ 18 à 20 degrez ; ce qu'aiant fait, j'appliquai ma bouche à l'autre bout du tuyau, & je commençai à ſuccer : de cette maniere, je fis aiſément monter le vif argent juſqu'au haut, & en aiant même attiré quelques goutes dans ma bouche, je fis ſigne à un de mes Ecoliers, que j'avois inſtruit à cela, de boucher promptement avec le doigt le bout d'en bas enfoncé dans le vif argent. (Il faut dire ici, en paſſant, que j'ai achevé d'élever le vif argent, en ſuççant d'un ſeul trait, de peur que, ſi je le faiſois par repriſe, il n'entrât dans le tuyau quelque peu d'haleine, ou de ſalive). Le tuyau étant donc rempli de cette maniere, pendant que

mon

mon Ecolier tenoit fermé le bout d'en bas avec le doigt, je fermois celui d'en haut, avec du ciment, dont je me ſers pour conſolider les verres caſſez, ou fendus. Après l'avoir bien fermé, je dis à cet Ecolier d'ôter ſon doigt de deſſous le bout, qui trempoit toûjours dans le vif argent; j'érigeai en ſuite le tuyau perpendiculairement, & le vif argent deſcendit à ſon équilibre, comme à l'ordinaire; mais j'eus le plaiſir de voir, qu'il ne laiſſoit point d'écume attachée dans la partie vuide du tuyau, comme font les tuyaux remplis à la maniere ordinaire: ce que je pris d'abord pour un bon ſigne. En effet, je prévoiois bien que cela devoit arriver; car, de la maniere que le tuyau avoit été rempli, on voit bien que l'air n'a point touché le vif argent, en montant dans le tuyau, ſi ce n'eſt ſeulement la premiere goute, qui étoit comme le bouclier, à la faveur duquel tout le reſte de la colonne mercuriale pouvoit monter, ſans prendre la moindre atteinte de l'air; mais cette ſeule goute, outre qu'elle ne pouvoit pas être beaucoup infectée, n'aiant pas fendu & penetré l'air avec violence, comme fait une goute qui tombe, ne demeura pas dans le tuyau: car, comme j'ai dit, j'attirai quelques premieres goutes du vif argent, juſques dans ma bouche.

Ainſi j'étois ſûr d'avoir un Barometre, dont la colonne mercuriale étoit toute dénuée de cet épiderme ſi funeſte aux autres. Cependant, pour faire l'expérience plus commodément, ſans encourir le danger de répandre du vif argent, en le tranſportant, ou balançant, j'ôtai le tuyau hors de ce vaſe large, tenant le bout d'en bas fermé avec le doigt, & je le mis dans un vaſe plus étroit & plus profond, à moitié rempli de vif argent. Tout étant achevé, j'attendois la nuit avec impatience, laquelle étant venuë, je pris mon Barometre ainſi préparé, le tuyau à la main gauche, & le vaſe dans lequel le bout d'en bas trempoit à la main droite; auſſi-tôt que je fus dans l'obſcurité, voila que j'apperçus déja, ſans avoir encore balancé le Barometre, des éclairs fort

viſs, leſquels étoient cauſez par un petit branlement, qui étoit imprimé à la colonne mercuriale par le mouvement de tranſport : mais quand je commençai, quoique fort doucement, à balancer le Barometre, pour donner au vif argent une reciprocation un peu plus conſiderable qu'il n'avoit par le ſeul mouvement de tranſport, il paroiſſoit, à chaque deſcente, une lumiere ſi exquiſe, qu'elle éclairoit les objets les plus proches, en ſorte que je pouvois aſſez diſcerner, à la faveur de cette lumiere, les lettres d'une médiocre écriture à la diſtance d'un pied. Je vous avouë, que j'eus un grand contentement de voir, que l'événement répondoit ſi bien à mon attente ; d'autant plus que ce n'étoit pas une expérience faite par hazard, mais que j'avois faite de propos déliberé, me fondant ſur les principes de mon raiſonnement. Il faut encore dire, que cette lumiere paroiſſoit ſi aiſément, que les balancemens les plus inſenſibles, qui à peine faiſoient monter & deſcendre le mercure de l'épaiſſeur d'un couteau, ne laiſſoient pas de produire des éclairs très-viſs : les jours ſuivans, j'ai réïteré cette expérience avec trois ou quatre autres tuyaux, que j'ai remplis de la même maniere ; mais tous ont fait également leur effet, avec beaucoup de vivacité, ſans avoir jamais manqué : ce qui me fait avancer hardiment, que tous les Barometres, préparés ainſi que j'ai dit, montreront en tout temps le Phenomene arrivé dans celui de M. PICARD, & peut être bien plus vivement.

La ſeconde maniere, dont je me ſuis aviſé, pour remplir le tuyau de vif argent, ſans que la colonne mercuriale ſoit couverte de la pellicule ſuſdite, la voici en peu de mots. Je pris un tuyau bien nettoyé, & ouvert par un bout ſeulement, que je plongeai dans du vif argent contenu dans un vaſe, & que j'érigeai perpendiculairement ; de ſorte qu'il n'y avoit encore que de l'air dans le tuyau. Pour tirer l'air hors du tuyau, voici ce que je fis. Je couvris le tuyau, & le vaſe dans lequel trempoit le bout ouvert, avec un récipient de verre fait en forme de cloche, qui s'étendoit par en haut en

une

une longue queuë creuſe par dedans, pour contenir le tuyau, comme le fourreau contient la lame de l'épée; (ce récipient eſt fait exprès, pour faire ces ſortes d'expériences avec le Barometre;) j'appliquai donc le récipient avec le tuyau & le vaſe au dedans, ſur l'aſſiete de cuivre de la pompe pneumatique, par le moyen de laquelle je tirai l'air du récipient, & ainſi en même temps celui du tuyau, qui ne pouvant ſortir par le bout d'en haut, qui étoit fermé, ſortoit, avec un petit bouillonnement, par le bout trempant dans le vif argent. Après avoir tiré l'air du récipient & du tuyau, le plus exactement qu'il m'étoit poſſible, je le laiſſai rentrer dans le tuyau, à cauſe du vif argent du vaſe qui l'en empêchoit, il pouſſa par ſa preſſion le vif argent dans le tuyau, à la hauteur de 24 à 25 pouces, en ſorte qu'il en manquoit peu qu'il ne fût monté à la hauteur ordinaire du Barometre: ce qui marquoit que l'air avoit été aſſez ſoigneuſement tiré du récipient. Le vif argent étant ainſi monté: j'ai jugé qu'il devoit être tout à fait dépouillé de ſon épiderme; vû que le haut même de la colonne mercuriale n'avoit pû toucher à l'air, ſi ce n'eſt à ce peu qui étoit reſté dans le tuyau, mais qui, à cauſe de ſon extrême raréfaction, n'avoit pû en rien alterer le haut du vif argent, & beaucoup moins le reſte de la colonne mercuriale, de laquelle pas la moindre partie n'avoit été expoſée à l'air en montant. En effet, quand je fis l'expérience la nuit ſuivante, la lumiere parut dans ce tuyau, avec la même force, & de même que dans l'autre, préparé de la maniere précedente. Par où l'on voit encore, que l'air qui reſtoit dans la partie vuide du tuyau, ne pouvoit point du tout empêcher que la lumiere ne parût; & qu'ainſi, ſi elle ne paroit pas dans les Barometres remplis à la maniere ordinaire, ce n'eſt pas parce qu'ils ne ſont pas épurez d'air; mais uniquement parce que le vif argent contenu dans le tuyau, eſt enveloppé dans cette pellicule de maniere qu'elle ferme le paſſage à la matiere du premier élement.

Cependant j'ai trouvé par expérience qu'il n'y a encore rien

de ſi nuiſible à l'apparition de cette lumiere que l'humidité : car après avoir continué pendant quelques ſemaines de balancer tous les ſoirs un des Barometres préparés ſelon la premiere méthode, pour voir s'il y avoit quelque difference, ſoit dans la vivacité, ſoit dans d'autres circonſtances ; & n'y aiant pû remarquer la moindre difference, à ma grande ſatisfaction, je m'aviſai de verſer un peu d'eau dans le vaſe d'en bas, pour en couvrir la ſuperficie du vif argent qui y étoit contenu, & puis j'élevai le tuyau tout doucement, juſqu'à ce que le bout d'en bas, ſortant du vif argent du vaſe, parvint à l'eau ; mais auſſi-tôt que quelques goutes d'eau furent entrées dans le tuyau, je le replongeai dans le vif argent, & ces goutes montant en haut couvrirent le ſommet de la colonne mercuriale. J'étois donc curieux de voir, ſi ce peu d'eau n'empêcheroit pas l'apparition de la lumiere. Effectivement, elle l'empêcha ſi bien, qu'avec les plus violens balancemens il n'y eut pas moyen de produire la moindre trace de lumiere. J'eſſaiai après cela la même choſe avec l'eſprit de vin rectifié, dans la penſée, qu'étant inflammable lui-même ; il aideroit peut-être plûtôt à produire notre lumiere qu'à la détruire : mais en vain, car quelques goutes d'eſprit de vin n'eurent pas plûtôt occupé le ſommet de la colonne mercuriale, que la lumiere, qui paroiſſoit auparavant avec toute la vivacité poſſible aux moindres ſecouſſes du tuyau, ceſſa de paroître, même aux plus grands balancemens. D'où je conclus, que toute humidité, & toute matiere hétérogene, peut, ou boucher les pores du vif argent pour empêcher l'élancement de la matiere du premier élement, comme fait la pellicule, ou du moins arrêter en partie la grande rapidité, avec laquelle le premier élement doit être mu, pour exciter de la lumiere : car il eſt viſible qu'une matiere étrangère, occupant déja un peu d'eſpace, immédiatement au deſſus de la colonne mercuriale, là où ſe doit faire le rendez-vous de la matiere du premier élement pour ſe joindre enſemble ; il eſt, dis-je, viſible, qu'elle ne peut pas ſe mouvoir conjointément, ni par conſéquent avec la rapidité,

qui lui eſt ordinaire quand elle eſt ſeule, ſans paſſer au travers des pores d'une matiere plus groſſiere.

Je m'arrête ici, Monſieur, pour vous donner le loiſir d'y penſer auſſi; afin que ſi vous trouvés que mes penſées aient quelque vraiſemblance, vous en faſſiés part, comme j'ai dit, à l'Académie. Je ſouhaiterois, que quelqu'un des Académiciens prit la peine de faire un ou deux Barometres, de l'une & de l'autre façon, & qu'on en confrontât l'effet avec celui du Barometre du feu M. PICARD. J'en apprendrai le ſuccès avec plaiſir. Mandez-moi auſſi, ſi vous ſavés de quelle maniere a été rempli ce Barometre de M. PICARD; car l'Auteur du petit Traité, que j'ai allegué, dit que c'eſt un tuyau recourbé. Or comme il eſt difficile de remplir les tuyaux recourbés par la maniere ordinaire, je commence à ſoupçonner qu'il a peut-être été rempli par le moyen du ſuccement, ſelon ma premiere méthode, ou par le moyen de l'extraction de l'air, ſelon la ſeconde, ou par une ſemblable. Si cela étoit, il donneroit un grand poids à mes penſées. Je ſuis, &c.

N°. LXIII.

NOUVEAU PHOSPHORE,

Par MR. BERNOULLI *Profeſſeur à* Groningue;

Extrait d'une de ſes Lettres écrite de *Groningue le* 6. *Novembre* 1700.

LA raiſon, Monſieur, pour laquelle j'ai un peu tardé à répondre à vôtre derniere du 4 Septembre, c'eſt qu'il m'a fallu faire quelques nouvelles expériences, pour ſatisfaire aux objections que vous me faites de la part de quelques-uns des Meſſieurs de l'Académie: car ces objections ne m'ont pas empêché de pourſuivre ma découverte touchant la lumiere du Barometre, que je prétens encore être generale. Au con-

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris 1701. pag. 1.

traire, elles m'ont donné occaſion d'en faire une nouvelle, bien plus importante & plus curieuſe : elle conſiſte à faire du mercure un Phoſphore portatif & perpétuel, que je puis tranſporter & envoyer, commodément & ſans danger, par tout où je voudrai, & en tout temps; car il durera éternellement, ſans que ſa lumiere, à la force de laquelle celle du Barometre n'eſt pas à comparer, ſe diminue jamais. Comme cette découverte, quoique fort facile, ainſi que vous le verrez ci-après, a été tirée des principes, par leſquels j'ai crû, & je crois encore, avoir expliqué la lumiere du Barometre; j'ai tout ſujet d'être perſuadé que je ne me ſuis pas tant égaré dans mon raiſonnement, comme vous penſez peut-être, avec ceux de vos Meſſieurs; qui attribuent la lumiere de mes Barometres à la nature de mon vif argent; car vous ne dites mot ſur l'explication que j'en avois donnée : c'eſt apparemment que vous l'avez priſe pour un jeu d'eſprit, voyant que mes expériences, refaites par quelques-uns de vos Meſſieurs, n'avoient pas eu le ſuccès ſouhaité; & qu'au contraire, le Barometre de M. *le Maréchal de* VILLEROY, que *Mylord* PORTLAND lui avoit donné, faiſoit de la lumiere, même après l'avoir rempli de ſon vif argent à la maniere ordinaire. Ce ſont-là des objections, je l'avouë, leſquelles ſemblent détruire toutes mes raiſons. J'y devrois donc répondre, ſi je veux maintenir mon invention; mais que dirois-je ? Si j'avois été préſent à ces expériences, j'aurois peut-être remarqué cent circonſtances, dans leſquelles on n'aura pas aſſés bien obſervé ma méthode de remplir le tuyau : Par exemple, la maniere de le remplir par le moyen d'une bourſe de cuir, que vous dites équivaloir à la mienne, a pourtant cela de différent, que c'eſt ici le mercure qui doit pouſſer l'air devant lui, lequel en faiſant quelque petite reſiſtance, peut laiſſer attachées aux côtés du verre quelques reſtes ou bulles d'air, qui ſuffiront déja pour engendrer la pellicule de mercure, que j'ai dit empécher la lumiere; au lieu que par le ſuccement, c'eſt l'air extérieur qui pouſſe le vif argent en haut, lequel ne fait par conſéquent que ſuivre le mouvement

ment de l'air intérieur, qui par ſa raréfaction ſort du tuyau, pour ainſi dire, volontairement. Ce n'eſt pas que je veuille déſapprouver abſolument cette maniere de remplir le Barometre par le moyen d'une bourſe de cuir : je m'imagine qu'elle doit être aſſés bonne pour y exciter de la lumiere. C'eſt donc une autre faute qui ſe gliſſe dans les circonſtances : peut-être que le tuyau dont on ſe ſervit, n'étoit pas aſſés ſec ni aſſés net ; car la moindre humidité, ou graiſſe, empêche l'apparition de la lumiere. Ce tuyau étoit auſſi trop menu, n'ayant (dites-vous) qu'une ligne & demi de diametre intérieur : Les plus amples tuyaux ſont les meilleurs pour cet effet, comme je l'ai reconnu par expérience. La raiſon en eſt évidente ; car outre que le mercure dans un tuyau large peut balancer bien plus librement, que dans un étroit, où le frottement du mercure contre le verre diminue la vîteſſe de la deſcente : la pellicule, qui couvre le mercure, (s'il s'en forme une,) doit être auſſi plus épaiſſe dans un tuyau étroit que dans un large ; parce que ne pouvant s'étendre en large, elle s'épaiſſit en hauteur.

Pour ce qui eſt de l'autre expérience, je doute qu'on ait pû venir à bout de remplir le tuyau de mercure avec la bouche comme moi, ſans qu'on y ait laiſſé entrer un peu d'haleine, ou de ſalive, étant très-difficile de l'empêcher, vû que d'autres n'y ont pû réüſſir. Il faut une adreſſe ſinguliere. Pour moi, il ne m'eſt pas difficile de le faire, pouvant d'ailleurs, par je ne ſai quelle habitude, tirer, avec la bouche, d'un petit récipient, $\frac{7}{8}$ de l'air qu'il contient, en ſorte qu'il n'y en reſte qu'une huitieme partie, & même ſans me trop efforcer.

J'ai encore d'autres conjectures, qui me rendent ſuſpectes les expériences dont vous me parlés ; mais comme je n'y ai pas été préſent, je n'en puis rien dire de certain : j'eſpere cependant que ſi ces Meſſieurs veulent faire pour la ſeconde fois l'eſſai de mes expériences, en obſervant bien ce que je viens de dire, ils auront un meilleur ſuccès. Mais j'aimerois mieux qu'on le fît de nuit que de jour, quoique dans l'obſcurité ;

rité ; car vous ſavez, que ſi de jour on entre ſubitement dans un lieu obſcur, les yeux étant encore éblouïs de la trop grande clarté du jour, on ne s'apperçoit pas ſi bien d'une foible lumiere, telle qu'eſt celle du Barometre, quoique d'ailleurs la nuit elle ſoit aſſez vive.

Le Barometre de M. DE VILLEROY, que vous dites avoir fait de la lumiere, même après avoir été rempli à l'ordinaire, me fait, je vous avouë, un peu de difficulté ; mais je voudrois l'avoir vû remplir ; je ne doute pas que je n'y euſſe pû trouver de quoi répondre : peut-être qu'en y jettant le vif argent, on a tenu le tuyau fort obliquement à l'horiſon, pour laiſſer couler doucement les goutes de vif argent, comme dedans un canal ; ce qui aura empêché l'air de le tant infecter qu'il auroit fait, ſi l'on en eût laiſſé tomber les goutes verticalement, avec impétuoſité. En effet, après avoir rempli de cette maniere un tuyau de mon vif argent ; j'y ai apperçû de la lumiere plus qu'à l'ordinaire, mais toujours bien moins que par les manieres du ſuccement, ou de la machine du vuide. En tout cas, pourquoi ne pourrois-je pas dire que le vif argent du Barometre de M. DE VILLEROY eſt ſi extraordinairement bien purifié, qu'il n'y a plus de matiere hétérogène, dont l'attouchement de l'air puiſſe former une pellicule ? Et ainſi ma maniere d'expliquer la cauſe de la lumiere du Barometre en ſeroit plûtôt confirmée que détruite.

Au reſte, ſi mon explication n'étoit pas la véritable, & que ce fût à la nature particuliere de mon vif argent, & non à la maniere dont j'avois remplis les tuyaux, qu'il fallût attribuer la production de la lumiere ; dites-moi, je vous prie, pourquoi mon Barometre ordinaire, rempli à la façon commune, quoique fortement ſecoué, ne fait que peu, ou point, de lumiere ? Au lieu que les autres tuyaux, remplis à ma façon du même vif argent, font une lumiere exquiſe au moindre balancement ? J'en fis encore pour la ſeconde fois pluſieurs épreuves dès que j'eus reçu vôtre lettre. Et pour m'aſſûrer entierement que cette lumiere n'étoit pas l'effet d'une proprieté ſinguliere

de

de mon vif argent, que tout autre n'eût pas; j'en empruntai d'autre, avec lequel je refis les mêmes expériences, & avec le même ſuccès qu'avec le mien. Or il eſt moralement impoſſible, que ce ſecond vif argent ſoit préciſément de la même nature que mon premier; puiſque (ſelon qu'on le prétend,) ce doit être une qualité ſi rare, qu'entre cent ſortes de mercures, on n'en trouvera peut-être pas un qui faſſe un tel effet.

Pour venir préſentement à la découverte de mon nouveau Phoſphore; j'ai penſé qu'une des principales raiſons, pour leſquelles la pellicule empêche l'apparition de la lumiere dans les Barometres, pouvoit être la trop grande uniformité du mouvement du mercure, dans un tuyau ſi uniforme. Car en montant & en deſcendant ainſi le long d'un tuyau cylindrique, ſa pellicule ne doit jamais changer d'épaiſſeur, ni ſe déchirer; mais au contraire demeurer toûjours attachée à ſa ſurface ſupérieure, avec laquelle elle monte & deſcend, ſans la quitter jamais: de ſorte qu'il ne s'y fait point d'ouverture, par laquelle la matiere du premier élement (comme je l'ai appellée avec M. DESCARTES,) puiſſe ſortir des pores du mercure, de la maniere que j'ai dit dans ma derniere Lettre. Or étant ſi difficile d'éviter cette pellicule des Barometres, remplis même ſelon mes manieres, j'ai conclu, que nonobſtant cette pellicule (pourvû qu'elle ne fût pas trop épaiſſe) la lumiere devoit pourtant paroître, ſi par quelque moyen je pouvois la faire crever, ou la diſperſer en pièces par le mouvement du mercure: ce qui m'a fait juger, que rien ne ſeroit plus propre pour cet effet qu'un mouvement très-violent, irrégulier, & non uniforme, du mercure enfermé dans un verre un peu large, & d'une figure inégale, dont on auroit vuidé l'air le mieux qu'il auroit été poſſible. Ce raiſonnement fut confirmé par une heureuſe expérience, qui fait le ſujet de ma découverte: la voici.

Je pris une phiole nette & claire contenant environ demi-chopine, & auſſi aſſés forte pour ſoûtenir l'agitation du mercure;

j'y mis 5 à 6 onces de mercure bien purgé, après cela je cimentai ſur le col de la phiole un robinet fort exact, que j'appliquai enſuite à la machine du vuide, pour tirer l'air de la phiole; ce qu'ayant executé le plus ſoigneuſement qu'il me fut poſſible, je fermai le robinet, pour empêcher que l'air ne rentrât dans la phiole, étant ſéparée de la machine du vuide: voilà tout l'artifice.

Voulant donc eſſayer ſi j'avois raiſonné juſte, je portai, le même ſoir, la phiole dans l'obſcurité, & la tenant ferme par le col, je commençai à l'agiter fortement (comme on fait en rinçant une bouteille) pour donner auſſi une grande agitation au vif argent. Voilà que tout auſſi-tôt la phiole parut pleine d'un feu, dont la lumiere n'étoit ni interrompuë, ni entrecoupée, comme celle du Barometre, mais qui duroit tant que le mercure étoit en agitation, & de plus avec tant de vivacité, qu'elle me faiſoit aiſément voir les viſages des Spectateurs, juſqu'à les reconnoitre; j'ai réïteré pluſieurs fois cette expérience, avec plus d'une ſorte de mercure, & toûjours avec le même ſuccès: excepté lorſque je n'ai pas aſſés exactement tiré l'air de la phiole, ou que j'y en ai laiſſé rentrer un peu; car alors non ſeulement la lumiere paroiſſoit beaucoup plus foible, mais elle s'affoibliſſoit de plus en plus, nonobſtant l'agitation continuelle de la phiole, même juſqu'à diſparoître entiérement. Après cela, il n'y avoit plus moyen de la faire reparoître, à moins qu'on ne tirât de nouveau l'air de la phiole.

Ayant donc examiné au jour la cauſe de cet affoibliſſement de lumiere, j'ai trouvé toute la ſurface du mercure couverte d'une pellicule, non ſeulement viſible, mais ſi épaiſſe, qu'elle reſſembloit à une pâte pêtrie de pouſſiére de terre; nonobſtant qu'avant l'agitation, la phiole fût très-nette par dedans, & la ſurface du mercure polie comme la glace d'un miroir. D'où j'ai jugé que l'air agité, quoiqu'en petite quantité, peut extrêmement infecter le mercure, & que c'eſt-là la raiſon pour laquelle, à meſure que cette pâte ſe forme, la lumiere s'affoiblit, & pour laquelle elle s'évanouït auſſi tout à fait, quand

cette pâte acquiert une ſi grande conſiſtence, qu'elle ne peut plus être miſe en piéces, quelques violentes agitations que l'on donne au vif argent. C'eſt auſſi par-là qu'on peut connoître ſi la phiole eſt bien vuidée d'air, ou non: car ſi elle eſt bien vuidée, non ſeulement la lumiere ne s'affoiblit pas, & le mercure ne ſe couvre pas d'ordures; mais la lumiere devient même plus exquiſe avec le temps, & la pellicule du mercure (s'il en a eu au commencement) ſe diſſipe entiérement: de ſorte que le mercure ſe polit enfin ſi bien, par le fréquent uſage, qu'il n'y reſte plus aucune tache, & quand cela arrive, alors la lumiere eſt dans ſon plus haut degré de vivacité, & paroitra toûjours avec la même force toutes les fois qu'on agitera la phiole dans l'obſcurité.

Je ne croi pas qu'on ait trouvé juſqu'à preſent un Phoſphore perpétuel, c'eſt à dire, qui avec le temps ne ſe conſume pas, ou du moins qui ne perde enfin ſa vertu; mais en voilà un preſentement, qui doit durer autant que l'on voudra, ſans rien perdre de la ſienne, pouvû que la phiole demeure toûjours bien bouchée, & que l'air n'y entre pas: car le mercure enfermé dans le vuide n'eſt ſujet à aucune altération, en ſorte qu'il n'y a point de raiſon, pourquoi il ne devroit pas faire ſon effet en tout temps.

Il eſt vrai que le robinet, que j'avois cimenté ſur la phiole avec laquelle je fis la premiere expérience, commençoit à ſe corrompre par le vif argent, parce qu'il étoit d'airain; mais j'ai depuis trouvé le ſecret de boucher la phiole, après en avoir tiré l'air ſans avoir beſoin de robinet. Entre pluſieurs moyens, qui me ſont venus dans l'eſprit, le plus ſûr & le plus expéditif, eſt de boucher premierement la phiole, avant que d'en tirer l'air, avec un bouchon de liége, & avec de la cire propre pour cela par deſſus; puis de faire un petit trou, avec une épingle, au travers de la cire & du liege, pour donner de l'ouverture à l'air qu'on va tirer de la phiole. Cela étant fait, on enfermera la phiole dans un récipient, dont on tirera enſuite l'air, le plus exactement qu'il ſera poſſible, pour le tirer en

même temps de la phiole, par l'ouverture du petit trou: la plus grande difficulté eſt maintenant de fermer ce petit trou, avant que de laiſſer rentrer l'air dans le récipient: Pour pratiquer cela aiſément, il faut expoſer le récipient ainſi vuidé au Soleil, & par le moyen d'un verre convexe, faire un peu fondre l'extrémité de la cire autour du trou: De cette maniere le trou ſe remplit de cire fonduë, & ſe bouche parfaitement bien ſoi-même. Cela fait, on peut bien, *ex abundanti*, appliquer encore une fois le récipient à la machine du vuide, pour voir ſi, pendant l'opération, il ne s'eſt point gliſſé dans le récipient quelque peu d'air, par quelque ouverture inviſible. Le plus ſûr eſt encore de tenir, pendant l'opération tous les endroits du récipient, par leſquels il pourroit ſe gliſſer de l'air, enfoncés dans l'eau. Etant donc aſſûré que tout eſt bien fait, on laiſſera rentrer l'air dans le récipient, pour en ôter la phiole; laquelle ainſi préparée, ſervira enſuite de Phoſphore, toutes les fois qu'on voudra prendre la peine de l'agiter dans un lieu obſcur. Je garde, depuis 5 à 6 ſemaines, deux de ces phioles remplies de deux diverſes ſortes de vif argent, leſquelles font admirablement bien leur effet. Les curieux, auxquels je les ai montrées, ont avoué qu'ils n'ont rien vû de plus rare: effectivement toute la capacité de la phiole eſt en flamme, & le mercure reſſemble à une liqueur ardente. Si j'avois occaſion, je pourrois vous envoyer un de ces nouveaux Phoſphores; car on les peut aiſément tranſporter, ſans aucun danger, le verre en étant bien épais, & le col bien bouché. Cependant j'eſpére que vos Meſſieurs ne manqueront pas de les faire auſſi eux-mêmes, ſi vous voulés prendre la peine de communiquer cette Lettre à l'Académie.

Mais il faut bien obſerver ces trois choſes: 1°. Que la phiole ſoit très-nettre & ſeche par dedans; & ſi on en doute, il vaut mieux en prendre une toute neuve, telle qu'elle vient de la Verrerie. 2°. Qu'on ne remuë pas beaucoup le mercure, avant que l'air ſoit tiré de la phiole. 3°. Qu'on vuide l'air de la phiole le plus ſoigneuſement qu'il ſera poſſible.

Ce

Ce 3e point doit être obſervé avec toute la préciſion imaginable; autrement il ne ſe feroit point de Phoſphore, ou s'il s'en faiſoit un, il ſeroit foible & ne dureroit pas longtemps. Il faut donc que la machine du vuide ſoit excellente; la mienne (qui a été faite en Hollande) l'eſt à un point, que le piſton étant tiré depuis le fond du cylindre juſqu'à l'embouchûre, & demeurant dans cet état pendant 24 heures, il ne ſe gliſſe pas la 10000e partie de l'air dans la cavité du cylindre, comme je l'ai reconnu par expérience; marque certaine d'une très-grande juſteſſe. Quoique mon Phoſphore ſoit déja aſſés recommandable par la ſeule curioſité; j'entrevois cependant encore une maniere d'en tirer quelqu'uſage, dont je vous ferai part une autre fois. Je ſuis, &c.

N°. LXIV.

LETTRE DE M. BERNOULLI

Profeſſeur à Groningue, *touchant ſon nouveau Phoſphore.*

Groningue, ce 5 Juillet 1701.

MONSIEUR,

AYANT été occupé depuis quelque temps à faire de nouvelles expériences, je n'ai pû répondre plûtôt à vôtre derniere du 26 Mai. J'ai lû l'écrit que vous m'avez envoyé †, mais je ne ſai ſi je dois être fâché du mauvais ſuccès des expériences qu'il contient ſur la lumiere du mercure; il me ſemble que j'ai ſujet de me féliciter plûtôt moi-même, de ce que perſonne n'a pû encore effectuer ce que j'effectuë fort aiſément, ſoit

Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences de Paris. 1701. pag. 135. Edit. de Paris. pag. 178. Ed. de Holl.

† Cet Ecrit, qui étoit de Mr. HOMBERG, contenoit quelques objections contre le Phoſphore de Mr. BERNOULLI, fondées principalement ſur ce qu'on n'avoit pu réüſſir à *Paris*, à rendre le mercure lumineux, d'où l'on concluoit, que la lumiere du mercure, que Mr. BERNOULLI avoit emploïé, venoit de quelque qualité accidentelle, & particuliére à ce mercure.

ſoit par mon addreſſe (ſi j'en ai), ſoit par la bonté de ma Machine pneumatique. Car en effet, n'eſt-il pas ſurprenant que ces expériences de l'Académie n'aient jamais réüſſi, & que moi je n'aie jamais manqué? L'écrit porte, que *c'eſt quelque accident particulier, arrivé à quelque mercure, qui le peut rendre capable de luire en un lieu vuide d'air.* Mais je vous prie de conſiderer que j'ai fait mon Phoſphore, avec 5 ou 6 ſortes de mercures, que je ſçai être apportés ici de divers endroits & en divers temps, leſquels cependant m'ont tous fort bien réüſſi; hormis un ſeul, qui n'a pas donné de lumiere au commencement, mais que j'ai rendu luiſant, en le lavant, comme je dirai cy-après.

Je ne trouve pas néceſſaire de répondre par ordre aux expériences de cet Ecrit, ni aux réflexions & conſéquences qu'on en tire. Pour finir la diſpute, je prie l'Académie de me vouloir envoyer du même vif argent, dont on s'eſt ſervi ſans ſuccès; je prétends en faire un Phoſphore auſſi bon que ceux que j'ai déja faits juſqu'à preſent. Et afin que l'Académie puiſſe être aſſûrée, que c'eſt le même mercure qu'on m'aura envoié, dont j'aurai fait le Phoſphore; je le ferai en preſence de témoins autentiques, & je le renverrai à l'Académie. Ce qui me rend ſi hardi, c'eſt que je vois des circonſtances, dont l'Ecrit fait mention, leſquelles me font croire que ces expériences n'ont pas été faites avec aſſez d'exactitude; & que par conſéquent la mauvaiſe réüſſite en doit être imputée uniquement, ou à la Machine de l'Académie, qui n'eſt pas peut-être des plus juſtes, ou à quelque mépriſe. L'une de ces circonſtances, eſt que le mercure, dans une phiole vuidée d'air, étant fortement ſecoüé, donnoit à la vérité un peu de lumiere fort foible, qu'elle étoit forte au commencement, qu'elle diminuoit peu à peu, ſans néanmoins qu'il ſoit rentré d'air dans le vaiſſeau; & qu'après avoir laiſſé rentrer l'air, & puis vuidé ſur le champ une ſeconde fois la machine, ce mercure n'avoit plus donné aucune lumiere, quoique ſecoüé fortement. Je vois par-là que le mercure n'a pas été purifié comme il faut de la ma-

tiere

tiere hétérogéne, de laquelle aura été formée cette pellicule, dont j'ai parlé dans mes précédentes, par le concours de l'air qui ſera reſté dans la phiole, qu'on croyoit avoir aſſez vuidée: c'eſt pour cela que la lumiere étoit ſi foible, & s'évanoüiſſoit peu à peu; au lieu qu'elle auroit été très-vive & durable, ſi la phiole avoit été bien vuidée, & le mercure bien purgé; car j'ai éprouvé, plus d'une fois, que le mercure enfermé dans un vaiſſeau vuide d'air, où il luiſoit beaucoup pendant long-temps avec une égale force, a ceſſé de luire, en perdant ſa lumiere peu à peu, dès que j'y ai laiſſé rentrer un peu d'air. Quoiqu'il en ſoit, on peut conclure des expériences qu'on m'objecte, que le mercure qui n'étoit pas luiſant dans les Barometres (car comme l'Ecrit ne porte pas qu'on s'y ſoit ſervi de differens mercures, je crois qu'on n'y a employé que du même;) l'étoit au moins dans une phiole vuide d'air: ſi l'on avoit donc fait l'expérience avec le Barometre ſeulement, & qu'on eût prononcé que ce mercure n'eſtoit pas lumineux, ne ſe ſeroit-on pas trompé? puiſqu'il l'étoit effectivement. Il en eſt de même de la ſeconde expérience, par laquelle on n'a plus vû de lumiere dans la même phiole, après l'avoir vuidée une ſeconde fois; parce que (ſuivant l'Ecrit) peut-être en faiſant rentrer l'air dans le vaiſſeau, il s'eſt attaché un peu de l'humidité de cet air aux parois de ce vaiſſeau; ce qu'on reconnoit avec moi être nuiſible à la lumiere du mercure. Voyons donc ce qui ſeroit arrivé, ſi dès la premiere fois il ſe fût gliſſé inſenſiblement quelque humidité dans la phiole; il n'y a point de doute que la lumiere ne paroiſſant point dès cette premiere fois, on n'eût dit que ce mercure n'eſt point lumineux du tout, quoique c'eût été la faute de celui qui auroit fait l'expérience, & non pas celle du mercure. Je dis cela, pour faire remarquer que les expériences qui ne réüſſiſſent pas, ne prouvent rien pour ſoutenir une propoſition négative; parce qu'on peut toûjours douter qu'en faiſant ces expériences, on n'ait commis quelque mépriſe.

Je ne dirai rien touchant les expériences ſur le Barometre; tant parce que j'ai déja repondu dans ma ſeconde Lettre à ces mêmes objections, que parce que je néglige entiérement de faire d'autres obſervations ſur la lumiere du Barometre, depuis que j'ai trouvé le moyen de rendre le mercure lumineux dans une phiole; ce qui eſt à mon avis infiniment plus curieux, dautant que cela fournit une eſpèce de Phoſphore perpétuel, & commode à tranſporter, outre que la lumiere en eſt beaucoup plus vive que celle du Barometre: je dirai ſeulement quelque choſe ſur le ſecond Barometre fait dans la Machine pneumatique de l'Académie. On a raiſon de dire *que le mercure n'eſt pas monté dans ce dernier Barometre à la même hauteur qu'il monte ordinairement dans un Borometre bien fait, n'étant pas poſſible de vuider par cette maniere tout l'air du dedans du tuyau;* parce que le poids du mercure preſſant ſur le bout ouvert du tuyau empêche enfin la ſortie de l'air. Je vois par-là qu'on a laiſſé tremper le bout ouvert du tuyau trop profondément dans le mercure; au lieu que lorſque je fis cette expérience, je donnai telle ſituation au tuyau, que ſon bout étoit preſque à fleur du mercure, & fort peu enfoncé: je pris, pour cet effet, un vaiſſeau un peu plat & large, afin qu'en laiſſant rentrer l'air qui par ſa preſſion a fait monter le mercure dans le tuyau, ce mercure ne vînt pas à manquer. De cette maniere j'ai élevé le mercure juſqu'à la hauteur de 26 pouces, en ſorte que peu s'en falloit qu'il ne montât à la hauteur ordinaire. Quoiqu'il ſoit donc vrai, qu'il n'eſt pas abſolument néceſſaire que le mercure ſoit dans un lieu parfaitement vuide d'air, pour devenir lumineux, comme on le remarque fort bien dans l'Ecrit en queſtion; il faut pourtant ſçavoir, qu'il ne reſtoit pas tant d'air dans le tuyau comme on a peut-être penſé; & qu'outre cela la lumiere, quoique très-vive la premiere nuit, s'eſt affoiblie notablement les nuits ſuivantes; ſans doute à cauſe de ce peu d'air qui eſt reſté dans le tuyau, ce que je n'ai remarqué qu'après ma derniere Lettre. D'où il s'enſuit, que plus le vuide ſera parfait, plus la lumiere ſera exquiſe & durable.

ble; en ſorte que le mercure dans une phiole parfaitement vuide d'air (ou du moins qui le ſoit juſqu'à la dix-milliéme partie ou davantage, car il eſt impoſſible de tirer l'air totalement de quelque vaiſſeau que ce ſoit,) luira le plus vivement qu'il eſt poſſible; & bien loin que la lumiere s'affoibliſſe, elle augmentera juſqu'à certains degrés, & puis elle ſubſiſtera, & ſe fera voir avec une égale force, toutes les fois qu'on remuëra la phiole, pouvû que d'ailleurs le vif argent ſoit bien purifié de ſes ordures. J'avoüe que c'eſt une conjecture qui me paroit véritable, quand on ſoupçonne que mon premier mercure, (qui dans le moment qu'il eſt expoſé à l'air commence à ſe couvrir d'une pellicule, qui devient comme de la pouſſiere, s'il eſt remué,) n'eſt pas auſſi pur qu'il le pourroit être: je veux bien demeurer d'acord que cette pellicule ſe forme de la matiere étrangere, ſoit métallique, ſoit autre, laquelle vient du dedans du mercure, plûtôt que de l'air: cependant cela n'infirme point l'explication generale, que je donne de la production de la lumiere du mercure, & ne détruit même pas mon idée de la generation de la dite pellicule: car il eſt toûjours conſtant, comme j'ai remarqué dans mes précedentes, que l'air, s'il n'en eſt pas toûjours la cauſe materielle, il en eſt du moins la cauſe efficiente; vû que ce même mercure, tandis qu'il eſt enfermé dans le vuide, demeure toûjours clair & poli, quoique remué fortement, & auſſi-tôt qu'on y admet l'air, il ſe trouble à ſon ordinaire: mais j'ai trouvé le ſecret de le purifier de toutes ſes ordures, ſi bien qu'il ne ſe trouble plus, quand même il eſt expoſé à l'air & agité fortement; je mets 4 ou 6 onces de mercure dans une phiole, & je verſe deſſus de l'eau commune, juſqu'à ce qu'elle couvre le mercure à l'épaiſſeur de deux doigts ou environ; puis je ſecouë fortement & long-temps la phiole, comme pour la rinçer; j'ôte l'eau, qui en devient toute ſale & noire, de deſſus le mercure, & j'y en remets de la fraîche & recommence de ſecoüer la phiole, juſqu'à ce que l'eau devienne derechef ſale; cela étant, je change d'eau la ſeconde fois & fais la même choſe: ce qu'é-

tant réïteré juſqu'à ce que l'eau ne ſe noirciſſe plus, ou fort peu; je ſeche le mercure, en le faiſant paſſer pluſieurs fois par un linge net: ſi on prend de l'eſprit de vin à la place de l'eau, on aura plûtôt achevé de nétoyer le mercure. De cette maniere, je lui ai ôté toute ſaleté, enſorte qu'étant remué tant qu'on veut à l'air libre, il ne laiſſe plus aucune trace de pellicule, ni de pouſſiere, ſi ce n'eſt qu'il ſe ternit un peu au bout de quelques jours, comme ſi c'étoit par l'haleine; ce qui vient apparemment par l'attouchement de l'air qui eſt toûjours un peu infecté d'humidité. Le Phoſphore, que j'ai fait de ce mercure ainſi nétoyé, a été beaucoup plus beau que les autres faits auparavant; c'eſt ce qui confirme mon explication de la production de cette lumiere, que j'ai dit être empêchée par la matiere heterogene, qui occupe le deſſus du mercure.

J'ai dit cy-deſſus que j'ai éprouvé 5 ou 6 ſortes de mercures, qui tous m'ont réüſſi; dont quelques uns ſe ſont auſſi infectés de pouſſiere par le remuëment, comme mon premier, & les autres ſont demeurés clairs & polis, comme celui de l'Academie. Entre ceux-ci il s'en eſt trouvé un, qui au commencement n'a point donné de lumiere: mais je m'en étois douté, avant même que d'en avoir fait l'eſſai: car il me paroiſſoit plus épais, ou moins fluide, que les autres; en ce qu'étant agité, il ne faiſoit point de boüillons ſur ſa ſuperficie, comme j'ai remarqué dans les autres, ce que j'ai attribué à ſa lenteur, qui empêche la ſeparation des parties. C'eſt ce qui m'a fait naitre le ſoupçon, qu'il y avoit peut-être dans ce mercure là quelque matiere huileuſe ou ſulfureuſe, qui, à cauſe de ſa viſcoſité, ne ſe manifeſte pas ſur la ſurface, comme font les autres ordures, qui ſe ſeparent plus aiſément des petites parties du mercure pour être jettées dehors: ainſi cette matiere huileuſe, demeurant toûjours mêlée dans l'interieur du mercure, on prendra ce mercure pour très-pur, quoiqu'il ne le ſoit nullement, & moins encore que celui qui ſe couvre d'abord d'une pellicule viſible: en effet l'ayant bien lavé de la maniere ſuſdite avec de l'eſprit de vin, plûtôt qu'avec de l'eau, parce

que je penſois qu'il ſeroit plus propre que l'eau pour ôter la viſcoſité; le mercure, qui n'étoit point lumineux; devint auſſi luiſant que tout autre: mais ce qui eſt encore plus admirable, le premier vif argent, qui ſe troubloit au moindre mouvement, eſt devenu ſi pur par ce lavement (quoique d'eau ſeulement), que je lui ai vû faire de la lumiere, même dans une phiole pleine d'air naturel, ſans en avoir rien tiré. Il eſt vrai que la lumiere n'en étoit pas à beaucoup près ſi vive que celle qui ſe fait dans le vuide, & elle ne paroiſſoit qu'en forme d'étincelles ſéparées, qui naiſſoient ſucceſſivement & périſſoient preſque au même moment; au lieu que la lumiere dans le vuide eſt comme une flamme continuelle, qui dure ſans ceſſe, pendant que le mercure eſt en agitation. J'ai conclu de cette expérience, que le mercure, s'il eſt parfaitement purifié, peut laiſſer ſortir de ſes pores la matiere ſubtile, (que j'ai appellée avec M. Descartes du nom de premier élement) en tant d'abondance à la fois, que malgré la reſiſtance de l'air, elle a encore aſſez de mouvement, pour produire quelque lumiere. Qu'on prenne donc la peine de bien laver le mercure, qu'on dit n'être pas lumineux, & après l'avoir bien ſeché (car la moindre humidité cauſeroit un mauvais ſuccès), qu'on le verſe dans une phiole nette par dedans & bien ſeche, dont on tire enſuite l'air ſoigneuſement; je ſuis aſſuré qu'on réüſſira: Quoiqu'on penſe que ce mercure eſt parfaitement pur, parce qu'il demeure clair après l'agitation, j'ai pourtant remarqué, qu'il peut être infecté d'une matiere gluante cachée, qui fermant entierement ſes pores, ou du moins les rendant roides, empêchera, ou retardera la ſortie des particules qui doivent cauſer la lumiere. Je dis que la roideur des pores peut empêcher, ou retarder, la ſortie de ces particules; car il eſt bien viſible, que quoique le mercure ſoit en grande agitation, ſi pourtant les pores de ſes parties ne ſont pas aſſez flexibles pour changer de figure, la matiere du premier élement n'en pourra pas être chaſſée; car il faut que les pores ſe rétreſſiſſent ſouvent, pour que cette matiere puiſſe

ſortir. Cela étant, il y a beaucoup d'apparence que le mercure, qu'on dit être devenu lumineux par la diſtillation au travers de la chaux vive, eſt du nombre de ceux qui ont les pores ainſi roides, à cauſe de quelque matiere ſulfureuſe, ou gluante. Et partant, bien loin d'être du ſentiment de ceux qui croïent que ce ſont des *parcelles ignées*, que la chaux vive a données au mercure en paſſant, qui produiſent la lumiere; je ſuis fort perſuadé au contraire, que la véritable raiſon en eſt la ſeule purification; de ſorte que la chaux n'y a rien contribué que ſes pores, par leſquels le mercure paſſant a laiſſé en arriere toute la matiere étrangére & gluante, & s'en eſt ainſi délivré: on n'a donc rien fait autre choſe, par la diſtillation, que ce que j'ai fait par un ſimple lavement. En effet ces corpuſcules ignées me ſemblent fort paradoxes, par pluſieurs raiſons, dont je ne dirai que quelques-unes.

1°. Il faudroit que ce nouveau Phoſphore perdît enfin ſa vertu, parce que ces parcelles ignées deviendroient enfin inutiles par le fréquent uſage, comme on voit arriver aux autres Phoſphores, qui ſont lumineux par le moyen de telles particules ignées.

2°. Si ces parcelles ignées ſont ſi ſubtiles, qu'elles puiſſent loger dans les petits interſtices du mercure, & paſſer par iceux, comme on le prétend; ſans doute elle pourront paſſer beaucoup plus aiſément par les pores du verre, qui ſont plus amples que ceux du mercure: d'où vient donc, qu'en ſecoüant la phiole, elles ne ſe diſſipent pas d'abord, en s'envolant par les pores du verre, en quelque grande quantité qu'elles ſoient dans le mercure?

3°. On ne pourra pas expliquer non plus pourquoi, dans le Barometre, la lumiere ne paroit que dans la deſcente du mercure: car ſi elle eſt cauſée par ces corpuſcules ignées qui nagent ſur la ſuperficie, pourquoi ne ſont-ils pas leur effet, quand le mercure monte, auſſi bien que quand il deſcend,

s'il

s'il ne faut que du mouvement pour les faire *paroitre ſucceſſivement ſur la ſuperficie du mercure ?*

Or on évite toutes ces difficultés par ma maniere d'expliquer cette lumiere ; car en diſant qu'elle eſt produite par une matiere très ſubtile, qui étant univerſelle & ſe trouvant par tout, ne vient jamais à manquer, on fera voir que ce Phoſphore doit durer perpetuellement, le mercure ne faiſant autre choſe que prêter ſes pores fort étroits, & ſervir de crible à la matiere du premier élement, pour la ſeparer de celle du ſecond & du troiſieme ; (je me ſers de ces termes, parce qu'ils ſont commodes pour m'expliquer,) de laquelle étant délivrée, & après pouſſée hors du mercure par l'agitation qu'on lui donne, elle prend d'abord ſon mouvement rapide, qui lui eſt ordinaire quand elle eſt ſeule & dégagée de toute autre matiere, & produit ainſi dans nos yeux l'effet qui cauſe en nous la ſenſation de lumiere. Donc cette matiere *luminifique*, quoiqu'elle ſoit diſſipée en un moment, elle ne laiſſe pas d'être incontinent ſuivie d'une autre, qui fait le même effet, & ainſi de ſuite ; ce qui durera toûjours. Cette explication ſe verifie aſſez par un de ces Phoſphores, dont j'ai fait l'experience preſque toutes les nuits, depuis environ un an ; & je puis dire de bonne foi, que je n'y ai jamais remarqué aucune varieté ſenſible ; mais bien au contraire que la lumiere en étoit toûjours également ſplendide, comme elle l'eſt encore ; & bien loin qu'elle ait ſouffert quelque diminution, il ſemble qu'elle eſt preſentement un peu plus vive qu'elle n'étoit au commencement ; peut-être parce que le mercure eſt devenu plus fluide, par les frequentes agitations, & que le reſte des ordures s'en eſt ſeparé peu à peu, & s'eſt attaché aux parois du verre, comme le verre qui eſt un peu trouble au dedans, le donne aſſez à connoître ; en ſorte que le mercure, étant totalement purifié, donnera à l'avenir toûjours de la lumiere au plus haut degré de vivacité. Mon explication me paroît d'ailleurs ſi plauſible, que je ſuis pleinement perſuadé, qu'une autre liqueur pure, & auſſi peſante que le mercure, ſi on en

avoit, feroit ſans doute le même effet; enſorte que je crois que l'or feroit le plus propre pour faire de ſemblables Phoſphores, ſi on ſçavoit le moyen de le rendre fluide, ſans perdre de ſa peſanteur ſpecifique : car comme je fais dépendre cet effet de la petiteſſe & flexibilité des pores, il eſt certain que l'or ayant les pores les plus petits entre les corps, il ne lui manque que la flexibilité des pores, qu'on ne pourroit lui procurer que par une parfaite fluidité de ſa maſſe. Peut-être que du plomb fondu, mis dans le vuide, donneroit auſſi de la lumiere, à moins que les ordures, dont il eſt toûjours infecté, ne l'en empêchaſſent.

Pour ce qui eſt du mercure, qu'on dit avoir été rendu lumineux par le Phoſphore liquide artificiel; je crois que ce n'étoit pas le mercure qui a été lumineux, mais les parcelles mêmes du Phoſphore artificiel. Or cela ſeroit arrivé ſans doute à beaucoup d'autres corps, qu'on voit luire par le ſeul frottement du Phoſphore ſolide ; & comme la lumiere en eſt fort peu durable, je m'imagine bien que le mercure, dont on parle ici, n'a pas gardé non plus toûjours cette lumiere empruntée du Phoſphore liquide artificiel; en ſorte que cette lumiere là n'eſt plus de nôtre ſujet.

Par tous ces raiſonnemens, joints aux obſervations que j'ai alleguées, il paroît que les trois conſequences qu'on a tirées, ne peuvent pas ſubſiſter. Car 1°. On voit que le mercure eſt non ſeulement capable de devenir lumineux dans un lieu vuide d'air; mais qu'il eſt déja lumineux en effet, pourvû que ſa lumiere ne ſoit empêchée par quelque cauſe étrangere, ſoit interne, ſoit externe.

2°. On voit que tous les mercures ſont également lumineux, pourvû que derechef leurs lumieres ne ſoient pas empêchées dans les uns plus que dans les autres, par quelques cauſes que ce ſoient. J'ai fait ſur ce ſujet une obſervation remarquable : j'ai pris deux phioles toutes ſemblables & égales, dans leſquelles j'ai mis une égale quantité de mercure, priſe d'une même maſſe; j'ai tiré l'air également, & en une même heure,

de

de chaque phiole. Ne diroit-on pas que la lumiere devroit auſſi paroître également forte dans l'une & dans l'autre phiole; puiſque tout étoit parfaitement, ſelon qu'il ſembloit, égal & ſemblable? Cependant l'effet a fait voir tout le contraire; car l'une de ces phioles faiſoit de la lumiere très-vive, au moindre branlement; mais l'autre n'en donnoit qu'après pluſieurs fortes ſecouſſes, & puis ayant commencé de luire une fois, il ne falloit auſſi que de petits mouvemens, pour faire revenir la lumiere; Et après avoir laiſſé repoſer cette phiole, pendant deux ou trois heures, il falloit derechef la ſecoüer fortement avant que la lumiere commençât de reparoître; au lieu que la premiere phiole a toûjours donné de la lumiere ſans peine. Que dire donc à cela? ſinon que dans une de ces phioles il étoit entré, peut-être, quelque peu d'humidité, quoiqu'imperceptible à mes yeux, ſoit de l'haleine, ou de la ſueur des mains en la maniant; ce qui étoit déja ſuffiſant, pour cauſer une ſi grande difference dans l'apparition de la lumiere. Il ne s'enſuit donc pas, ſi un mercure donne plus de lumiere qu'un autre mercure, qu'il ſoit pour cela plus capable d'en donner que l'autre; car ici, où les mercures étoient pris d'une même maſſe, & par conſequent également capables de luire, ils ne laiſſoient pas de luire differemment.

3°. Enfin, on voit qu'un même mercure, s'il eſt bien préparé, doit toûjours être également lumineux; & que s'il l'eſt tantôt beaucoup, tantôt peu, tantôt point, c'eſt une marque qu'il lui eſt arrivé quelque changement, qui augmente, ou qui diminuë, ou qui empêche l'apparition de la lumiére, laquelle ſans cela ſeroit toûjours la même: témoin le Phoſphore dont j'ai fait mention cy-deſſus, lequel donne de la lumiére depuis un an, ſans aucun changement ſenſible. Je puis confirmer ce que je viens de dire par une autre obſervation, que j'ai faite il y a peu de temps: j'avois une phiole préparée en Phoſphore, qui luiſoit également depuis ſix ſemaines environ; mais ſans l'ouvrir, ni laiſſer rentrer l'air dans la phiole, j'ai brûlé avec les rayons du Soleil, par le moyen d'un verre con-

vexe, une petite miette de liege qui s'étoit ſeparée du bouchon, & qui nageoit ſur le mercure; ce qui a produit un peu de fumée dans la phiole, qui, pour le reſte, demeuroit dans ſon premier état, ſans avoir rien changé: on ne ſçauroit croire combien ce peu de fumée a diminué la vivacité de la lumiére; outre qu'il falloit des ſecouſſes beaucoup plus fortes qu'auparavant pour la faire paroître. Ce qui fait voir que le changement de la lumiere, qu'on a remarqué à l'Academie, ne doit pas être pris pour une qualité eſſentielle, mais pour un effet d'une cauſe arrivée par accident.

Au reſte, je conviens *que tout mercure commun ſe reſſemble parfaitement, comme tout l'or & tout l'argent ſe reſſemble, de quelqu'endroit du monde qu'il vienne, pourvû qu'ils ſoient purs*: car c'eſt là le fondement de mon explication de cette lumiére, pour ſoûtenir qu'elle eſt generale, & qu'elle vient uniquement du mercure, qui donne paſſage à la matiére du premier element, à l'excluſion d'une autre matiere plus groſſiere. Je demeure auſſi d'accord qu'il ſuit de mon explication, que tout mercure doit être lumineux & en tout temps; auſſi eſt-il l'un & l'autre, comme j'ai prouvé juſqu'à preſent, pourvû que la lumiére ne ſoit empêchée par quelque cauſe étrangere, de même que le Soleil eſt toûjours lumineux, quoique ſa lumiére nous puiſſe être ôtée par une éclipſe, ou autre cauſe. Pour finir donc, je conclus que ce n'eſt pas un accident particulier, comme l'on croit, arrivé à quelque mercure, qui peut le rendre capable de luire en un lieu vuide d'air: mais bien au contraire, qu'il eſt naturel & eſſentiel à tout mercure, comme à toute autre liqueur auſſi peſante, ſi on en avoit, d'être lumineux; & ce ſeroit plûtôt un accident particulier arrivé au mercure, que ce qui empêcheroit l'apparition de ſa lumiére. Que ſi après tout cela, on trouve encore des difficultés, ſans pouvoir réüſſir à faire mon nouveau Phoſphore auſſi parfaitement que je le fais; je ne ſouhaiterois plus que d'avoir le même mercure, qui s'éclipſe ſi opiniâtrément; j'eſpère que j'en diſſiperois l'éclipſe, & que j'aurois le bonheur de maintenir à ce mercure

le

le titre grec de *Phoſphorus*, avec autant de juſtice que la Planete de Venus porte le titre latin de *Lucifer*. Ce ſeroit là le moyen de décider nôtre diſpute. Si vous voulez, Mr. communiquer cette Lettre à l'Académie, vous me ferez un vrai plaiſir. Je ſuis de tout mon cœur, &c.

Nº. LXV.

DISQUISITIO CATOPTRICO-DIOPTRICA,

Exhibens Reflexionis & Refractionis naturam, nova & genuina ratione ex æquilibrii fundamento deductam & ſtabilitam,
Auctore Johan. BERNOULLI.

POSTQUAM experientia, haud dubie initio ſola, docuiſſet mirabiles illas radiorum opticorum affectiones, quibus contingit, ut incidentes in ſuperficiem politam corporis opaci, reſiliant in plano ad eam recto, ſub angulis reflexionis æqualibus angulis incidentiæ; item, ut penetrantes oblique ex medio uno in aliud diverſæ conſiſtentiæ, refringantur in plano ad ſuperficiem ambo media dirimentem itidem recto, ſub angulis refractionis a linea perpendiculari & radio refracto factis, quorum ſinus ad ſinus ſuorum reſpective angulorum incidentiæ conſtantem ſervant rationem; illa quidem Catoptrica proprietate jam Veteribus, hac vero Dioptrica, nonniſi Recentioribus demum innoteſcente; varii exinde Philoſophi & Mathematici extitere, qui varias excogitarunt rationes, quibus hos Naturæ effectus explicarent & demonſtrarent: ſed nullus fuit, qui univerſalem applauſum obtinuerit.

Acta Erud. Lipſ. 1701. Janv. pag. 19. Idem Gallice, *Journal des Savans* 1703. 38 Journ. du 19 Nov. p. 596. Edit. de Paris. p. 992. Edit. de Holl.

Duos demonſtrandi modos præ cæteris plauſibiles vulgo circumferunt, CARTESII unum, mere mechanicum, qui compoſitione motuum nititur; alterum FERMATII, qui metaphyſicus eſt, deſumtus a Naturæ per breviſſimas vias operan-

di conſuetudine: nactus tamen eſt uterque ſuos adverſarios. Ut enim objectiones omnes taceam, quibus explicatio *Carteſiana* impugnari ſolet, id unicum multis valde durum videtur, quod per eam ſupponendum ſit, per diaphana, alioquin denſioris conſiſtentiæ, qualia ſunt vitrum & aqua, radium opticum facilius & promptius eniti poſſe quam per aerem. Nec eſt, quod CARTESIUS dicat aërem eſſe magis villoſum, ideoque etiam magis morari radios, quam faciant ſolidiora: quo enim colore aſſeverabit, purum ætherem villoſiorem eſſe aëre craſſo; cum idem accidat radiis ex æthere in aërem, quod ex aëre in vitrum, vel aquam, tranſeuntibus; utrovis quippe modo ad perpendicularem refringuntur. FERMATII vero hypotheſis ſuis quoque premitur difficultatibus, multiſque diſplicet; illis præſertim, qui cauſas finales ex phyſica proſcriptas volunt; quamvis alias nova non ſit: quantum enim ad demonſtrationem æqualitatis angulorum incidentiæ & reflexionis, ea jam uſi ſunt veteres, nimirum PTOLEMAEUS Lib. I. *De Speculis*; item HERO Mechanicus in *Catoptricis*, teſte HELIODORO *Lariſſæo*, qui ejus mentionem facit cap. 13 *De Opticis*, qui autem HERONIS Tractatus temporis injuria interiit. Unde non immerito ſummus noſter LEIBNITIUS (vid. *Act. Erud.* 1682. p. 187) ſuſpicatur, recentiores, FERMATIUM & *Willebrordum* SNELLIUM, in Veterum Geometria verſatiſſimos, eorum principium ex Catoptrica in Dioptricam tantum traduxiſſe. SNELLII enim theorema, cujus meminit *Iſacus* VOSSIUS in ſua diſſertatione *De Lucis natura & proprietate* p. 37. quod ſcilicet ſecantes complementorum angulorum incidentiæ & refractionis conſtantem ſervent rationem, in idem plane recidit cum ipſorum angulorum ſinibus reciproce ſumtis; demonſtrante id acutiſſimo LEIBNITIO, eodem loco ex *Actis* citato; quia et in univerſum verum eſſe facillime demonſtrari poteſt, quod quorumvis angulorum ſinus, ſint complementorum ſuorum ſecantibus reciproce proportionales.

Sagaciſſimus HUGENIUS, haud multis abhinc annis, peculiarem ſuam Catoptrici Dioptricique hujus phænomeni dedit ex-

explicationem, in ſuo limatiſſimo Tractatu *De Lumine*, ex natura undulationis petitam; qua vix quicquam curioſius, acutiuſve excogitari potuiſſet: nec tamen & hæc ad palatum eſt eorum, qui lumen in inſtanti propagari contendunt. Aliarum quarumdam probationum tentamina, præter jam allata, vide in De Chales *Mundo Mathematico* Tom. 2. pag. *536*, ſeq. & pag. *617*; at valde coacta ſunt: videntur enim unice experientiæ accommodata eſſe; ita ut ſi de ea nondum conſtaret, pariter nihil certi ex illis a priori concludere liceret. Quantum ad Robervallii modum refractionem explicandi, qui habetur in *Operibus Mathematicis & Phyſicis Academ. Regia Scientiarum* pag. 74, rejiciendus eſt omnino, utpote in ipſum Dioptrices principium peccans; ex eo enim ſequeretur, non ſinus angulorum incidentiæ & refractionis, eorumve complementorum ſecantes, ſed horum tangentes eſſe in conſtante ratione; contra experientiam: unde ſimul patet, quam infeliciter admodum hac in parte Cartesium ibidem ſuæ cenſuræ ſubjecerit.

Nullus itaque extitit, quantum ſcio, qui puram dederit demonſtrationem, id eſt, talem quæ mere apodictica ſit, nullique certæ hypotheſi, quæ cauſam quandam finalem, vel radiorum motum, ſive inſtantaneum, ſive ſucceſſivum præſupponat, alligata; adeoque quæ nulli ex recenſitis objectionibus, aliiſque contra hanc illamve hucuſque motis, ſit obnoxia; ſed potius quæ in abſtracto propoſita ſemper valeat, quæcunque demum hypotheſis vera, vel deprehendatur, vel ſtatuatur.

Hujuſmodi quidem pro refractione dare conatus eſt Herigonius in ſuo *Curſu Mathematico* Tom. 5. pag. 132 edit. Pariſ. uſus principio planorum inclinatorum, quibus comparavit radios oblique incidentes. At vero excidit auſis: præterquam enim quod ex ſua demonſtratione, æque ac ex *Carteſiana*, [quamquam ipſe contrarium dicat,] aperte ſequeretur, radios ex medio rariori in denſius ingredientes refringi debere a perpendiculari, & contra ad perpendicularem, ſi ex denſiori in rarius; etiam poſtulatum aliquod aſſumit, quod manifeſte ipſum

eſt τὸ κρινόμενον, aut ſaltem haud multo evidentius: tandem quoque ex ea ſequeretur, radios quamdiu in eodem adhuc medio homogeneo verſantur, non æquali facilitate procedere, ſed perpendiculariores facilius, ægrius vero obliquiores a puncto radiante emanare, quod valde abſonum eſt; nulla enim in radiis conſideratur perpendicularitas, nulla obliquitas, niſi reſpectu ad medium aliud diverſæ a priori conſiſtentiæ, a quo autem radii, ante appulſum, nihil utique mutationis patiuntur, quia radii in omnes partes pari facilitate ſparguntur: niſi quis forte cum acutiſſimo NEWTONO velit aliquam vim ſtatuere in altero medio, per quam radii, ante allapſum, jam alliciantur uni fortius quam alii. Vid. *Princip. Mathem. Phil. Nat.* * unde etiam NEWTONUS naturam reflexionis & refractionis explicat; ſed ingenioſe magis quam vere. Quid enim, & unde illa vis attractiva, ab illo non exponitur, ſed ſupponitur; qua conceſſa, fateor perelegantem eſſe *Newtonianam* explicationem, quæ Mathematico plane ſatisfaciat.

* Lib. I. Sect. XIV. præcipue Schol. Prop. 96.

Verum jam noſtram dabimus, qua rigido Phyſico, non minus quam accurato Mathematico ſatisfactum iri ſperamus; aſſumentes ex Phyſica aliud nihil, quam quod ab omnibus Opticis, cujuſcunque opinionis fuerint alias, facile concedi queat; ex Matheſi vero, quod jam alibi demonſtratum eſt. Incipiemus autem a refractione; ea enim explicata, reflexionis natura ſponte fere fluet, & ſic tanto facilius intelligetur. Conſtat utique 1° reactionem, quæ oritur ex actione aliqua, huic ſemper eſſe contrariam & æqualem; hoc eſt, eandem vim in agens redundare in partes oppoſitas quam tranſfert in patiens: communis enim actio, ſive illa conſiſtat in ictu, ſive in impreſſione, ſive in tenſione, &c. in utrumque æqualiter exeritur: ſic quanta vi malleus clavum percutit, tanta quoque a clavo percutitur; quanta idem pondus premit ſubjectam baſin, tanta ab ea premitur; ſic quoque chorda extenditur & extenſioni reſiſtit viribus paribus, &c. Conſtat etiam 2° duas vires, ſive æquales, ſive inæquales, in ſe mutuo libere agentes, ad eum ſtatum, vel ſitum, ſe componere, in quo earum momenta fiant æqua-

æqualia, ut hoc modo procuretur æquilibrium: Ex hiſce duabus naturæ legibus, nulla prorſus demonſtratione indigentibus, ſic porro argumentor: Sint duo media diverſæ conſiſtentiæ ACD & BCD diſtincta per planum CD; punctum radians A, punctum illuſtrandum B, ad quod ſcilicet radius AE pervenire debet per refractum EB. Quandoquidem igitur, per legem 1, radius EB tanta vi a reſiſtentia medii BCD repellitur a B verſus E, quanta radius reſiſtentiam eandem ſuperare conatur; ſimiliter radius AE pari vi a reſiſtentia medii ACD retunditur ab E verſus A, qua ipſi opus eſt ad eandem reſiſtentiam ſuperandam, ſcilicet ab A verſus E. Hinc in puncto E fit conflictus ſecundum directiones BE & AE, duarum virium inæqualium & mediorum reſiſtentiis proportionalium. Hoc autem punctum E, per legem 2, ita ſitum eſſe debet, ut vires illæ inæquales ad æqualitatem momentorum, nempe ad æquilibrium reducantur. Res itaque huc redit, ut in CD determinetur punctum E, in quo potentiæ datæ, ſibi mutuo obnitentes ſecundum directionem AE & BE, inter ſe ſervent æquilibrium. Quod ut inveniam, lubet tantiſper proprietatem centri gravitatis conſiderare, ut pateat, quam pulchre & utiliter ad noſtrum negotium applicari poſſit. Videtur enim natura [ſi quis inſtinctus ei attribuendus] hoc ipſo ſtatico principio delectari, atque hanc viam ex mechanicis mutuari voluiſſe, ut per eam, tanquam per facillimam, ad ſcopum ſuum perveniret. TAB. XVI. N°. LXV. *Fig.* 1.

Concipiamus ergo CD, ut virgam rigidam, quæ inſtar axis admittat annulum vel verticillum E, ſed ita ut lubricſſime fluat, id eſt, ſine ulla frictione, a vi minima, ſecundum rectam CD, ultro citroque moveri poſſit. Porro huic verticillo duos fingamus funiculos alligatos EAM & EBN, trochleas A & B ſuperambientes, inque ſuis extremitatibus ſuſpenſa ſuſtinentes duo data pondera inæqualia, ut ita verticillus E ſimul ſollicitetur a duabus potentiis ſecundum directiones EA & EB, eodem plane modo, quo radios opticos punctum incidentiæ E, viribus datis inæqualibus, urgere diximus; hoc TAB. XVI. N°. LXV. *Fig.* 2.

tantum diſcrimine, quod ibi potentiæ agant ſecundum directiones AE & BE, premendo: heic vero, ſecundum contrarias EA & EB, trahendo: patet autem perinde eſſe, ſive prematur, ſive trahatur; nam ſemper verum eſſe conſtat, ſi duæ pluresve potentiæ æquilibrium inter ſe conſtituentes, ſingulæ prioribus ſuis directionibus in contrarias partes dirigantur, eas etiam poſtea æquilibrium ſervare. Dico itaque verticillum E, ad eum locum pertractum iri in virga CD, in quo, ducta normali RS, ſinus anguli AER, repræſentantis angulum incidentiæ, ſit ad ſinum anguli BES, referentis angulum refractionis, in reciproca ratione potentiarum trahentium, quæ diaphanorum reſiſtentias, vel denſitates exprimunt, hoc eſt, ut pondus N ad pondus M; id quod variis modis, breviſſime tamen, & elegantiſſime, ex communis centri gravitatis maximo deſcenſu ſic demonſtro.

Promoveri fingatur verticillus E in *e* per lineolam infinite parvam E*e*, ut funiculi, cum ponderibus, capiant ſitum *m*A*e* & *n*B*e*: centris A, & B, radiis AE, & B*e*, deſcripti intelligantur arculi E*q* & *ep*, qui pro rectis lineolis habentur. Quoniam igitur commune centrum gravitatis ponderum M, & N, ad infimum poſſibilem locum deſcendit; erit quemadmodum ex ſtaticis patet, aſcenſus M*m* unius, ad deſcenſum N*n* alterius, ut hoc pondus N ad illud pondus M; eſt autem aſcenſus M*m* æqualis *eq*, & deſcenſus N*n* æqualis E*p*; ipſæ vero *eq* & E*p*, (ſumta E*e* pro radio, ſeu ſinu toto) ſunt ſinus angulorum *q*E*e*, & *pe*E, quorum ille *q*E*e* angulo AER, hic vero *pe*E angulo SEB ſemper æquantur: Ergo etiam ſinus anguli AER, erit ad ſinum anguli BES, in ratione ponderum N ad M: Unde patet angulos incidentiæ & refractionis eſſe in data ratione, ſcilicet reciproca mediorum denſitatum. *Q. E. D.*

Atque ſic ſtabilita Dioptrica radiorum proprietate, per noſtram demonſtrandi methodum; facile & eadem ad Catoptricam porrigitur. Cum enim radius reflexus cum incidente in eodem maneat medio; loco ponderum inæqualium, repræſentantium

ibi

ibi mediorum reſiſtentiam, ſeu denſitatem, heic pondera ſupponenda ſunt æqualia, ob eandem medii poſt reflexionem reſiſtentiam, qua ambo jam ſupra virgam CD conſtituta, trahere intelligantur verticillum E. Cæteris poſitis quæ prius; erunt aſcenſus M*m*, & deſcenſus N*n* inter ſe æquales, quia ipſa pondera N & M ſunt æqualia; adeoque etiam *eq* æqualis eſt E*p*: at quoniam triangula E*qe*, & E*pe* ſunt rectangula, erit angulus *pe* E æqualis angulo *q*E*e*; ille vero *pe*E angulo REB, hic vero *q*E*e* angulo AER ſemper ſunt æquales: ergo etiam angulus REB (reflexionis) æquatur angulo AER (incidentiæ). *Q. E. D.* TAB. XVI. N°. LXV. *Fig.* 3.

Aſſumpſi quidem hactenus Refractionem & Reflexionem fieri in planis ad plana refringentia & reflectentia rectis, quod etiam ab EUCLIDE, ALHAZENO, nonnulliſque Veteribus aliis, ſine demonſtratione aſſumtum eſt. VITELLIO vero, & inter recentiores KEPLERUS, dum id probare volunt, nihil probant. At vero ſtatim innuere potuiſſem, id ex meo principio ultro ſequi: nam ſi E, non tantum in recta CD, ſed in integra quadam ſuperficie liberrime in omnes partes fluere poſſe concipiatur, idque poſtea a duabus potentiis M & N trahi; quis eſt, qui non illico videat, punctum illud non ante quieturum, quam pervenerit ad eum locum, in quo, cum punctis A & B, ſit in plano ad ſuperficiem refringentem, vel reflectentem recto? ſecus enim ſi accideret; in quovis alio plano centrum gravitatis ponderum M & N non infimum poſſibilem deſcenſum obtineret.

Cæterum, non inutile erit, ſi jam oſtendero & ipſam illam metaphyſicam hypotheſin de compendioſiſſima Naturæ via, ex meo æquilibrii principio, commodiſſime & ſine longa demonſtratione, deduci poſſe; imo ſponte exinde fluere, ut ne opus quidem habeam conſideratione angulorum incidentiæ, & reflexionis, vel refractionis; id quod a nemine hactenus præſtitum ſcio: nam & ipſe HUGENIUS eam ex undarum ſuarum natura immediate demonſtrare non potuit; ſed cogebatur ex iis prius probare conſtantem eſſe rationem inter ſinus angulorum incidentiæ

dentiæ & refractionis. Vid. *Tractat. de Lumine*, pag. 40. FERMATIUS & LEIBNITIUS inverſo ordine hoc ex illo probarunt, quod eodem recidit, [Vid. *Opera Mathem.* FERMAT. p. 158. & *Act. Erud.* an. 1682 pag. 185] alterum enim per alterum ſtabilitur. At vero nobis utrumque, ſine ſuppoſitione alterius, demonſtratur; & quidem de priori, ſcilicet de angulorum iſtorum proprietatibus, id jam liquet: nunc de altero, nempe de facillima radiorum via porro liquebit.

Ex ſtaticis patet centrum commune gravitatis ponderum duorum, pluriumve, tunc infimum eſſe, quando ſumma rectangulorum ſub ponderibus & ſuis reſpective diſtantiis a ſuſpenſionum punctis omnium eſt maxima. Erit itaque M in AM + N in BN omnium maximum: hinc ſi a conſtanti M in MAE + N in NBE, auferatur maximum M in AM + N in BN, remanebit M in AE + N in BE omnium minimum: adeoque in Catoptrica, ubi pondera M & N [vid. *Fig.* III] ponenda ſunt æqualia, erit dividendo per M, AE + BE, id eſt, ſumma radiorum incidentis & reflexi omnium minima. In Dioptrica vero, ubi M & N [vid. *Fig.* II.] mediorum reſiſtentias, adeoque M in AE, & N in BE, radiorum AE & EB penetrandi difficultates [nam difficultas radii componitur ex medii reſiſtentia & viæ longitudine,] denotant; erit difficultas per AE & EB omnium minima, id eſt, radius ab A ad B per eam viam venit facillime. *Q. E. D.*

TAB. XVI. N°. LXV. *Fig.* 3.

Et hæc ipſa eſt propoſitio, quam HUGENIUS operoſe, ſed operoſius multo FERMATIUS, nos vero, tribus quaſi verbis, demonſtravimus. Illi uſi ſunt vocabulo *temporis*, quod radius impendit ab A ad B; cujus loco nos *difficultatis* vocem adhibuimus; quod ſtudio factum, ut utrovis modo demonſtratio procederet, ſive in inſtanti, ſive ſucceſſive lumen propagari ſtatuatur. Unde noſtro fundamento tanto majorem firmitatem conciliari arbitramur, quod ei ſtatim ſuperſtruatur, nulla peregrina hypotheſi in auxilium vocata, id ipſum, quod alii, non tam ex ipſis fundamentis ſuis, quam per eorum ſequelas alienas & remotas eruerunt; aſſumentes interim, ex phyſica, hoc, vel illud, de quo ab aliis ſemper dubitabitur.

N°. LXVI.

EXTRAIT D'UNE LETTRE
Sur les Problemes des Iſoperimetres.

ON s'étoit flatté juſqu'ici, que l'Auteur de ces Problémes accepteroit les deux Articles, que Mr. BERNOULLI, Profeſſeur de *Groningue*, lui a propoſés dans le Journal du 15 Dec. 1698 †; vû qu'ils étoient tels, qu'en les acceptant il n'y auroit rien eu à riſquer pour l'Auteur des Problémes, & tout pour le propoſant, tant il a eu de condeſcendance pour lui; & que ç'auroit été le moien le plus promt pour finir une longue conteſtation qui eſt entre eux deux. Mais comme on ſe voit fruſtré dans ſon attente, on commence de douter que l'Auteur des Problémes ne craigne déja pour ſa cauſe & ne ſe voie trompé lui-même dans ſa Methode, par laquelle il prétend les avoir réſolus. On eſt confirmé dans cette penſée, parce qu'on a remarqué qu'il ſe contredit trop groſſiérement en divers endroits. Pour en avoir un échantillon, que le Lecteur prenne la peine de confronter les *Actes de Leipſic* de l'Année 1694. p. 276. l. 8. avec le Journal du 4 Aouſt 1698. pag. 360. l. 13 *: car dans les *Actes*, parlant de la courbure d'une lame élaſtique, ou d'un linge rempli de quelque liqueur, il dit: *Inter omnes figuras Iſoperimetricas, eidem rectæ inſiſtentes, Elaſtica illa eſt, quæ habet centrum ſuum gravitatis longiſſime remotum a recta.* Mais dans le Journal, il ſoutient directement le contraire. *Je ſoutiens même*, dit-il, *que cela eſt faux, & que la figure d'entre les Iſoperimetres, dont le centre de gravité eſt le plus éloigné de l'axe, n'eſt pas celle d'un linge rempli de liqueur, mais une autre.* Voila un terrible effort pour ſe donner le dementi a ſoi-même: ſon

Journal des Savans 1701. &c. Journ. du 21. Fevr. pag. 86. Edition de Paris. pag. 134. Edition de Hollande.

† Cy-deſſus N°. XLVII. pag. 231.

* Cy-deſſus pag. 226.

ſon plus grand adverſaire n'auroit pû trouver des termes plus offençans, ni plus emphatiques, pour le refuter, que ceux avec leſquels il ſe refute lui-même.

On a voulu remarquer cela, pour donner à connoitre au Lecteur, ſi on peut conter ſur une telle inconſtance, & par conſequent ſur tout ce que l'Auteur des Problémes a avancé contre M. BERNOULLI Profeſſeur de *Groningue*; & ſi ce n'eſt pas lui-même, ſelon toutes les apparences, qui a commis les paralogiſmes mentionez dans le Journal marqué, leſquels il impute à l'autre, par une conjecture temeraire. Mais cela ſoit dit en paſſant; on ſe reſerve pour une autrefois, en cas de beſoin, à montrer dans les écrits de l'Auteur des Problémes, d'autres contradictions, erreurs, & bevuës, même contre les premiers Axiomes de la Géometrie: ſans pourtant qu'on veuille en rien déroger de la beauté de ſes autres découvertes de Mathematique, qu'il peut avoir faites par un raiſonnement juſte. Les plus grands hommes ſont ſujets à broncher: cela lui eſt donc d'autant plus pardonable; pourvû qu'il ne le veuille blamer dans un autre, particuliérement ſi c'étoit à tort qu'il le feroit.

Pour le préſent, on ſe contente d'avertir le Public, que M. BERNOULLI Profeſſeur de *Groningue*, ſe ſoumettant au jugement de l'Académie Royale des Sciences, vient de remettre ſes Méthodes pour les Problémes des Iſoperimétres, entre les mains de M. le Secretaire de la dite Académie, qui ſont les mêmes, dont il a fait part à M. LEIBNITS, il y a déja près de trois ans; leſquelles il a toujours aprouvées, témoin ſes Lettres, qu'on peut produire; & ſon aveu public, qu'il a promis de donner, ſi l'occaſion l'exige. Ainſi il ne tient plus qu'à l'Auteur des Problémes de faire paroitre la Méthode promiſe depuis ſi longtems.

Voiés *le N°. LXXV.*

N°. LXVII.

JAC. B*. NOVA METHODUS

expedite determinandi radios oſculi, ſeu curvaturæ, in curvis quibuſvis algebraïcis.

Methodus hæc, nec in radicum æqualitate, nec in Theorematis noſtris *Jun. Act.* 1694 exhibitis fundata, ſed ſingulari quadam eruta ratione, radium curvaturæ in omni curva algebraïca, citra ullum differentialium adminiculum, generaliter exhibet, idque tanta facilitate & promtitudine, ut nihil poſſit expeditius. Sufficit enim pro ſingulis æquationis terminis, e veſtigio & nullo prævio calculo, alios quoſdam ſubſtituere, prout e mox dicendis patebit. *Acta Erudit. Lipſ.* 1700. Nov. pag. 508.

Eſto Curvæ cujuſvis algebraicæ [cujus utique tangens inventa ſupponitur] abſciſſa $AB = x$, applicata $BC = y$, & ſubnormalis $BD = z$ [quæ omnes datæ ſunt, ob datum C punctum,] & ſit inveniendus radius oſculi, ſeu curvaturæ CE. TAB. XVI. N°. LXVII.

REGULA. Æquatione tota, quæ curvæ naturam exprimit, ad unam partem conſtituta; & deleto, ſi adſit, termino, quem neutra indeterminatarum x & y ingreditur: reliquorum ſinguli, in quibus reperitur ſola x, repræſententur per fx^m; in quibus ſola y, per gy^n, & in quibus reperiuntur junctim x & y, per $hx^r y^s$; denotantibus, nempe, literis f, g, h, terminorum ſuorum coëfficientes, & literis m, n, r, s exponentes poteſtatum ipſarum x & y. Tum vero fiat fractio

pro ſingulis	ſubſtituatur in cujus . . . . *numeratore*	*denominatore*
fx^m	$+mfx^{m-1}z$ . .	$+(m-mm)fx^{m-2}yy$
gy^n	$-ngy^n$	$+(n-nn)gy^{n-2}zz$
$hx^r y^s$	$+rhx^{r-1}y^s z$	$+(r-rr)hx^{r-2}y^{s+2}$
	$-shx^r y^s$	$+(s-ss)hx^r y^{s-2}zz$
		$-2rshx^{r-1}y^s z$

hoc eſt, loco datæ æquationis $fx^m + gy^n + hx^r y^s = 0$ [quæ forma eſt, ad quam omnes referuntur] ſcribatur

$$\frac{+mfx^{m-1}z - ngy^n + rhx^{r-1}y^s z - shx^r y^s}{+(m-mm)fx^{m-2}yy + (n-nn)gy^{n-2}zz + (r-rr)hx^{r-2}y^{s+2} + (s-ss)hx^r y^{s-2}zz - 2rshx^{r-1}y^s z}$$

* Jacobi BERNOULLI.

quo facto, ut denominator fractionis ad ipſius numeratorem, ſic erit CD ad radium oſculi quæſitum CE.

Exempl. I. Æquatio pro Parabolis omnis generis eſt $x - y^n = 0$. Conferatur x cum fx^m, & y^n cum gy^n; erit $f = 1$, $m = 1$, $g = -1$, & $n = n$; quibus valoribus ſubſtitutis, reſultat fractio $(z + ny^n) : ((nn - n) y^{n-2} zz) = (z + nx) : ((nn - n) y^{n-2} zz) =$ [ob $ny^{n-2} z = 1$, ex natura Parab.] $(z + nx) : ((n-1) z)$; unde $(n-1) z : z + nx = CD : CE$, ſive $z : z + nx = CD : (n-1) CE$; quod propter ſubtangentem Parabolæ $BF = nx$, hanc facillimam Conſtructionem ſuppeditat. Ex puncto F, ubi tangens CF ſecat axem, excitetur axi perpendicularis FG, cui occurrat producta DC in G, erit $DG = (n-1) CE$; adeoque $CE = \frac{1}{n-1} DG$.

Exempl. II. Sit æquatio curvæ $y^3 + x^3 + xxy - xyy + a^3 - aay + aax - axx + ayy = 0$. Neglecto a^3 & collatis

$+y^3$ cum gy^n, habetur $g = 1$, & $n = 3$	$-a^2y$ cum gy^n, habetur $g = -aa$, & $n = 1$
$+x^3 \ldots fx^m \ldots\ldots f = 1, \ldots m = 3$	$+a^2x \ldots fx^m \ldots\ldots f = aa, m = 1$
$+xxy \ldots hx^r y^s \ldots\ldots h = 1, r = 2, s = 1$	$-axx \ldots fx^m \ldots\ldots f = -a, m = 2$
$-xyy \ldots hx^r y^s \ldots h = -1, r = 1, s = 2$	$+ayy \ldots gy^n \ldots\ldots g = a, n = 2$

quibus ubique ſurrogatis, exurgit fractio

$$\frac{-3y^3 + 3xxz + 2xyz - xxy - yyz + 2xyy + aay + aaz - 2axz - 2ayy}{-6yzz - 6xyy - 2y^3 - 4xyz + 2xzz + 4yyz + 2ayy - 2azz}$$

Dico hujus denominatorem ad numeratorem ſe habere ut CD ad quæſitam CE.

Observ. I. Cum data ſit relatio inter x, y, z, ſeu AB, BC, BD, CD; poterit, ejus ope, ſemper una, pluresve, harum quantitatum, e fractione eliminari, eoque quæſitum in terminis plerumque ſimplicioribus exhiberi; ut ſupra, in *Exemplo I.* contigit.

Obs. II. Non opus eſt, ex data æquatione tollere prius fractiones & ſurditates, quando hæ ſimplices duntaxat poteſtates quantitatum x & y innuunt. Tantundem enim eſt, ex. gr. $aa : x$ atque aax^{-1}, $\sqrt{ax}$, atque $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{xyy}$ atque $x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$, &c.

Obs. III. Imo nunquam illas tollere eſt opus, etiamſi ſigna radicalia binomia & multinomia involvant. Non minus enim aſſignari poteſt, quid pro talibus in fractione ſit ſubſtituendum. Sic ſi habeatur, in æquatione, quantitas ſurda $\sqrt[n]{(x^m + a^m)}$, brevitatis cauſa, dicta p; ejus

ejus loco, in numeratore fractionis ſurrogo $(mx^{m-1}z):np^{n-1}$, in denominatore repono $+((m-mm)x^{m-2}yy):np^{n-1}+((n-1)mmx^{2m-2}yy):nnp^{2n-1}$, pariterque etiam in aliis.

Obs. IV. Haud abſimili methodo, tangentibus inveniendis Regula præſcribi poteſt, quanquam eadem vulgari quoque differentialium calculo haud difficulter eliciatur. Sit rurſum data æquatio $fx^m+gy^n+hx^ry^s+a=0$.

Dico fore ſubnorm. $BD=(-mfx^{m-1}-rhx^{r-1}y^s):(+ngy^{n-2}+shx^ry^{s-2})$

Subtang. $BF=(-ngy^n-shx^ry^s):(+mfx^{m-1}+rhx^{r-1}y^s)$

ſegm. axis $AF\,(-ngy^n-shx^ry^s-mfx^m-rhx^{r-s}):(+mfx^{m-1}+rhx^{r-1}y^s)$

cui ſimilem in primo *Actorum* anno exhibuit Nob. D. Tschirnhaus, niſi quod ipſe, in ordinanda æquatione, ad maximam poteſtatem y reſpicere jubeat, quod hic non eſt neceſſe. Sufficit, quod omnes termini æquationis ab una parte collocentur.

Atque hæc ſunt, quæ publico hac vice impertiri lubuit. Eorum veritatem qui examinare velit, Regulam noſtram tentet in variis curvis, de quorum radiis curvaturæ per alias methodos jam conſtat: qui vero in artificium inventionis ipſum curioſius inquirit, hoc ſibi ad ſolvendum, velut ænigma, proponat; donec ſolutum dedero ipſe.

N°. LXVIII.

JOHANNIS BERNOULLI

Nova ratio promte conſtruendi Radios oſculi, ſeu curvaturæ, in Curvis quibuſvis, ſive algebraïcis, ſive tranſcendentibus.

Item Methodus eoſdem analytice determinandi in curvis algebraïcis, per vulgarem Differentialium calculum eruta.

Cum primum in magni Problematis Brachyſtochronarum contemplationem inciderem; conferendo duplicem methodum, quam pro ejus ſolutione ſtatim inveneram, forte fortuna ſe mihi obtulit formula quæpiam, ſimpliciſſima ſimul *Acta Erud. Lipſ. 1701. Mart. pag. 136.*

& univerſaliſſima, exprimens radium oſculi, in curvis quibuſvis, tranſcendentibus, æque ac algebraïcis; quæ cum differentialibus primi tantum gradus conſtaret, loco quod omnes aliæ, ab aliis hactenus traditæ, ſemper etiam differentio-differentiales, ſeu differentiales ſecundi gradus involvant; primo impetu lætabar nonnihil, ob novum inventum, tanquam valde ſingulare: ſtatim vero poſtea, aperte adeo ex formulis ordinariis fluere vidi, ut dubitarem an in adverſaria mea referre dignaturus eſſem. Quandoquidem tamen anſam dedit noſtræ huic conſtructioni geometricæ, univerſali & expeditiſſimæ, radiorum oſculi quarumvis curvarum; fontem ipſius paucis hic detegere non pigebit.

Eſto Curva quæcunque, cujus coordinatæ ſint x & y; & ſit æquatio differentialis ejus naturam univerſaliter explicans $dx = udy$, [intelligo per u, quantitatem ex x, y & conſtantibus utcunque conſtantem]; poſito dt pro elemento curvæ, dico radium oſculi fore ſemper $dt^3 : dy^2\, du$; quod ſic facile probo: nam ſumta dy pro conſtante, notum eſt radium oſculi eſſe $dt^3 : dyddx$; cum autem dx ſit $= udy$, erit $ddx = dudy$; adeoque ſubſtituto loco ddx ipſius valore $dudy$, prodibit, quod dixi, radius oſculi $dt^3 : dy^2 du$. Id quod nobis ſuppeditat hanc generaliſſimam radii hujus conſtructionem, per ſolas quantitates ordinarias ſeu finitas.

TAB. XVI N°. LXVIII. *Fig.* 1. Sit Curva data AC, ſive tranſcendens, ſive algebraïca; cujus radius oſculi in puncto quovis C ſit aſſignandus: Ducantur lineæ, ut factum in Figura; ſcilicet ex puncto F, ubi tangens CF ſecat axem, excitetur ad axem perpendicularis FG, occurrens normali ad curvam DC productæ in G. Præterea, quoniam curvarum datarum dantur tangentes, ſubtangentes, normales, ſubnormales &c. Conſtruatur nova curva LM, ita ut ejus applicata BM ſit quarta proportionalis ad applicatam datæ BC, ejus ſubtangentem BF, & conſtantem quandam ad arbitrium aſſumtam P; unde & hæc nova curva dabitur, ejuſque adeo tangentes, ſubtangentes, &c. Fiat igitur, ut FB ad NB, ita GD ad quartam quandam

CE;

CE; dico hanc CE fore radium oſculi, ſeu curvaturæ, curvæ propoſitæ in puncto C.

Demonſtratio per unicam æqualitatum feriem abſolvitur, deductam partim ex conſtructione, partim ex ſimilitudine Triangulorum. Quoniam enim CE = [per conſtr.] NB × GD: FB = [ob Triang. FCB, GDF ſimilia] NB × CF × FD: FB × CB = [ob Triang. CFB, DFC, ſimilia] NB × CF^2: FB^2 × CB = [per conſtr.] NB × CF^2 × P: FB × CB^2 × BM = [per naturam tangentium; eſt enim NB: BM = $dx:Pdu$, & CF: FB = $dt:dx$, & CF: CB = $dt:dy$] $dx.\,dt.\,dt^2.\,P:P\,du.dx.dy^2$ = [diviſo numeratore & denominatore per P dx] $dt^3:du\,dy^2$ = [per ſupra demonſtrata] radio oſculi: ergo etiam CE = radio oſculi. *Q. E. D.*

Exempli loco duas ſumamus curvas, algebraïcam unam, alteram tranſcendentem. Sit ergo AC parabola cujuſvis generis, cujus exponens ſit n: patet, ex conſtructione, LM fore aliam parabolam, cujus exponens erit $n:(n-1)$; unde FB ad NB, id eſt, GD ad CE, ut n ad $n:(n-1)$; id eſt, ut $n-1$ ad 1; adeoque CE = GD: $(n-1)$.

Eſto jam [*Fig.* 2] AC logarithmica vulgaris: erit etiam LM talis logarithmica, & quidem ejuſdem ſubtangentis, ſed cum priore ſitu inverſo ſuper eodem axe poſita: adeoque cum NB æquetur FB, hinc ſtatim fluit radium oſculi CE in logarithmica ubique eſſe æqualem ipſi GD: egregia hujus curvæ, & hactenus nondum obſervata proprietas, tantoque notatu dignior, quod eandem communem habeat cum parabola vulgari *Archimedea*; etenim & in hac CE ubique = GD. Ut & hoc inſuper notem, radius hic CE in Logarithmica utrinque in infinitum abit: ergo alicubi exiſtit minimus; quod ibi fit, ubi ſubnormalis eſt ſubtangentis dimidia. TAB. XVI. N°. LXVII. *Fig.* 2.

Atque hæc, de geometrica conſtructione univerſali radiorum oſculi in quibuſvis curvis, ſufficiant. Quantum ad analyticam ejuſdem expreſſionem in algebraïcis, etiam hanc ex formula mea ſupra inventa CE = $dt^3:du\,dy^2$, magna facilitate

tate & ſimplicitate per vulgarem differentialium calculum elicio, prout e jam dicendis patebit.

Æquatio catholica, ad quam omnes omnium curvarum algebraïcarum referuntur, hæc eſt, $fx^m + gy^n + hx^r y^s = 0$; ubi repræſentantur per fx^m termini ſinguli, in quibus ſola x; per gy^n ſinguli, in quibus ſola y; & tandem per $hx^r y^s$ ſinguli in quibus x & y junctim reperiuntur: ſumtis ſcilicet x, y pro coordinatis curvæ, & a pro conſtante; f, g, h pro ſuorum reſpective terminorum coefficientibus; & m, n, r, s pro exponentibus poteſtatum ipſarum x & y. Vocentur normalis CD, v, & ſubnormalis BD, z. Oportet nunc exhibere expreſſionem litteralem itidem catholicam, meris quantitatibus algebraïcis conſtantem, quæ longitudinem radii oſculi determinet; quod ſic facio: Differentietur per viam ordinariam æquatio modo memorata, & habebitur $mfx^{m-1}dx + ngy^{n-1}dy + rhx^{r-1} g^s dx + shx^r y^{s-1} dy = 0$, proinde $(mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s) dx = (-ngy^{n-1} - shx^r y^{s-1}) dy$. Ponatur brevitatis gratia, quod cum dx multiplicatur $= p$ & quod cum dy multiplicatur $= q$; unde $pdx = qdy$. ſeu $dx = qdy : p$. Jam in univerſali noſtra formula, radium oſculi eminenter in quavis curva exprimente, $dt^3 : dudy^2$, loco du ponatur differentiale ipſius $q : p$; eſt enim hic $u = q : p$, adeoque $du = (pdq - qdp) : pp = [\text{ob } p : q = dy : dx = z : y] = (zdq - ydp) : pz$; erit $dt^3 : dudy^2 = pzdt^3 : (zdy^2 dq - ydy^2 dp)$. Sumantur nunc differentiales ipſarum p & q, ſeu ipſarum $mfx^{m-1} + rhx^{r-1} y^s$ & $- ngy^{n-1} - shx^r y^{s-1}$, habebitur $dp = (mm - m) fx^{m-2} dx + (rr - r) bx^{r-2} y^s dx + rshx^{r-1} y^{s-1} dy$, & $dq = -(nn - n) gy^{n-2} dy - (ss - s) bx^r y^{s-2} dy - rshx^{r-1} y^{s-1} dx$. Subſtitutis igitur loco p, dp, & dq, ipſorum valoribus, prodibit $dt^3 : dudy^2$

$= (m$

$= (mfx^{m-1}z + rhx^{r-1}y^{s}z)\, dt^{3}$ diviſo per $(m - mm)$ $fx^{m-2}y\,dx\,dy^{2} + (r - rr)\, hx^{r-2}y^{s+1}\, dx\,dy^{2} - rsh$ $x^{r-1}\, y\,s\,dy^{3} + (n - nn)\, gy^{n-2}z\,dy^{3} + (s - ss)\, hx^{r}$ $y^{s-2}z\,dy^{3} - rshx^{r-1}y^{s-1}z\,dx\,dy^{2}$, denique ſi pro dt, dx, & dy, ponantur eorum proportionales v, y & z [eſt enim $dt : dx = v : y$, & $dx : dy = y : z$] proveniet, ordinatis & reductis reducendis, $dt^{3} : du\,dy^{2}$, ſeu CE, ſeu radius oſculi $= (mfx^{m-1}v^{3} + rhx^{r-1}y^{s}v^{3})$ diviſo per $(m - mm)\, fx^{m-2}yyz + (n - nn)\, gy^{n-2}z^{3} + (r - rr)$ $hx^{r-2}y^{s+2}z + (s - ss)\, hx^{r}y^{s-2}z^{3} - 2rshx^{r-1}y^{s}$ zz; adeoque ut denominator fractionis ad ipſius numeratorem, ſic erit unitas ad radium oſculi quæſitum CE.

Hoc nonnihil ſimplicius enunciari poteſt, ſi dividatur fractio per $vv : z =$ FD, & ſi dicatur, ut denominator ad numeratorem ita FD ad CE. Ubi notandum hanc fractionem, quod ad denominatorem, convenire omnino cum ea, quæ in *Actis* hiſce *Anni ſuperioris* p. 509 * traditur; ſed, quod ad numeratorem, noſtram hic traditam, utpote duobus tantum terminis conſtantem, altera illa quatuor habente terminos ſimpliciorem eſſe; quod in laudem incomparabilis differentialis calculi, ejuſque Illuſtriſſimi Autoris dictum eſto, ut ipſi ſua conſtet excellentia, & vindicetur ab iniqua cenſura eorum, qui eum, vel ex imperitia, vel ex invidia, ad hujuſmodi & alia extendi non poſſe crepant; ad quæ tamen, & longe plura reapſe extenditur, ſi dextre adhibeatur.

Cæterum quantum ad regulas, quæ pro tangentibus, normalibus, &c. præſcribi poſſunt, illæ tam facile ex vulgari differentialium calculo inveniuntur, ut id operis Tyronibus efficiendum relinquam. Ea interim, quæ pro ſubnormali invenitur, conducit ad examinandum, ſi cui volupe ſit, utrum citata ex *Actis* regula, pro determinando radio oſculi, ſit generaliter bona: nam ſi conferatur cum mea hic exhibita & demonſ-

* Supra N°. præced pag. 379

monſtrata, producet valorem aliquem ipſius z ſeu BD, qui ſi idem fuerit [ut reapſe eundem eſſe comperi] cum eo quem indicat generalis regula pro normalibus, etiam illa altera judicabitur eſſe generalis.

N°. LXIX.

JOHANNIS BERNOULLI

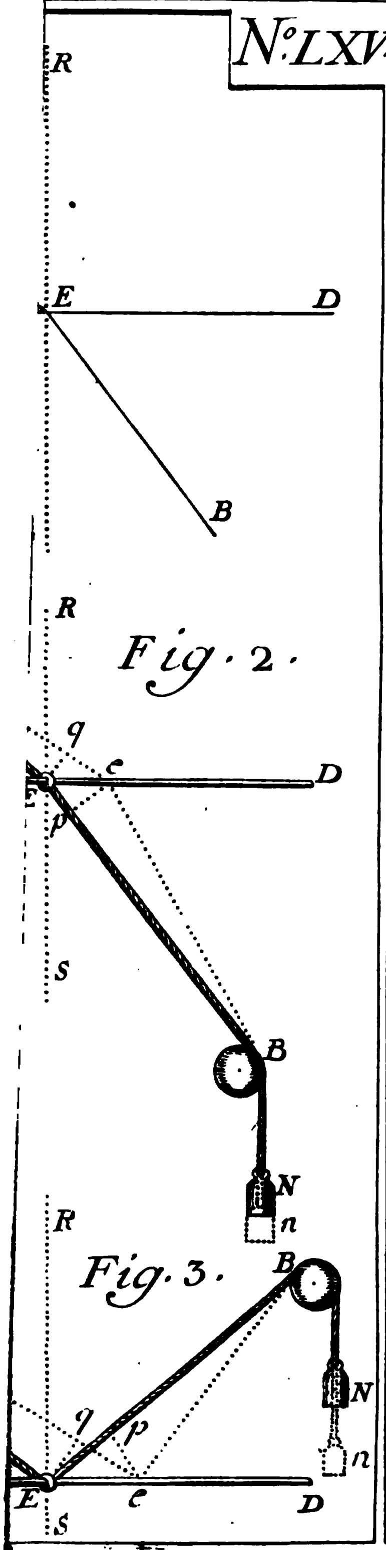
Multiſectio anguli vel arcus, duplici æquatione univerſali exhibita, inſerviens generali determinationi omnium Zonarum quadrabilium Cycloïdis.

Acta Erudit. Lipſ. 1701. April. pag. 170.

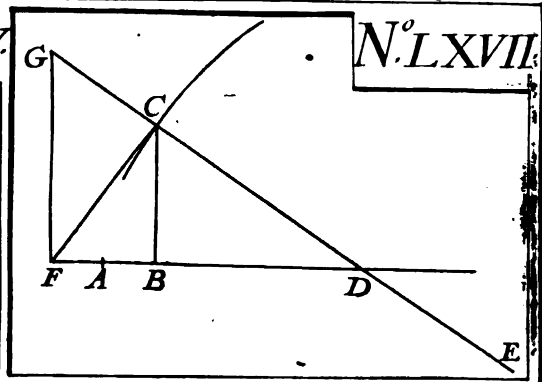
IN *Actis Erud.* Anni proxime elapſi, pag 268 * propoſui Problema ſectionum angularium generaliter ſolvendum, quippe quod ibidem oſtendi abſolvere totum negotium pro determinandis Cycloïdis Zonis quadrabilibus infinitis; ne ſcilicet, pro ſingulis, de novo ſemper recurrendum eſſet ad calculum, perquam tædioſum ſane & moleſtum. Et dixi me tali univerſali formula potitum eſſe, qua, ſine ullo prævio calculo, angulum datum quantumvis, vel multiplicare, vel dividere liceat. Sperabam hinc id Nonneminem excitaturum, qui, in re ardua adeo & ab omni ævo deſiderata, aliquid eſſet præſtiturus, ut ex junctis noſtris operis commune ſtudium tanto majorem caperet fructum. At vero aliud nihil prodit, niſi quod diceretur, *Problema ſectionis angularis in ratione determinata numeri ad numerum algebraicum eſſe*, *ſed indefinite in data ratione quacunque, tranſcendens.* † Verum utique hoc eſt. Interim nihil impedit, quominus tamen generalis dari poſſit æquatio, vel ſi mavis formula, quæ pleniſſime complectatur ſolutionem Problematis indefinite propoſiti, & quæ, in caſu determinato, aliud nihil requirat, quam nudam & extemporaneam terminorum ſubſtitutionem, qualem utique omnes

* Supra N°. LX. pag. 331. 332.   † Supra N°. LXI.

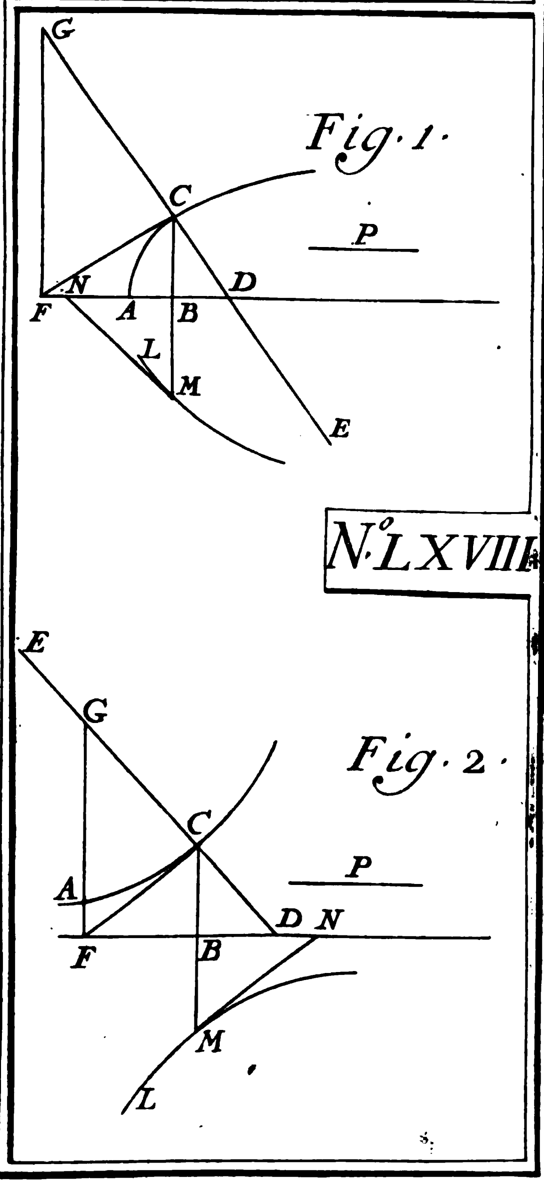
N°. LXV.



N°. LXVII.



N°. LXVIII.



nes hujuſmodi generales formulæ requirunt; ut vel ex ipſa radios oſculi curvarum algebraïcarum determinandi methodo patet, cujus æquatio indefinite ſumta etiam eſt tranſcendens, licet in caſu determinato ſit algebraïca. Ita quoque poteſtas indefinita binomii eſt tranſcendens; an ideo non per ſeriem exprimi poteſt, quæ doceat modum generalem, poteſtatem numericam quamcunque datam, e veſtigio & ſine prævio calculo, exhibendi? Talem itaque formulam ego requirebam pro indefinita multiplicatione & ſectione arcus. En autem nunc geminam; cujus priorem, una cum demonſtratione, jam ab aliquo tempore cum Illuſtr. *Marchione* HOSPITALIO communicavi, quæ hæc eſt.

Si radius circuli $= 1$, ſubtenſa arcus dati $= a$, ſubtenſa ejus complementi ad ſemicirculum $= \surd(4 - aa) =$ [brevitatis gratia] b, ſubtenſa arcus multipli, ſubmultiplive $= x$, ſubtenſa ejus complementi ad ſemicirculum $= \surd(4 - xx) =$ [brevitatis gratia] y; numerus multipli, ſubmultiplive $= n$. Dico fore pro arcu multiplicando, $x = ab^{n-1} - \frac{n-2}{1} ab^{n-3} + \frac{n-3.\,n-4}{1.\,2} ab^{n-5} - \frac{n-4.\,n-5.\,n-6}{1.\,2.\,3} ab^{n-7} + \frac{n-5.\,n-6.\,n-7.\,n-8}{1.\,2.\,3.\,4} ab^{n-9}$, &c. & pro arcu dividendo, ſeu ſecando, $x =$ radici hujus æquationis $a = xy^{n-1} - \frac{n-2}{1} xy^{n-3} + \frac{n-3.\,n-4}{1.\,2} xy^{n-5} - \frac{n-4.\,n-5.\,n-6}{1.\,2.\,3} xy^{n-7} + \frac{n-5.\,n-6.\,n-7.\,n-8}{1.\,2.\,3.\,4} xy^{n-9}$, &c. cujus progreſſionis natura per ſe manifeſta eſt, & ex uniformitate facile patet, quomodo ſit continuanda: continuari autem debet, donec ad terminum perveniatur, cujus coëfficiens abeat in nihilum: talis autem aliquis ſemper erit in progreſſione, cum ut hic ſupponitur, per n denotetur numerus integer: ſit, ex. gr. $n = 5$ habebit progreſſio terminos tres; adeoque erit x, ſeu ſubtenſa arcus quintupli $= ab^4 - 3abb + a$, & x, ſeu ſubtenſa arcus ſubquintupli, æqualis radici hujus æquationis $a = xy^4 - 3xy^2 + x$, & ita de cæteris.

Ecce nunc alteram formulam univerſalem. Dico itaque [retentis iiſdem litteris, ſed jam diametro ſumta pro unitate] haberi pro arcus multiplicatione $x = nab^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^3 b^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} a^5 b^{n-5} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.n-6}{1.2.3.4.5.6.7} a^7 b^{n-7}$, &c.

vel etiam, ſi magis arridet valor ipſius y, erit

$y = b^n - \frac{n.n-1}{1.2} a^2 b^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} a^4 b^{n-4} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6} a^6 b^{n-6}$, &c. Et, pro arcus diviſione, ſeu ſectione, dico eſſe $x =$ radici hujus æquationis, $a = nxy^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} x^3 y^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} x^5 y^{n-5} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.n-6}{1.2.3.4.5.6.7} x^7 y^{n-7}$, &c. vel etiam [quod tantundem eſt] $x =$ radici hujus æquationis, $b = y^n - \frac{n.n-1}{1.2} x^2 y^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} x^4 y^{n-4} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6} x^6 y^{n-6}$, &c.

Sumamus iterum in exemplum $n = 5$, erit x, ſeu ſubtenſa arcus quintupli $= 5ab^4 - 10a^3bb + a^5$, & x, ſeu ſubtenſa arcus ſubquintupli = radici hujus æquationis $a = 5xy^4 - 10x^3yy + x^5$, vel etiam = radici hujus æquationis $b = y^5 - 10xxy^3 + 5x^4y$, quæ omnes, ſi conferantur cum iis quæ per priorem formulam ſunt inventæ, attendendo quod illæ habeant radium, hæ vero diametrum pro unitate, elegans ubique obſervabitur conſenſus. Lex hujus poſterioris progreſſionis etiam per ſe patet; ſunt enim coëfficientes iidem, qui in binomii poteſtate n, ſed alternatim ſumti; alternantibus etiam ut in priori ſignis + & —.

Quamquam alias hæc poſterior formula, quantum ad expreſſionem, nonnihil prolixior videatur priore, eidem tamen præferen-

ferenda eſt; quippe quæ ſeſe extendit ad numeros *n* non integros modo, ut prior, [quod quidem ad Zonas quadrabiles infinitas jam ſufficit;] ſed etiam ad fractos, imo & ad ſurdos quoſvis: quibus in caſibus progreſſiones degenerant in ſeries infinitas ſummarum finitarum: adeo ut jam facile ſit exhibere ſeriem compoſitam ex terminis pure cognitis, quæ exprimat radicem æquationis pro quavis ſectione anguli vel arcus. Nam angulum, vel arcum datum ſecare in partes *n*, tantundem eſt ac eum multiplicare per 1 : *n*; ideoque ſi in generali progreſſione pro multiplicando arcu $x = nab^{n-1} - \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3} a^3 b^{n-3} + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} a^5 b^{n-5}$, &c. Subſtituamus 1 : *n*, loco *n*, orietur ſeries infinita terminorum pure cognitorum; cujus ſumma per conſequens erit radix hujus æquationis $a = nxy^{n-1} - \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3} x^3 y^{n-3} + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} x^5 y^{n-5}$, &c. pro generali arcus ſectione. Eodem modo, ſi loco *n* ſubſtituatur $\sqrt{n}$, vel $\sqrt{(1:n)}$ [intelligo per $\sqrt{}$ latus cujuſvis gradus] prodibit ſeries determinans ſubtenſam arcus, habentis ad arcum datum rationem datam quamvis ſurdam. Quæ omnia hactenus magnæ fuerunt caliginis; qua enim alia via, arcus inter ſe incommenſurabiles, pro datis numeris ſurdis, determinari queant, non video.

Ut nunc redeam ad Cycloïdis Zonas quadrabiles, patet ex ſupradictis, quomodo infinitæ tales ſimul poſſint algebraïce deſignari. Dico algebraïce; qui enim ad eas determinandas utitur curva quadam tranſcendente, ſane is non plus præſtitit, quam qui quadraturam circuli, ex ſuppoſita peripheriæ rectificatione, ſe inveniſſe gloriaretur *. Et hoc ſenſu nullum non ſpatium, nedum Zona, Cycloïdis eſt quadrabile. Sit enim ſemiſegmentum quodcunque AIB, erit illud ſemper æquale rectangulo ſub AI & IB, minus rectangulo ſub $\frac{1}{2}$ AH & LB, TAB. XV N°. LXI

Ccc 3 plus

* Vide N^um^. LXI.

plus triangulo H I L. Hoc ipſum vero non vocatur *quadrare*; quoniam lineæ I B, L B, licet rectæ, non tamen ſunt ſub poteſtate algebraïca, ſeu non habent relationem ad A I, H I, algebraïce exprimibilem. Non minus vice verſa, ſi aliqua ex areis Cycloïdicis, ut Zona K D B I, ſit algebraïce quadrabilis, quamdiu tamen illa aliter non determinatur quam per interſectionem curvæ alicujus tranſcendentis O S P & rectæ R S; id certe non eſt nodum ſolvere, ſed magis intricare; facilius quippe intelligitur [huc enim redit] quod dixi in eod. *Actorum* Anno *, ſcilicet ſumtis duobus ſinibus K M, I L, quorum diſtantiæ, a puncto medio P inter A & H, ſint reciproce proportionales ipſorum arcubus A M, A L, Zonam K D B I tunc exiſtere quadrabilem, utpote æqualem triangulis rectilineis & algebraïcis H A L + I A L — H A M — K A M : in hoc unico tota res verſatur. Quomodo vero hujuſmodi ſinus, eam conditionem habentes, univerſali formula ſint exprimendi, proponebam quidem, & ſolutionem aliquam expectabam; ſed fruſtra. Interim genuina nunc clare patet ex noſtris arcuum multiplicandorum & ſecandorum formulis ſupra allatis.

Eſto, ſecundum priorem, radius $AH = 1$, arcus A M ad arcum A L ut 1 ad n, ut P I ad P K; & ſit $AK = z$, adeoque $PK = \frac{1}{2} - z$, $PI = (\frac{1}{2} - z) : n$, & $AI = (\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + z) : n$; unde $AM = \sqrt{2z}$, & $AL = \sqrt{((n - 1 + 2z) : n)}$; ſic igitur ſi in formula priori $x = ab^{n-1} - \frac{n-2}{1} ab^{n-3}$ $+ \frac{n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2} ab^{n-5} - \frac{n-4 \cdot n-5 \cdot n-6}{1 \cdot 2 \cdot 3} ab^{n-7}$ &c. pro x, a & b ponantur valores $\sqrt{((n - 1 + 2z) : n)}$, $\sqrt{2z}$, & $\sqrt{(4 - 2z)}$, prodibit æquatio generalis infinitas ſimul determinans Zonas Cycloïdicas algebraïce quadrabiles, pro ratione unitatis ad numerum, ita ut, in particularis caſus applicatione, nuda tantum ſubſtitutione terminorum ſit opus. Eſto, exempli loco, ut ante $n = 5$, ergo ſubſtitutione e veſtigio facta habetur $\sqrt{((4 + 2z) : 5)} = (5 - 10z + 4zz)\sqrt{2z}$, cujus ergo radix z oſtendit, quanta

* N°. LX. pag. 331.

quanta ſit abſcindenda A K, ut, [facta K P ad PI, ut n ad 1] Zona K D B I fiat quadrabilis.

Haud aliter in formula poſteriori $x = nab^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^3 b^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} a^5 b^{n-5}$, &c. ubi tota diameter ponitur $= 1$, ſi pro x, a, & b, ponantur valores, qui jam ſunt $\sqrt{((\frac{5}{4}n - \frac{1}{4} + z) : n)}$, $\sqrt{z}$ & $\sqrt{(1 - z)}$, orietur iterum generalis æquatio, pro infinitis Zonis Cycloïdicis quadrabilibus ſimul determinandis, quæ, in applicatione ad exempla, aliud nihil requirit, quam nudam terminorum ſubſtitutionem. Sic, in eodem exemplo $n = 5$, proveniet ſtatim $\sqrt{((1 + z) : 5)} = (5 - 20z + 16zz)\sqrt{z}$, quæ manifeſte eadem eſt cum modo inventa, ceu facile apparet, ſi, pro unitate diametri, ſurrogentur duæ unitates radii; & pro quadrato illius, quatuor quadrata hujus.

Atque de his ſatis. Qui noſtrarum formularum univerſalitatem examinare volet, tentet id in variis aliis caſibus ſpecialibus, præter quam in jam allatis, quos communi via indagare facile eſt: in ipſum vero inventionis artificium curioſius inquirendum non eſt, quod Nonneminem invitem; ſufficit, [ſi non harum] ſi ſaltem ſimilium dederit demonſtrationem: hoc ergo, tanquam Problema etiamnum ſibi propoſitum, habet.

Quod ſupereſt, de inveniendo Sectore ſolido Cycloïdico, habente centrum gravitatis ſub poteſtate algebraïca, quem propoſui in *Actis* anni 1700, * agnoſco facile Problema eſſe magis prolixum quam arduum; quomodo enim arduum eſſe poſſet, poſtquam methodum ipſam ibidem jam aperui? Verum ob ipſam ſolam prolixitatem propoſui, ut hac ratione me per alium examinarem, exploraturus num forte in calculum meum error irrepſiſſet. Interim ſolutio data in *Actis* Anni ejuſdem, pag. 552, † non ſatisfacit, quamvis contineatur in æquatione, ad quam pervenitur. Hoc ne mireris: eſt enim ex numero earum quæ, præter radices utiles, etiam inutiles ſeu Proble-

* N°. LX. pag. 333. † N°. LXI. pag. 336.

N°. LXIX. *MULTISECTIO ANGULI.*

[illegible]mati non ſatisfacientes continent, quas niſi probe diſcer- [illegible] Analyſtæ, facile nubem pro Junone captant. Ut ergo [illegible] quod res eſt; calculo meo iteratis vicibus reviſo & exa- [illegible], nullum errorem in eo commiſſum deprehendi. At ſe- [illegible]tis peculiari modo radicibus inutilibus, remanſere duæ [illegible], ſed imaginariæ ambæ, quæ continentur ſub hac æqua- [illegible] $x - 8ax + 24aa = o$, ſumendo x pro diſtantia [illegible] Cycloïdis ab amplitudine maxima ſectoris: dum interim [illegible] diſtantia apicis ſectoris a ſua maxima amplitudine deter- [illegible]r per hanc æquationem $3yy - 6ay + 8xy - 12ax$ [illegible] $x = o$; adeo ut, ſecundum abſtractam Analyſin, Proble- [illegible]idem ſolvi poſſit; at ſecundum Geometriam, & abſolu- [illegible]uendo, nullus omnino detur realis ſector ſolidus Cycloï- [illegible] cujus centrum gravitatis determinetur per quantitates [illegible]lgebraïcas.

[illegible]*icatur* N^us. LXXXIX.

OLU

N°. LXX.

SOLUTION D'UN PROBLEME

Concernant le calcul intégral, avec quelques abregés par raport à ce calcul.

Par M. BERNOULLI Profeſſeur à *Groningue.*

Le tout extrait d'une de ſes Lettres écrite de Groningue *le* 5. Août 1702. *

PROBLEME.

SOit la differentielle pdx: q, *dont* p & q *expriment des quantités rationelles compoſées comme l'on voudra d'une ſeule variable* x & *de conſtantes; on demande l'intégrale, ou la ſomme algébraïque, ou du moins qu'on la reduiſe à la quadrature de l'hyperbole, ou du cercle; l'un ou l'autre étant toûjours poſſible.* *Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences de Paris.* 1702 *pag.* 289. Edit. de Paris. pag. 385. Edit. de Holl.

SOLUT. Soit diviſée p par q, juſqu'à ce qu'enfin la plus grande dimenſion de x, dans le reſte, ſoit moindre que dans q, à moins que la grande dimenſion de x dans p ne fût déja moindre que dans q, auquel cas il n'y auroit point de diviſion à faire. Prenez enſuite l'intégrale du quotient de cette diviſion; ce qui eſt toûjours poſſible, puiſque ce quotient (quant aux x) ſera toûjours entier & rationel. Mais pour l'intégrale du reſte (ce qui eſt proprement le point de la difficulté) voici comme on la trouve. Soit ce reſte appellé r, & ſuppoſons que $rdx : q = adx : (x+f) + bdx : (x+g) + cdx : (x+h) +$ &c. c'eſt à dire $rdx : q$ égale à autant de differentielles logarithmiques, que la plus grande dimen-

* Cette Piece ſe trouve auſſi en Latin, mais moins complette dans les *Acta Erud. Lipſ.* 1703. Janv. pag. 26.

ſion de x, dans q, a d'unités. Et là il eſt à remarquer que a, b, c, &c. de même que f, g, h, &c. ſont des quantités conſtantes indéterminées ; & pour en avoir les valeurs, il faut reduire cette ſomme $adx:(x+f)+bdx:(x+g)+cdx:(x+h)+$ &c. à un dénominateur commun le plus petit qu'il ſoit poſſible ; ce qui la rendra ſemblable à la propoſée $rdx:q$, en ce que x ſe trouvera au même degré dans le dénominateur de l'une & de l'autre. Quant au degré de x dans r, s'il arrivoit qu'il y fût moindre que dans l'autre numerateur, il faudroit y ſuppoſer ceux qui y manqueroient en les affectant de o. Cela fait, il faut égaler entr'eux les termes correſpondans, tant des numerateurs, que des dénominateurs de ces deux ſommes ; ce qui donnera autant d'équations qu'il y aura de coëfficiens indéterminés dans la ſeconde, leſquels ſe détermineront enfin par le moyen de ceux de la propoſée, dont les valeurs données dans r & dans q, donneront celles de ces coëfficiens cherchés ; à moins qu'il ne s'y trouvât de la contradiction ; ce qui marqueroit qu'il y auroit encore quelque choſe d'abſolument intégrable dans la fraction reſtante. L'en ayant donc ſéparé par la diviſion, cette comparaiſon de terme à terme réüſſira toûjours dans le reſte. Par le mot de *Coëfficient* je n'entends pas ſeulement un nombre, mais auſſi toute grandeur conſtante, qui affecte quelque dimenſion que ce ſoit de x.

Autrement. Soit $rdx:q=sdx:t+adx:(x+f)$, en prenant t pour une grandeur compoſée de x, qui deſcendent par degrés juſqu'à une grandeur purement conſtante, & dont la plus grande dimenſion ſoit ſeulement d'une unité moindre que dans q ; pendant que les autres ſont affectées de grandeurs conſtantes : De même par s j'entends une ſuite de dimenſions de x affectées de conſtantes ; & qui deſcendent tellement par degrés, que leur plus grande ſoit d'une unité moindre que la plus grande de celles qui ſont dans t. De cette maniere $sdx:t+adx:(x+f)$ donnera $(sx+sf+at)dx:(tx+tf)=rdx:q$, où les x des dénominateurs

monte-

monteront à un même degré. Ainſi en faiſant le reſte comme cy-deſſus, on trouvera les valeurs des grandeurs conſtantes indéterminées, qu'on y aura ſuppoſées: De ſorte que $rdx : q$ ſe trouvera reſoluë en $sdz : t + adx : (x + f)$, où les x de t ſeront déja d'un degré plus bas que dans q. On reſoudra de même $sdx : t$ en $vdx : w + bdx : (x + g)$, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'enfin on ſoit arrivé à de ſimples racines de x dans les dénominateurs des fractions ſuppoſées; ce qui étant, la reſtante $rdx : q$ de la propoſée, ſe trouvera reſoluë en ces ſimples-ci: $adx : (x + f) + bdx : (x + g) + cdx : (x + h) +$ &c. Il ne reſte donc plus qu'à faire voir comment les intégrales des ces derniéres fractions (qu'on voit dépendre de la deſcription de la logarithmique, ou de la quadrature de l'hyperbole, ſoit réelle, ſoit imaginaire) ſe peuvent exprimer en grandeurs exponentielles ou parcourantes: le voici.

On ſait que $dx : (x + f)$, $dx : (x + g)$, $dx : (x + h)$, &c. ſont les differentielles de Logarithmes de $x + f$; $x + g$, $x + h$, &c. Et qu'ainſi $\int(dx : (x + f))$, $\int(dx : (x + g))$, $\int(dx : (x + h))$, &c. ſeront ces Logarithmes eux-mêmes: De ſorte que l'on aura $\int(dx : (x + f)) = l(x + f)$, & ainſi des autres, où l ſignifiera *logarithme*, comme d ſignifie *differentielle*. Donc $\int(adx : (x + f)) + \int(bdx : (x + g)) + \int(cdx : (x + h)) +$ &c. $= al(x + f) + bl(x + g) + cl(x + h) +$ &c. [par la nature des Logarithmes] $=$ Log. $((x + f).^{a}(x + g).^{b}(x + h).^{c}$ &c.) *Ce qu'il falloit faire.*

COROLLAIRE.

On voit delà comment les équations differentielles rationelles, ou qui, par les manieres de DIOPHANTE, ou par d'autres, peuvent devenir rationelles, & dont les variables avec leurs differences ſe trouvent ſéparées de toutes autres, tant variables, que differentielles, peuvent toûjours ſe reduire à des équations algébraïques ou à d'exponentielles; ce qui

doit être d'un grand uſage dans la Méthode inverſe des Tangentes. En effet, ſi l'on ſuppoſe l'équation $sdx:t = \sigma dy:\theta$, dont x & y ſoient les variables [s & t ne ſont compoſées que de conſtantes & de telles dimenſions de x qu'on voudra; de même σ & θ ne ſont faites que de conſtantes & de telles dimenſions de y qu'on voudra auſſi : le tout délivré des ſignes radicaux], & que l'on prenne X & Y pour ce que les quotiens, qui réſultent des diviſions de s par t, & de σ par θ, ont d'abſolument intégrable, c'eſt à dire, pour les intégrales de ce que ces quotiens ont d'abſolu & ſans fraction; l'on aura $X + \text{Log.}((x+f)^a.(x+g)^b.(x+h)^c\&c.) = Y + \text{Log.}((y+\phi)^\alpha.(y+\gamma)^\beta.(y+\lambda)^\kappa\ \&c.)$ Et ſi l'on prend preſentement l'unité [par laquelle on conçoit que X & Y ſont multipliées] pour un Logarithme conſtant, dont n ſoit le nombre, la réduction des Logarithmes aux puiſſances donnera cette équation exponentielle $n^X.(x+f)^a.(x+g)^b.(x+h)^c.\&c. = n^Y.(y+\phi)^\alpha.(y+\gamma)^\beta.(y+\lambda)^\kappa.\&c.$ laquelle dégenere quelquefois en purement algébraïque, comme lorſque X & Y ſont nuls, & que a, b, c, de même que α, β, κ, ſont commenſurables.

Pour faire preſentemenr ſentir la beauté & l'univerſalité de cette méthode, voici un bel exemple : C'eſt le premier des deux Problémes qui ſe trouvent propoſés dans les *Actes de Leipſic* au mois de *May* de 1698. pag. 232. † & deſquels je trouvai auſſi-tôt la ſolution, que je donnai au mois d'Octobre de la même année de ces Actes pag. 473 *. Où il eſt pourtant à remarquer qu'au lieu de $\int((a^3dz + 4azzdz):(aaz - 6z^3))$ il faut $\int((-a^3dz - 4azzdz):(3aaz + 2z^3))$ & non pas $\int((a^3dz + 4azzdz):(aaz - 2z^3))$. Ce premier Probléme, dis-je, [lequel conſiſte à trouver une Courbe, qui coupe à angles droits toutes les Paraboles décrites ſur un même axe, dont chacune ait ſon parametre égal à la diſtance de ſon ſommet à un même point fixe de cet axe] ne ſe borne pas aux ſeules

Parabo-

† Ci-deſſus N°. LI. Art. III. pag. 261. * N°. LII. pag. 271.

Paraboles ordinaires ; il s'étend à toutes, de quelque degré qu'elles ſoient, & de maniere que la courbe cherchée ſe trouve toûjours algébraïque ou exponentielle. En effet, en prenant x pour le parametre variable d'une Parabole quelconque, m pour ſon expoſant, & $y = xz$ pour l'appliquée de la Courbe cherchée, on trouvera (1) $dx : x = (-mmz^{2m-2} - 1)\,dz : (mz^{m-1} + z + mz^{2m-1})$ & non pas $(1 + mmz^{2m-2})\,dz : (mz^{m-1} - z - mz^{2m-1})$. Ainſi nôtre équation, ne ſe trouvant compliquée d'aucuns ſignes radicaux, quand même l'expoſant m ſeroit irrationel, elle pourra toûjours devenir algébraïque ou du moins exponentielle, par le moyen de la précédente Regle univerſelle ; & par ce moyen la Courbe cherchée ſe trouvera auſſi toûjours algébraïque ou exponentielle.

Au reſte, il eſt à remarquer que la facilité & la brieveté du calcul dépend beaucoup du choix des variables : Par exemple, ſi au lieu de l'appliquée de la Parabole, l'on appelle ſon abſciſſe y, & ſon parametre variable $x = yz$, l'on aura (2) $dy : y = ((-m+1)z^{(m-2):m} - mm)\,dz : (mz^{(2m-2):m} + mmz + mm)$; mais ſi [toutes choſes demeurant les mêmes] l'on ſuppoſe $y = tx$, l'on aura (3) $dx : x = (-t^{(2-2m):m} - mm)\,dt : (mt^{(2-m):m} + mmt + mm)$. Et ſi [les choſes demeurant encore les mêmes que dans la premiere équation] on ſuppoſe $x = zy$, cette ſuppoſition donnera enfin (4) $dy : y = ((mm-m)z^{-2m+1} - mz^{-m+1})\,dz : (mz^{-2m+2} + mz^{-m+2} + 1)$.

La ſeconde équation univerſelle rend le Probléme très-facile dans les Paraboles ordinaires ; car l'expoſant m de ces Paraboles étant $= 2$, cette équation univerſelle (2) donne cette particuliere $dy : y = -5dz : (6z+4) = -\frac{5}{6}dz : (z+\frac{2}{3})$, qui eſt très-ſimple, & qui par la Regle précédente ſe reduit à cette équation purement algébraïque $y(2y+3x)^5 =$ à quelque quantité conſtante priſe à diſcretion, par exemple égale a^6 ; ce qui donnera $x = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\sqrt[5]{(a^6 : y)}$. De ſorte que la Courbe cherchée ſe trouvera enfin algébraïque & très-

facile à conſtruire. Si quelqu'un veut bien ſe donner la peine de faire le calcul néceſſaire pour trouver le degré de la Courbe, en prenant à l'ordinaire x & y pour ſes coordonnées, il la trouvera de 12 dimenſions, ayant pour équation

$$31104yyx^{10} + 25920y^4x^8 + 8640y^6x^6 - 64a^6x^6 + 1480y^8x^4 - 582a^6yyx^4 + 120y^{10}xx + 228a^6y^4xx + 4y^{12} - 4a^6y^6 + a^{12} = 0$$

S C H O L I E.

Puiſque dans l'exemple précedent des Paraboles, de même que dans les autres, les formules ci-deſſus (1), (2), (3), (4), & ce que l'on en pourroit peut-être encore trouver d'autres, donnent des dimenſions differentes, il eſt viſible qu'il y a du choix à faire entre ces formules, & qu'il eſt important de choiſir celle qui donne le moins de dimenſions. Par exemple, ſi l'expoſant des Paraboles eſt $= -1$, c'eſt à dire, ſi ces Paraboles dégenerent en Hyperboles ordinaires; alors on aura deux formules, ſavoir (2) & (4), leſquelles n'éleveront z ou t qu'à quatre dimenſions, pendant que les deux autres les éleveront à cinq. Si l'on choiſit la derniere, l'on aura $dy:y = (-2z^3 - zz)\,dz:(z^4 + z^3 - 1)$, laquelle équation différentielle [à cauſe des quatre dimenſions de z dans ſon dénominateur] ſe peut réſoudre en quatre ſimples, par le moyen de la précedente Regle générale; & ſi l'on en fait exactement le calcul ſuivant cette Regle, on trouvera $dy:y =$ à la ſomme de quatre quantités differentielles ſimples que voici, dans leſquelles la lettre n deſigne la racine de cette équation $n^6 - 3n^5 + 3n^4 - n^3 + 4nn - 4n + 1 = 0$, laquelle donne $n = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + \sqrt[3]{(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{283}{108}})} - \sqrt[3]{(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{283}{108}})})}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{(-4nn+5n-2)\sqrt{(2n+1)}-(n+1)\sqrt{(-2n+1)}}{(8nn-8n+3)\sqrt{(2n+1)}}dz:(z+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n+(n-1)\sqrt{((\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}):(-2n+1))}) \\ +\frac{(-4nn+5n-2)\sqrt{(2n+1)}+(n-1)\sqrt{(-2n+1)}}{(8nn-8n+3)\sqrt{(2n+1)}}dz:(z+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n-(n-1)\sqrt{((\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}):(-2n+1))}) \\ +\frac{(-4nn+3n-1)\sqrt{(2n-3)}+n\sqrt{(-2n+1)}}{(8nn-8n+3)\sqrt{(2n-3)}}dz:(z+\frac{1}{2}n-n\sqrt{((\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}):(-2n+1))}) \\ +\frac{(-4nn+3n-1)\sqrt{(2n-3)}-n\sqrt{(-2n+1)}}{(8nn-8n+3)\sqrt{(2n-3)}}dz:(z+\frac{1}{2}n+n\sqrt{((\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}):(-2n+1))}) \end{array}\right\} = dy:y$$

Mais

Mais n ayant ici deux valeurs réelles ; ſi l'on ſe ſert de la plus grande, l'on aura $-2n+1$ négatif : Et par conſéquent les deux premieres de ces quatre différentielles ſeront imaginaires, & par conſéquent auſſi conſtructibles dépendamment de la rectification d'un arc de Cercle : pour les deux dernieres, elles ſeront réelles & conſtructibles par le moyen de la Logarithmique. Au contraire, ſi l'on ſe ſert de la moindre valeur de n, alors les deux premieres de ces mêmes différentielles ſeront réelles, & les deux autres imaginaires. Ainſi de l'une & de l'autre maniere, la conſtruction de la Trajectrice cherchée des Hyperboles, dépend en partie de la quadrature du Cercle, & en partie de la quadrature de l'Hyperbole, ou de la deſcription de la Logarithmique.

Manieres abregées de transformer les différentielles compoſées en ſimples, & reciproquement ; Et même les ſimples imaginaires en réelles compoſées.

PROBL. I. Transformer la différentielle $adz:(bb-zz)$ en une différentielle Logarithmique $adt:2bt$, & réciproquement.

Faites $z=(t-1)b:(t+1)$, & vous aurez $adx:(bb-zz)$ $=adt:2bt$. Reciproquement prenez $t=(+z+b):(-z+b)$, & vous aurez $adt:2bt=adz:(bb-zz)$.

Corol. On transformera de même la différentielle $adx:(bb+zz)$ en $-adt:2bt\sqrt{-1}$ différentielle de Logarithme imaginaire ; & reciproquement.

PROBL. II. Transformer la différentielle $adz:(bb+zz)$ en différentielle de ſecteur ou d'arc circulaire $-adt:2\sqrt{(t-bbtt)}$; & reciproquement.

Faites $z=\sqrt{(1:t-bb)}$, & vous aurez $adz:(bb+zz)=-adt:$ $2\sqrt{(t-bbtt)}$. Reciproquement prenez $t=1:(zz+bb)$, & vous aurez $-adt:2\sqrt{(t-bbtt)}=adz:(bb+zz)$.

PROBL. III. Transformer la différentielle $adz:(bb-zz)$ en différentielle de ſecteur hyperbolique $adt:2\sqrt{(t+bbtt)}$; & reciproquement.

Faites

Faites $z = \sqrt{(1 : t + bb)}$, & enſuite $t = 1 : (bb - zz)$; & vous aurez ce qu'on demande.

Probl. IV. Transformer la différentielle Logarithmique $adt : 2bt$ en différentielle de ſecteur hyperbolique $adr : 2\sqrt{(r + bbrr)}$.

Faites $t = (b + \sqrt{(1 : r + bb)}) : (b - \sqrt{(1 : r + bb)})$; & vous aurez ce qu'on demande.

Corol. 1. On transformera de même la différentielle Logarithmique imaginaire $adt : 2bt\sqrt{-1}$ en différentielle de ſecteur circulaire réel. Car en faiſant $t = (b\sqrt{-1} + \sqrt{(1 : r - bb)}) : (b\sqrt{-1} - \sqrt{(1 : r - bb)})$, l'on aura $adr : 2\sqrt{(r - bbrr)}$.

Corol 2. Puiſque (*Probl.* 2.) $\int (adz : (bb + zz))$ dépend de la quadrature du cercle, & que d'ailleurs $adz : (bb + zz)$ eſt $= \frac{1}{2} adz : (bb + bz\sqrt{-1}) + \frac{1}{2} adz : (bb - bz\sqrt{-1})$, qui ſont deux différentielles de Logarithme imaginaire; on voit que les Logarithmes imaginaires ſe doivent prendre pour des ſecteurs circulaires réels : parce que la compenſation, qui ſe fait de ces grandeurs imaginaires ajoutées enſemble, les détruit, de maniere que la ſomme en devient toute réelle.

Voiés N°. LXXXIX., & Tom. II. N°. CXIV.

N°. LXXI.

JOHANNIS BERNOULLI

Perfectio Regulæ ſuæ editæ in Libro Gall. Analyſe des infiniment petits, Art. 163. *pro determinando valore fractionis, cujus Numerator & Denominator certo caſu evaneſcunt.*

Acta Erud. Lipſ. 1704. Aug. pag. 375.

Ex nulla re magis eluceſcit Methodi utilitas, quam ſi inexpectatum præſtat auxilium in enodandis quæſtionibus quæ per alias vias, per quas tamen ſolas ſolvi poſſe videntur, infelici plerumque ſucceſſu tractantur, & irreſolutæ manent. Hujus inexpectati auxilii exemplum luculentiſſimum habemus in noſtro Calculo differentiali, circa præſentem materiam. Cum enim, ante hos decem circiter annos, incidiſſem in conſiderationem curvarum quarumdam algebraïcarum, quarum ordinatim applicatæ exprimuntur per fractiones habentes Numeratorem & Denominatorem uno in caſu nihilo æqualem, dum interim ipſius fractionis valor aliquid reale exiſtit, qui prima fronte determinatu non adeo facilis, ſed tanto difficilior, quanto plurium diverſorum laterum complicatione fractio compoſita habetur: Hoc, quicquid erat, Problematis loco propoſui, tum temporis, Illuſtriſſimo *Marchioni* HOSPITALIO, cujus nunc ſuprema fata lugemus, & nonnullis aliis, Galliæ præſertim, Mathematicis, & in ſpecie quidem hoc exemplum $y = (\sqrt{(2a^3 x - x^4)} - a\sqrt[3]{aax}) : (a - \sqrt[4]{ax^3})$, ut nempe mihi definirent valorem ipſius y, quando x ſumitur $= a$; ſiquidem, ex nuda ſubſtitutione aliud nihil emergat, quam $y = a0 : 0$; ex quo utique nihil concludi poſſit.

Illi, re acrius perpenſa, dignam ſatis judicarunt quæſtionem, cui ſe applicarent; ſed varias tentantibus vias, per analyſin ordinariam, inſuperabiles difficultates ſeſe obtulerunt, neque ipſis,

 vel

vel ſomniando, in mentem veniſſet, Calculum differentialem, in quo erant verſatiſſimi, hic aliquid præſidii afferre poſſe: tota quippe quæſtio cum mere eſſet algebraïca, eam etiam non niſi algebraïce reſolubilem cenſebant. Sed cum ex hoc fonte omnia adhibuiſſent, quæ aliquid ad ſcopum conferre videbantur; ſolutiones vero ſuas, diverſis modis tentatas, ſibi contradicere perſpexiſſent, modo hoc, modo illud, nunc $y = a$, nunc $y = 2a$, pro quæſito valore exhibentes, incerti utrum eligerent, agnoverunt tandem ſe multum abeſſe a vera ſolutione, quam a me libenter edoceri cuperent.

Reſpondi ego, ſi ex Analyſi ordinaria petere vellent modum aliquem ſolvendi, debere prius fractionem propoſitam ipſi y æquatam reduci ad æquationem, terminis pure rationalibus conſtantem, eamque poſtea, [quod ſemper fieri poſſit] dividi per $x - a$, & tandem in ea, quæ oritur, tantum ſubſtituendum eſſe a loco x, ut ita habeatur valor ipſius y.

Verum ſimul ſubdidi, hoc quidem ſuccedere in exemplis, ubi non magna ſit complicatio ſignorum lateralium, ut in hoc, $y = (-xx + a\sqrt{ax}) : (a - \sqrt{ax})$; ſublatis enim aſymmetriïs provenire hanc æquationem, $x^4 - 2ayxx - a^3x - 2aayx - ayyx + aayy = 0$, qua diviſa per $x - a$, oriri hanc $x^3 + axx + aax + 2ayx - ayy = 0$, ubi poſito a pro x haberi $3a^3 + 2aay - ayy = 0$, adeoque, reſolvendo æquationem hanc, obtineri $y = 3a$, pro quæſito valore ipſius fractionis $(-xx + a\sqrt{ax}) : (a - \sqrt{ax})$, in caſu quo $x = a$. Quando autem exempla ſint talia, quæ plura, eaque diverſa ſigna lateralia involvant, ut in noſtro $y = (\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{aax}) : (a - \sqrt[4]{aax})$, ubi tria diverſa ſunt ſigna, nullum tunc hac via ſucceſſum ſperandum eſſe, ob immenſum nimis laborem, qui ſuſcipiendus ſit in ſublatione irrationalitatum, & qui illam tantum non impoſſibilem reddat.

Dixi itaque aliam mihi præſto eſſe methodum, quam nulla quantacunque etiam ſignorum involutio irritam reddat, ſeſe porrigentem ad exempla complicatiſſima, eadem facilitate, qua ad ſimpliciſſima. Verum enim vero prælaudati illi Viri ad quæſtio-

tionem mere algebraïcam aliquid utilitatis, ut jam dixi, ex Calculo differentialium afferri poſſe non ſuſpicantes, ſcire geſtierunt ubinam ergo latitaret myſterium; quod, ut illorum indagandi induſtriam excitarem, non ſtatim aperui, uſquedum impenſius flagitantibus in eo conſiſtere tandem oſtendi, quod fractionis propoſitæ Numerator & Denominator conſiderari poſſint, tanquam exprimentes applicatas duarum curvarum ſuper communi axe deſcriptarum, & in aliquo ejus puncto concurrentium; in eo, ſcilicet, quod ab initio abſciſſarum diſtat quantitate a, qua ſubſtituta loco x, fractionis termini in nihilum abeunt, atque adeo cum duæ illarum duarum curvarum applicatæ, in illo puncto evaneſcentes, degenerent in ſuas differentiales; quod oporteat loco Numeratoris & Denominatoris ſubſtitui eorum differentiales, ut nova habeatur fractio ejuſdem valoris cum priore, in caſu ſingulari $x = a$; quod itaque hæc nova fractio, poſt ſurrogatum a pro x, ſtatim datura ſit citra ullam aliam operationem quæſitum valorem; & quidem pro ſuperiori exemplo $y = (\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{aax}) : (a - \sqrt[4]{ax^3})$, facillime hunc $y = \frac{16}{9}a$.

Inexpectata hac facilitate perculſus Illuſtris HOSPITALIUS, Regulam iſtam, juxta alia mea, inſeruit poſtea *Analyſi infinite parvorum*, quam inde citans Doctiſſ. SAURINUS in *Ephemer. Paris.* 3 Aug. An. 1702. neſcius a quo fuerit inventa, generaliorem nonnihil deprædicat eam quam par eſt: ſed, veritatis amore, non eſt diſſimulandus Regulæ illius defectus aliquis, quem neuter animadvertit; hunc igitur ut detegam tollamque, & ita Regulam meam ad perfectionis colophonem perducam; notandum eſt, aliquando accidere poſſe, ut nova fractio orta ex differentiatione terminorum fractionis propoſitæ, eadem adhuc laboret difficultate, id eſt, ut novos acquirat terminos itidem in nihilum abeuntes, in caſu $x = a$; id quod tunc neceſſario contingit, quando differentiales ipſæ terminorum, in eo caſu, reſpectu reliquarum, vel infinite magnæ, vel infinite parvæ evadunt; ſeu quando curvæ illæ, ſuper eodem axe deſcriptæ, non obliquum, ſed vel rectum, vel nullum angulum faciunt cum axe in puncto concurſus. Exempli loco proponatur hæc fractio $(a\sqrt[3]{(4a^3}$

 $+ 4x^3)$

$+ 4x^3) - ax - aa) : (\sqrt{(2aa + 2xx)} - x - a)$; quæritur ejus valor exiſtente $x = a$. Jam vero, ſi differentientur, ex Regulæ præſcripto, termini fractionis: prodibit pro novo numeratore $axxdx \sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{(a^4 + 2a^2x^2 + x^4)} - adx$, & pro novo denominatore $xdx \sqrt{2} : \sqrt{(aa + xx)} - dx$, quorum ille, in caſu propoſito, eſt $adx - adx$, ſeu $0adx$, & hic $dx - dx$, ſeu $0dx$, ideoque & ipſa nova fractio degenerat in $0adx : 0dx$, ſeu $0a : 0$; quæ valorem determinatum nullum habet, & ita per Regulam nihil hactenus proficeretur.

Huic inconvenienti ut medelam afferamus; duas novas oportet ut conſideremus curvas ſuper communi axe deſcriptas, quarum applicatæ eandem habent rationem, quam habent priorum differentiales; & ſi hæ iterum in communi puncto concurſus angulum cum axe facerent vel rectum, vel nullum, aliæ rurſus duæ curvæ conſiderendæ forent, quarum applicatæ haberent cum proxime præcedentium differentialibus eandem rationem: idque toties faciendum, donec perveniatur ad duas curvas axem oblique ſecantes in puncto concurſus; ad tales enim tandem neceſſario pervenietur, niſi fractio propoſita habeat valorem vel nullum, vel infinite magnum; quo caſu, una tantem curva ſecabit axem oblique, altera tanget, aut normaliter ſecabit eum.

Hoc intellecto, facile eſt videre, ſi poſt primam differentiationem terminorum fractionis datæ, alii appareant termini qui, ſubſtituto a loco x, abeant in nihilum, hos iterum eſſe differentiandos, ut & ex his novos prodeuntes, ſi in caſu $x = a$ denuo evaneſcant; & ſic porro uſquedum habeatur fractio conſtans terminis, in eo caſu, non evaneſcentibus.

Ratio hujus proceſſus eſt evidens, ex eo quod differentiæ applicatarum in curvis duabus primis poſſint eſſe, vel comparabiles, in puncto concurſus axi, cum reliquis applicatarum differentiis; quo caſu, una tantum differentiatione opus eſt, ut in exemplo priori $y = (\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{aax}) : (a - \sqrt[4]{ax^3})$; Vel quod differentiæ illæ poſſint eſſe ſimpliciter infinite parvæ vel magnæ, reſpectu reliquarum differentiarum; quo caſu, ſecunda

cunda differentiatio eſt inſtituenda, ut in exemplo altero y — $(a\sqrt{(4a^3 + 4x^3)} - ax - aa) : (\sqrt{(2aa + 2xx)} - x - a)$. Si enim termini ex prima differentiatione orti $axxdx\sqrt[3]{4} : (\sqrt[3]{(a^6 + 2a^3x^3 + x^6)} - adx$, & $xdx\sqrt{2} : \sqrt{(aa + xx)} - dx$ id eſt [diviſo utroque per dx] $(axx\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{(a^6 + 2a^3x^3 + x^6)} - a$ & $x\sqrt{2} : \sqrt{(aa + xx)} - 1$, denuo differentientur, prodibunt $2a^4xdx\sqrt[3]{4} : (aa + xx)^{-\frac{5}{3}}$ & $aadx\sqrt{2} : (aa + xx)^{-\frac{3}{2}}$ quibus poſitis in formam fractionis, & ſubſtituto a loco x habebitur $2a$ pro valore quæſito fractionis propoſitæ $(a\sqrt[3]{(4a^3 + 4x^3)} - ax - aa) : (\sqrt{(2aa + 2xx)} - x - a)$: Vel quod differentiæ illæ poſſint eſſe infinities infinite parvæ vel magnæ reſpectu reliquarum differentiarum, quo caſu, tertia differentiatio adhibenda eſt: & ita, pro gradu infinitatis illius, multitudo differentiationum augebitur. Plura hunc in finem exempla, quæ in promptu eſſent, hic cumulare velle, res eſſet ſupervacanea, & tædii plena.

Cæterum vero, quando ſupra dixi, terminos fractionis propoſitæ habentes differentiales (in caſu $x = a$) reſpectu reliquarum infinite magnas, per ſui differentiationem producere novos terminos, in eo caſu, iterum in nihilum abeuntes; hoc ita intellectum velim, quod poſt peractam reductionem demum in nihilum abeant: alias certe novi termini prodeuntes, ut quilibet attendens facile videt, infiniti potius evadunt, ita ut Numerator ſi $m : 0$, & Denominator $n : 0$ uterque ſcilicet infinitus; ſed per reductionem habeatur $\frac{m:0}{n:0} = \frac{0m}{0n}$, cujus nunc termini utique ex infinitis fiunt evaneſcentes.

N°. LXXII.

PROBLEME A RESOUDRE.

Journal des Savans 1703. 7e. Journ. du 12. Fevr. pag. 112. Édition de Paris. pag. 182. Édition de Hollande.

U*Ne Courbe algébraïque (vulgairement appellée géométrique) étant donnée, la transformer en une infinité d'autres auſſi géométriques, mais d'eſpeces differentes, leſquelles ſoient chacune de même longeur que la propoſée.*

Ce Probléme a été propoſé à Mr. BERNOULLI Profeſſeur à *Groningue*, par un Mathématicien de ſon voiſinage. Il le propoſe à ſon tour aux Géométres, auxquels il donne tout le reſte de cette année, c'eſt-à-dire, juſqu'au commencement de 1704, pour le réſoudre.

N°. LXXIII.

SOLUTIO PROBLEMATIS

A Clariſſ. Viro D. Joh. BERNOULLI, *in* Diario Gallico Febr. 1703. *propoſiti*

Quam D. G. CHEYNÆO communicavit *Joh.* CRAIG.

PROBLEMA.

P*Ropoſita curva geometrica alias innumeras longitudine æquales invenire.*

SOLUTIO.

Philoſoph Tranſact. N°. 289. 1704. Janv. Febr. Art. II. p. 1527.

Sint v, s coordinatæ Curvæ datæ, & Curvæ quæſitæ ſint coordinatæ x, y: tum ex conditione Problematis erit $dv^2 + ds^2 = dx^2 + dy^2$. Ponatur $dx = dv - mdz$, unde erit $dy = \sqrt{(ds^2 + 2m\,dv\,dz - m^2\,dz^2)}$; in hac, pro ds ſubſtituatur ejus valor per v, dv & determinatas expreſſus:

preſſus: & pro dz aſſumatur talis valor ex v, dv & determinatis compoſitus, ut valores quantitatum dx, dy ſint ſummabiles. Et ſic habentur x ac y coordinatæ Curvæ quæſitæ. *Q. E. I.*

Acta Erud. Lipſ. 1709. April. pag. 190.

EXEMPLUM I. Invenire Curvam æqualem lineæ Parabolicæ. Sit $2a$ latus rectum Parabolæ; adeoque $2as = v^2$, unde $ds^2 = a^{-2} v^2 dv^2$, adeoque $dy = \sqrt{(a^{-2} v^2 dv^2 + 2m\,dv\,dz - m^2 dz^2)}$. Ut hæc ſit ſummabilis, aſſumatur $mdz = a^{-2} v^2 dv$, unde $dx = dv - a^{-2} v^2 dv$, & $dy = dv \sqrt{(3a^{-2} v^2 - a^{-4} v^4)}$; Quarum integrales, per methodos dudum cognitas, invenientur $x = v - v^3 : 3a^2$, & $y = \frac{v^2 - 3a^2}{3a^2} \sqrt{(3a^2 - v^2)}$.

EXEMPLUM II. Invenire Curvam æqualem Circulari. Sit a radius Circuli; tum $s = \sqrt{(a^2 - v^2)}$, unde $ds^2 = v^2 dv^2 : (a^2 - v^2)$; & proinde erit $dy = \sqrt{(v^2 dv^2 : (a^2 - v^2) + 2m\,dv\,dz - m\,dz^2)}$. Ut hæc ſit ſummabilis, aſſumatur $mdz = 4v^2 dv : a^2$, adeoque $dx = dv - 4v^2 dv : a^2$, & $dy = (-3a^2 v + 4v^3) dv : a^2 \sqrt{(a^2 - v^2)}$; Quarum integrales, per communes methodos, inveniuntur $x = v - 4v^3 : 3a^2$, & $y = \frac{a^2 - 4v^2}{3a^2} \sqrt{(a^2 - v^2)}$.

EXEMPLUM III. Invenire Curvam æqualem Ellipticæ. Sit $2r$ latus rectum, $2a$ latus transverſum, tum $s = \frac{r}{a} \sqrt{(a^2 - v^2)}$, unde erit $ds^2 = r^2 v^2 dv^2 : (a^4 - a^2 v^2)$, adeoque $dy = \sqrt{(r^2 v^2 dv^2 : (a^4 - a^2 v^2) + 2m\,dv\,dz - m\,dz^2)}$. Ut hæc ſit ſummabilis, aſſumatur $mdz = (2a + 2r) v^2 dv : a^3$; unde $dx = dv - (2a + 2r) v^2 dv : a^3$, & $dy = dv \sqrt{(r^2 v^2 : (a^4 - a^2 v^2) + (4a + 4r) v^2 : a^3 + (2a + 2r)^2 v^4 : a^6)}$; quarum integrales, per methodos notiſſimas, inveniuntur $x = v - (2a + 2r) v^3 : 3a^3$, & $y = \frac{2a^3 - ra^2 - 2av^2 - 2rv^2}{3a^3} \sqrt{(a^2 - v^2)}$.

EXEMPLUM IV. Invenire Curvam æqualem Parabolæ Cubicali, cujus æquatio ſit $3a^2 s = v^3$; unde $ds^2 = v^4 dv^2 : a^2$, & proinde $dy = \sqrt{(a^{-4} v^4 dv^2 + 2m\,dv\,dz - m^2 dz^2)}$. Ut hæc ſit ſummabilis, aſſumatur $mdz = v^2 dv : 2a^2$; unde $dx = dv - v^2 dv : 2a^2$, & $dy = \frac{v\,dv}{2a^2} \sqrt{(3v^2 + 4a^2)}$; quarum integrales, per methodos vulgo notas, ſunt $x = v - v^3 : 6a^2$, & $y = (\frac{vv}{6aa} + \frac{4}{9}) \sqrt{(3vv + 4aa)}$.

Ex aliis infinitis valoribus quantitatis mdz debite aſſumptis, infinitas invenias Curvas datæ æquales. Tu vero, Vir Eruditiſſime, facile percipias hoc Problema aliquam habere cum Problemate quodam *Diophantæo* affini-

affinitatem: Problema DIOPHANTI eſt, Dividere ſummam duorum Quadratorum in duo alia Quadrata, quorum latera ſint rationalia; & Problema BERNOULLII eſt, Dividere ſummam duorum Quadratorum in alia duo Quadrata, quorum latera ſint ſummabilia. Sicut Problematis *Diophantæi* ſolutio a vulgari tantum Algebra dependet, ſic *Bernoulliani* Problematis ſolutio communes tantum Fluxionum methodos inverſas requirit: utriuſque artificium in debita laterum quæſitorum aſſumptione conſiſtit; ſcil. *Diophantæum*, ut ſint rationalia; *Bernoullianum*, ut ſint ſummabilia.

N°. LXXIV.

JOHANNIS BERNOULLI

MOTUS REPTORIUS,

Ejuſque inſignis uſus, pro lineis curvis in unam omnibus æqualem colligendis, vel a ſe mutuo ſubtrahendis; atque hinc deducta Problematis de Transformatione curvarum, in Diario Gallico Pariſ. 12 Febr. 1702 *propoſiti, genuina ſolutio.*

Acta Erud. Lipſ. 1705. Aug pag. 347.

QUartus agitur annus, ex quo ſolutum habui Problema *de transformanda Curva algebraïca in alias innumeras algebraïcas longitudine æquales*, non diu ante mihi propoſitum ab egregio quodam *Belgii* Mathematico. Idem poſtea, quod viderem poſſe præſtare inſignem uſum pro dimenſione & comparatione curvarum, publice propoſui in *Diario Gallico* menſ. *Febr.* 1703, conceſſo totius modo tum incipiantis anni decurſu, ſpe fretus fore ut, per ejus ſolutionem unam vel alteram, Geometria recondita incrementum eſſet captura non ſpernendum. Sed ultra præſtitutum limitem [intra quem nihil ſolutionis comparuit] jam fere ſeſquiannus eſt elapſus, necdum tamen dedi meam ſolutionem; quod fateor oſcitantiæ, an oblivioni meæ imputandum, forſan diutius duraturæ, niſi excuſſiſſet eam viſa mihi nupera clariſſimi *Joh.* CRAIGII ſolutio

ſolutio publicata primum in *Tranſact. Philos. Londin.* Anno 1704, Num. 289, & poſtea tranſcripta in *Acta Eruditorum* noviſſimi *Aprilis.*

Quid de hac ſolutione cenſeam, mearum eſt partium paucis prius aperire, quam meam propoſuero; neque id facere verebor, cum mihi conſtet, Clariſſimi Auctoris popularem Celeberrimum NEWTONUM ſententiæ meæ ab Amico quodam [cui eam privatim perſcripſeram] intellectæ per totum ſuffragari. Quare non ægre laturum ſpero acutiſſimum CRAIGIUM, ſi, quod in ipſius ſolutione deſidero amice & candide proponam. Illam, ut pote brevem, huc tranſcribo totam. „Sint, inquit, v, s coordinatæ Curvæ datæ & Curvæ quæſitæ ſint „coordinatæ x, y: tum, ex conditione Problematis erit dv^2 „$+ ds^2 = dx^2 + dy^2$. Ponatur $dx = dv - mdx$; unde „erit $dy = \sqrt{(ds^2 + 2mdvdz - m^2dz^2)}$; in hac, pro „$ds$ ſubſtituatur ejus valor per v, dv, & determinatas expreſſus: „& pro dz aſſumatur talis valor ex v, dv & determinatis „compoſitus, ut valores quantitatum dx, dy ſint ſummabi-„les. Et ſic habentur x ac y, coordinatæ curvæ quæſitæ. *Q. E. I.*

Nihil unquam expediri potuiſſet brevius, non nego: ſed & ipſa nimia brevitas eſt ſuſpecta. Revera enim quis, quæſo, vel leviter attendens, non viderit ſtatim poſtulari gratis, *& pro* dz *aſſumatur talis valor ex* v, dv *& determinatis compoſitus, ut valores quantitatum* dx, dy *ſint ſummabiles?* Poſtulatum hoc non minus difficile videtur quam ipſum Problema; imo, ſi illud dixero difficilius, non adeo a veritate alienum dixero: ſuperaddit enim tacite Problemati conditionem aliquam præter neceſſitatem, quæ hæc eſt, quod non tantum curvæ, ſcilicet totam toti, ſed etiam partes partibus æquales fieri jubeantur; quæ tamen poſterior conditio non exigitur in Problemate: ſufficit namque exhibere curvam datæ æqualem, licet partes æquales in illis determinari non poſſint. Exempla interim, quæ Vir Clariſſimus adducit, & quæ an recte ſoluta examinare nondum vacavit, non magis probant gene-

 ralem

ralem Problematis ſolutionem, quam ſi quis, per nonnulla exempla æquationum quadratarum & cubicarum a ſe reſolutarum, contendere vellet, ſe monſtraſſe viam generalem reſolvendi æquationem, cujuscunque ſit dimenſionis.

Videtur Doctiſſimus CRAIGIUS ipſe quodammodo agnoſcere imperfectionem ſuæ ſolutionis. Sub finem enim, ubi innuit Problema *Diophantaum*, quo petitur, Dividere ſummam duorum quadratorum in duo alia quadrata, quarum latera ſint rationalia, affinitatem habere cum noſtro, quod putavit neceſſario idem eſſe quam, Dividere ſummam duorum quadratorum in alia duo quadrata, quorum latera ſint ſummabilia; rectiſſime ſubdit, ſolutionem mei Problematis communes tantum Fluxionum methodos inverſas requirere, & artificium in debita laterum quæſitorum aſſumtione conſiſtere, ſcilicet ut ſint ſummabilia; quo ſatis nobis indicare vult, quod, quemadmodum illa fluxionum methodus inverſa nondum ad perfectionem eſt perducta, ſed immane quantum adhuc circa illam a Geometris deſideratur, ita etiam ſolutio ſua, quæ illam methodum requirit, perfecta dici non poſſit: artificium autem [quod ipſe ita vocat] aſſumendi latera debito modo, ut ſint ſummabilia, haud dubie arcanum eſt difficillimum. Non ergo illud in ſolutione generali fuiſſet ſupponendum, ſed demonſtrandum: quod dum fiet, meam nunc ſolutionem cum alio, quod me eo deduxit, novo invento communicare nequaquam gravabor.

Verum hoc loco non eſt diſſimulandum, quod acceptum ferimus Illuſtri noſtro LEIBNITIO, felicioribus auſpiciis rem aggreſſo. Is quippe mihi, ſub initium anni ſuperioris, perſcripſit aliquod tentamen ſolutionis, neutiquam paralogiſticæ; imo cui nihil deerat, niſi ut laborem calculi [qui ad perplexitatem haud facile ſuperabilem deducere videbatur] tollendi modum oſtenderet. Via autem, quam ineundam cenſuit Vir perſpicaciſſimus, conſiſtit in coevolutione duarum curvarum, ope ſtyli commune complicatum filum tendentis, & deſcriben-

bentis tertiam aliquam curvam; quæ, ſi algebraïca ſit, ut & una ex evolutis, altera etiam neceſſario erit algebraïca, non minus quam ipſa etiam coevolutarum differentia ſemper per lineas rectas algebraïce determinabiles exiſtit. Ex quo prævidit Illuſtris LEIBNITIUS, coevolutas poſſe fieri longitudine æquales, evaneſcente ſcilicet illa differentia; adeoque, ut curvæ datæ algebraïcæ inveniatur alia algebraïca æqualis, nihil aliud faciendum eſſe, quam ut aſſumatur pro arbitrio aliqua curva algebraïca [ſpecifice tamen determinata & debite collocata,] quæ præſtet ſpeculi vicem, id eſt, quæ tangentes curvæ datæ, tanquam radios incidentes, ſub angulo æquali reflectat, & per eorum interſectiones, cauſticarum more, formet novam curvam algebraïcam: hæc enim, cum data curva, faciet duas coevolutas pro aſſumta illa arbitraria per filum deſcribenda. Et quia de caſu tantum ſpeciali in calculo agitur, ut nimirum coevolutarum differentia ſit nulla; debito modo aſſumere jubet, ſive ſpeciem, ſive parametrum, ſive ſitum, ſive aliud quid curvæ arbitrariæ, quo, in propoſito caſu, illa differentia evaneſcat, atque adeo datæ evolutæ inveniatur altera æqualis.

Ampliorem ejus rei explicationem non dabo; a nemine enim pro dignitate ſua melius tractabitur, quam ab ipſo inclito Viro, proinde humaniter rogando, ut communium ſtudiorum bono & incremento methodum ſuam, hactenus nonniſi levi penicillo adumbratam, perficere, & inprimis, quomodo arbitraria illa curva, ſpeculi vices ſubitura, ſine operoſo & moleſto calculo, ſpecifice determinanda vel collocanda ſit, ut coevolutarum differentia evadat datæ æqualis, vel nulla, compendioſam aliquam viam aperire nobis dignetur.

Mea nunc inventa daturus, præmitto Geometrarum more nonnullas Definitiones & Poſtulata.

DEFINITIO I.

TAB. XVII. Fig. 1. Per *Normales extremas* intelligo lineas rectas ad utramque curvæ alicujus extremitatem perpendiculariter ductas. Sic BN & AN ſunt normales extremæ curvæ ACB.

DEFINITIO II.

Amplitudo curvæ ad eandem partem concavæ eſt angulus, quem conſtituunt normales extremæ. Sic angulus BNA eſt amplitudo curvæ ACB.

DEFINITIO III.

Secare curvam *in partes æque amplas vel amplitudinis æqualis*, eſt eam ita dividere, ut partium ſingularum normales extremæ conſtituant angulos æquales.

DEFINITIO IV.

Curva curvam *obrepere* dicitur, ſi mobilis ſuper immobili moveatur motu parallelo, & interim altera alteram continuo tangat, partibus convexis ſibi mutuo obverſis. Mobilis autem curva vocetur *Perreptans*, & immobilis *Perreptanda*.

DEFINITIO V.

Curva curvam *ſubrepere* vocatur, ſi ſimilis fiat motus, hoc tantum diſcrimine, quod nunc curva perreptans convexitate ſua, inter *rependum*, tangat continuo partem concavam curvæ perreptandæ.

Ut clarius hi duo motus intelligantur, poſſunt quodammodo comparari cum deviatione navis, qua ſcilicet fit, ut dum exempli gratia, a Borea in Auſtrum vi venti fertur, interim ſimul ab occulto quodam aquarum motu in aliam rapiatur pla-

gam;

gam; quo pacto duas licet concipere curvas, quarum unam uno, alteram altero latere navis perpetuo tangit, quarum proinde una a navi *obrepitur*, altera *ſubrepitur*.

Fingamus igitur (*Fig. I.* & *II.*) curvam ACB immobilem, ſeu perreptandam, aliamque mobilem, ſeu perreptantem ECF, quæ poſito, primo, vertice E in verticem A, axique EG in axem AD, vel cum eo in directum, moveatur poſtea ECF motu parallelo per ACB; hoc eſt, ut axis EG, & ſibi, & AD maneat ſemper parallelus; habebitur (*Fig. I.*) motus *obreptionis*, & (*Fig. II.*) motus *ſubreptionis*. TAB. XVII.

DEFINITIO VI.

Curvam Reptoriam voco, quæ deſcribitur hoc motu, per punctum quodvis in plano perreptantis curvæ ECF ſitum; ut, exempli gratia, AEH per verticem E, vel LGM per punctum G in axe.

DEFINITIO VII.

Curvarum perreptandæ & perreptantis, ACB & ECF, partes illas duas AC & EC, quæ jam ſuum officium fecerunt, illa rependo, hæc reptionem patiendo, vocabo *partes eadem reptione defunctas*.

POSTULATUM I.

Curvæ datæ algebraïcæ poſtulantur dari quoque algebraïce tangentes & normales.

POSTULATUM II.

Poſtulatur Curvam datam algebraïcam ſecari poſſe algebraïce in partes quaſcunque æque amplas.

LEMMA I.

Curvis, perreptandâ & perreptante, exiſtentibus algebraïcis, erit quoque quæ hinc generatur, reptoria algebraïca.

Liquet ex *Poſtul.* I & II. Nam conſtat partes eadem reptione defunctas, AC & EC, eſſe æqualis amplitudinis; adeoque, aſſumpto arcu AC ad lubitum, poſſe algebraïce determinari arcum æque altum EC; hinc & punctum E in curva reptoria AE.

LEMMA II.

Omnes Curvæ reptoriæ, vel quæcunque earum partes eadem reptione deſcriptæ, inter ſe ſunt æquales & ſimiles.

Patet hoc ex parallelisſmo motus: ſumatur enim in plano perreptantis ECF duo quæcunque puncta deſcribentia E & G, quibus connexis per rectam EG, manifeſtum eſt hanc rectam, per motum reptionis ſingulis momentis tranſlatam per intervallum minimum in ſitum priori parallelum, deſcripſiſſe utraque ſua extremitate lineolas parallelas & æquales, quæ cum ſint elementa curvarum AEH, LGM, conſtat propoſitum.

COROLL. I. *Tangentes ductæ ad extremitates omnium reptoriarum, vel quarumcunque earum partium eadem reptione deſcriptarum, parallelæ ſunt omnes, tam inter ſe, quam communi tangenti per punctum contactus curvarum vel partium eadem reptione defunctarum.*

COROLL. II. *Reptoria cum partibus perreptandæ & perreptantis eadem reptione defunctis ſemper eſt ejuſdem amplitudinis.* Hinc jam fluit utiliſſimum, quamvis facile

THEOREMA I.

Omnia Reptoria, vel quæcunque ejus pars, eſt longitudine æqualis, vel ſumma, vel differentiæ partium perreptandæ, & perreptantis eadem reptione defunctarum; nempe ſumma, ſi motus fiat per obreptionem; & differentiæ, ſi per ſubreptionem.

DE-

Demonstr. Concipiatur perreptans ECF progredi in ſitum proximum, ita ut vertice ejus E perveniente in *e* punctum ſimul perreptantis *m* cadat in punctum perreptandæ *n*; clarum nunc eſt, lineolam E*e*, quæ per *Coroll.* I. parallela eſt lineolis C*n* & C*m*, fore in *Fig.* I, æqualem ſummæ C*n* + C*m*, & *Fig.* II, differentiæ earumdem C*n* — C*m*: nam per paralleliſmum motus fit, ut progreſſus puncti E nempe E*e*, ſit æqualis diſtantiæ punctorum *n* & *m*, quæ vero diſtantia, cum particulæ C*n* & C*m* in directum jacere cenſeantur, non differt ab earundum ſumma in *Fig.* I, & a differentia, in *Fig.* II. Sunt vero E*e*, C*n*, & C*m*, elementa ſuarum reſpective curvarum AE, AC, & EC: Ergo etiam, collectim ſumtis elementis, erit curva reptoria AE æqualis in *Fig. I.* ſummæ perreptandæ & perreptantis AC + EC, & in *Fig. II.* differentia earumdem AC — EC. *Q. E. D.* Tab. XVII. *Fig.* 1. & 2.

Scholium.

In memoriam hic ſibi revocabit B. Lector, quod Illuſtre Virorum par, ſummus Leibnitius, & acutiſſimus, dum viveret, Hugenius præſtiterunt, introductis ſcilicet ab hoc *Evolutionis*, ab illo *Tractionis* motibus, non ſine inſigni pro notitia curvarum emolumento: ſed nunc judicet, pro æquitate ſua, annon noſter *Motus Reptionis* illis duobus ſaltem adjungi mereatur. Sive enim ejus facilitatem & ſimplicitatem, ſive utilitatem ſpectare velit, deprehendet eum in omni parte mirifice excellere. Quis enim motus facilior & ſimplicior, quis vero etiam ad praxin accommodatior, quam qui ſibi ſemper parallelus eſt? Quantæ autem ſit utilitatis, præter ardui Problematis ſolutionem mox dandam, vel hoc arguit, quod nobis introitum reſeret ad abſtruſiora, & tantum non hactenus deſperata circa curvas cognoſcenda & efficienda. Quorum unum alterumve tantum notabo: Et primo quidem, cuïvis ſtatim obvium eſt, quomodo, datis duabus aut pluribus curvis algebraïcis, facile alia nova algebraïca inveniatur, cujus area æqualis

ſit

ſit ſummæ vel differentiæ arearum datarum; erecta ſcilicet tantum ad communem abſciſſam nova applicata ſummæ vel differentiæ datarum applicatarum æquali: At vero, ſi non areæ, ſed longitudines ipſæ datarum algebraïcarum, in aliam novam algebraïcam curvam conflari, id eſt, inveniri ſi debeat curva algebraïca, cujus longitudo æquetur aliarum datarum vel ſummæ, vel differentiæ; hoc jam, quod hactenus a nemine effectum reperias, noſtræ videtur reſervatum methodo, rem mirabili brevitate abſolventi. Etenim ſi primo duas ex datis curvis ſumas, earumque unam obrepere facias, alteram habebis reptoriam duabus datis æqualem; ad quam ſi eodem modo addas tertiam datam curvam, ope obreptionis denuo inſtituendæ, prodibit alia nova reptoria tribus iſtis datis curvis longitudine æqualis, cui ſimili modo quartam, poſtea quintam, & plures porro addendo, habebis tandem unam omnibus ſimul curvis datis æqualem, & quidem, per *Lemma I*, algebraïcam, ſi tales quoque fuerint datæ; ſicubi vero differentia, vel ſubſtractio curvarum facienda occurrit, loco tunc obreptionis, ſubreptionem inſtituendam eſſe, non neceſſe duco ut moneam.

Quæ cum ita ſe habeant, nulla poſthac erit res ardua, curvas non tantum diſſimiles, ſed & diverſorum omnino generum in unam [ſubintelliges algebraïcam, ſi illæ tales fuerint] colligere, vel a ſe mutuo ſubtrahere, vel partim ſubtrahere & partim addere; atque vel aggregato, vel differentiæ, vel partim differentiæ, partim aggregato, unam æqualem conſtruere curvam. Sic exempli gratia, non ſolum Ellipſes quotcunque diſſimiles [quod tamen antea ſat magnæ difficultatis fuiſſet] ſed Ellipſes cum Hyperbolis, & Parabolis, per noſtram methodum facile coaleſcent in unam, hoc eſt, ſine magno labore exhibebo jam curvam algebraïcam, quæ ſola trium ſectionum conicarum datarum longitudinem exæquet. Ex hiſce vero deducitur ſequens in abſtracto propoſitum

THEO-

THEOREMA II.

Sint curvæ quot & qualeſcunque ADL, ACM, ABN; *ſitque alia curva* APR *cujus abſciſſa* AO *æqualis abſciſſarum ſummæ* AE + AF + AG *reſpondentium partibus* AB, AC, AD, *æque amplis; & applicata* OP *æqualis applicatarum ſummæ* EB + FC + GD: *Dico curvam* AP *æquari longitudine omnibus curvis* AB + AC + AD. *Quod ſi vero* AO *eſſet ſumma abſciſſarum tantum aliquarum, mulctata reliquis abſciſſis, & ſimiliter* OP *ſumma reſpondentium applicatarum, mulctata reliquis applicatis: Dico fore etiam curvam* AP *æqualem ſummæ curvarum unarum, mulctata reliquis curvis. Exempli gratia, ſi* AO *ſit* = AG + AF — AE, *&* OP = GD + FC — EB; *erit curva* AP = AD + AC — AB. *Dico tandem etiam, in utroque caſu, fore curvam* AP *æqualis amplitudinis, cujus ſunt* AB, AC, *vel* AD. TAB. XVII. *Fig.* 3.

Demonstratio hujus ex præcedenti *Theoremate* haud difficulter colligitur: immo & immediate ex calculo differentialium directo peti poteſt. Quare illa relicta, revertor ad motum noſtrum reptorium; qui hoc alterum notatu dignum nobis ſuppeditat, quod eſt inventum de dimenſione linearum curvarum per circulares a me jam olim publico exhibitum in *Actis* hiſce Anni 1695, m. *Aug.* † & Nobiliſſimis Duumviris Leibnitio & Tchirnhausio * tantopere laudatum, eodem Anno, menſe *Novembri*: quo oſtendi duas curvas, eadem evolutione condeſcriptas, per duo quælibet fili evolventis puncta, habere ſummam vel differentiam æqualem arcui circulari. Lubet ergo nunc oſtendere, quomodo hoc Theorema, quod tunc ſingulari demonſtratione muniveram, non ſit niſi ſpecialiſſimus duntaxat caſus præſentis hujus de Reptoriis.

Sit enim curva perreptanda quæcunque ACB, ſed perreptans ECG ſit jam circulus; ſumaturque punctum deſcribens reptoriam LOM, in ipſo centro O; patet ſtatim reptoriam LOM eſſe, hoc caſu, eam quæ deſcriberetur per evolutio- TAB. XVII. *Fig.* 4.

† Supra N°. XXVI. * Supra N°. XXVIII. & XXIX.

nem eandem, per quam deſcriberetur ipſa ACB: puncta enim O & C intervallo ſemper æquali & perpendiculari ad curvas LOM & ACB exiſtentia, haſque proinde æquidiſtantes facientia, facile concipiuntur neceſſario eſſe in filo communi evolvente. Habemus igitur curvam LO per obreptionem æqualem ſummæ; & per ſubreptionem, æqualem differentiæ curvæ AC & arcus circularis EC, adeoque & hunc arcum utroque modo æqualem differentiæ curvarum LO & AC. Quando vero circulus ſubrepens ECG minoris eſt convexitatis, quem curva perreptanda ACB, id eſt, quando curvatura circuli ECG includit curvaturam ACB, illius nempe radio majore exiſtente quam radius circuli oſculantis in C; erit tunc differentia inter AC & EC penes arcum EC tanquam majorem; unde ſumma curvarum AC & LO, partes concavas ſibi jam obvertentium, habebitur æqualis arcui circulari EC. Verum enimvero cum parum ſit naturalis & incommode peragatur motus ſubreptionis, ubi ſuprepens includit ſubrependam, poſſunt hæ vices ſuas permutare, ita ut nunc circulus ſubrependæ, illa vero ſubrepentis functionem obeat: ſciendum quippe, in genere, per converſionem perreptantis in perreptandam, & viciſſim, nihil in reptoria quæ deſcribitur immutari, præter ſitum.

Atque ita veritatem Theorematis ex *Actis* citatis, tanquam corollarium ex novo hoc motus reptorii invento deduximus, ubi præterea notare convenit fundamentum, cur curvæ ex evolutione condeſcriptæ, nihil aliud ſint quam ſpecies reptoriarum; id quod in hoc conſiſtit, quoniam circulus ECG, ob partes ſuas ſimilares, ſive motu rotationis, ſive motu reptionis feratur ſuper AC, centro ſuo A eandem, utroque modo, deſcribit cuvam LOM: Atqui rotando, uti notum eſt, fit condeſcripta ex evolutione: Ergo conſtat quod indicare volui.

Ne vero diutius Lectorem detineam, propero tandem ad ſolutionem genuinam Problematis in *Diario Gallico* propoſiti, *de Transformatione Curvarum*; quod, ſi unum excipias ampliſſimum LEIBNITIUM, qui non infeliciter adeo rem eſt adorſus,

adorſus, in hanc uſque tamen diem, quantum conſtat, nondum perfectam a quoquam accepit enodationem, & ne ab illis quidem, quod miremur, qui nihil non pervium ſibi, & multa ſibi ſolis perſpecta putantes, alios provocando, nec modum nec menſuram tenuerunt: qualis vero cauſa ſit veterni corripientis eorum ſagacitatem hac in parte, hujus loci non eſt inquirere.

PROBLEMA.

Datam curvam algebraïcam transformare in alias innumeras etiam algebraïcas ejuſdem cum ipſa longitudinis, ſed quæ ſint diſſimiles datæ, tam quoad totum, quam quoad partes.

SOLUTIO I. *per motum obreptionis.*

Eſto curva data algebraïca ACB, quæ per *Poſtul. II.* ſecetur in partes aliquot æquales amplitudinis, exempli gratia, in duas AP & PB. Convertatur una ex iis, ut AP, circa rectam tangentem in P tanquam circa axem, ut convexitas in contrariam mutetur, ſumatque ſitum aP; in hoc ſitu obrepat aP partem PCB; ita, ſcilicet, ut inter rependum ſemper ſervet ſitum $\alpha C \pi$ parallelum primo aP. Curva reptoria, quæ hinc deſcribitur, PπQ, per punctum aliquod ad lubitum aſſumtum in plano curvæ $\alpha C \pi$, ut π, erit una ex quæſitis. Eſt enim, per *Theorema I.* $P\pi Q = \alpha C \pi + PCB =$ [quia $\alpha C\pi = aP = AP$] $AP + PB = APB$. Eſt autem PπQ curva algebraïca, per *Lemma I.* Adeoque datæ algebraïcæ inventa eſt alia algebraïca æqualis; cui poſtea eadem methodo inveniri poteſt æqualis ſecunda, & deinde ſecundæ tertia, tertiæ quarta & ita in infinitum. Sunt vero etiam omnes diſſimiles, quoniam ſemper pars reptoriæ extrema Pπ æqualis eſt partibus $PC + \pi C$, hoc eſt parti alicui intermediæ inter extremitates curvæ datæ APB; quod neceſſario diſſimilitudinem curvarum, partiumque ejus arguit; excepto unico caſu, quo nempe curva data æquabilis convexitatis, omneſque adeo par- TAB. XVII. Fig. 5.

 tes

tes ſimilares, id eſt, ſi curva data eſſet circulus, quem igitur hic exceptum volo, daturus infra pro eo ſolutionem peculiarem. Ergo transformata eſt omnis curva data, excepto circulo, in alias innumeras ſibi æquales, & quidem omnes algebraïcas, ſi propoſita ſit algebraïca. *Q. E. F.*

Coroll. I. Curva inventa prima P π Q dimidiæ eſt amplitudinis, cujus eſt data APB; ſecunda amplitudinis eſt partis quartæ, tertia octavæ, quarta decimæ ſextæ, & ſic porro; decreſcentibus ſcilicet amplitudinibus curvarum in progreſſione geometrica ſubdupla: unde ultro hic ſe nobis offert nova ratio rectificandi curvas per approximationem. Cum enim recta linea nihil ſit aliud quam curva amplitudinis infinite parvæ, curvæ utique noſtræ, ipſi APB æquales, per ſucceſſivas operationes inventæ, quanto minoris fiunt amplitudinis, tanto magis ad rectas lineas accedunt.

Coroll. II. Si curva propoſita ſecetur in tres partes amplitudinis æqualis, eæque per methodum ſupra traditam conflentur in unam curvam, habebimus iterum novam propoſitæ æqualem, quæ poſtea ſimiliter in aliam, & hæc iterum in aliam [& ita quoties libuerit] transformabitur. Pari ratione, ſi ab initio ſecetur curva data in quatuor partes æqualis amplitudinis, prodibit nova progreſſio infinita curvarum inventarum datæ æqualium; per quinquiſectionem curvæ datæ rurſus nova obtinetur curvarum ſeries; nec non nova, & nova ſemper, habetur per ſectionem in ſex, in ſeptem, in octo &c. partes æque amplas. Et ita ſatisfactum eſt Problemati, non uno modo tantum, ſed modis infinitis, quorum ſinguli innumeras exhibent curvas datæ æquales. Hi modi ſi combinentur, prodibit numerus modorum infinitorum infinitus; quibus ulterius combinatis ſine fine, exoriuntur novi ſemper infinitatis gradus, quibus præcedentes quaſi abſorbentur.

Tab. XVII. *Fig.* 5. Coroll. III. Alia præterea ratione obreptio initialis peragi poteſt; mutato nimirum ſitu partis AP, vel α P, ut extremitates partium non contiguæ ab initio ſe tangant, hoc eſt, ut extremitas α partis α P tangat extremitatem P partis PB,

PB, hacque diſpoſitione inſtituatur obreptio. Fiet enim reptoria P π Q, omneſque reliquæ, poſtea ut prius deſcribendæ, a prioribus diverſæ, & tamen ipſi propoſitæ APB æquales. Hic autem modus imprimis locum obtinet, quando curvæ partes PA & PB ſunt æquales & ſimiles, uti fit, cum APB eſſet, exempli gratia, aliqua ex Sectionibus conicis, in qua punctum P foret vertex ſummus; quo caſu curva reptoria P π Q, per priorem modum deſcripta, eſſet nova tantum Sectio conica; ſed parti PA vel PB omnino ſimilis; id quod non ſatisfaceret Problemati; quippe quod requirit curvam propoſitæ diſſimilem. Atque hic in univerſum eſt notandum, quotieſcunque curvæ perreptans & perreptanda ſunt eædem, vel tantum ſimiles, ſeque tangunt, ab initio reptionis, in punctis ſimilibus, curvam reptoriam hinc generatam illis ſemper etiam fore ſimilem: cujus ratio attendenti haud difficulter pateſcit. Quando igitur dixi in ſolutione curvam P π Q diſſimilem eſſe ipſi APB, vel parti AP, excepto ſolo caſu, quo data curva APB eſſet arcus circuli, iſta verba ſub hac reſtrictione dicta velim, ut nimirum, ſi propoſita conſtet duabus partibus PA & PB æqualibus & ſimilibus, ſitus tunc partis *a* P prius permutetur, admoto ſcilicet *a* partis *a* P ad punctum P partis PB: alioquin certe reptoria deſcripta P π Q foret parti AP vel PB omnino ſimilis.

SOLUTIO II. *per motum ſubreptionis.*

Eſto curva data algebraïca ACB ad quam conſtruatur prius alia ſimilis LMNR, illiuſque dupla, quod quomodo fiat dudum eſt cognitum, ducendo tantum, ex aſſumpto quodam puncto O, per ſingula datæ curvæ puncta, rectas OL, OM, ON, OR duplas ſuarum partium OA, OP, OC, OB: Deinde ſumta LMNR pro perreptanda, & APCB pro ſubrepente, atque admoto B ad L, vel A ad R fiat ſubreptio. Dico reptoriam hinc genitam fore æqualem propoſitæ APB: Eſt enim æqualis differentiæ inter LMNR & APB, per TAB. XVIII. *Fig.* 5.

 Theo-

Theorema noſtrum I. Differentia vero æquatur ex conſtructione ipſi A P B. Ergo &c. *Q. E. F.*

Nota, quod pro ſubreptione inchoanda dixerim admovendum eſſe A ad R, vel B ad L; ſecus enim ſi A ad L, vel B ad R admoveretur, reptoria prodiret eadem cum A P B. Fateor equidem, hoc incommodum, certis caſibus, etiamſi adhibita illa cautela, poſſe occurrere; tunc nempe, quando curva data A P B duas habet partes P A & P B inter ſe æquales & ſimiles. Hoc vero inconveniens multis modis tolli poteſt; conſtruendo, exempli gratia, dimidiæ tantum A P, curvam ſimilem in ratione tripla; id eſt, ut ubique O L ad O A, O M ad O P, ſe habeant, ut 3 ad 1. Sic enim, admoto A ad M, vel P ad L; ſi A P ſubrepſerit M L, habebit reptoriam diſſimilem & duplam ipſius A P, adeoque toti A P B æqualem. Cæterum prærogativa aliqua gaudet hæc conſtruendi methodus ſuper præcedentem; dum non indiget *Poſtulato II.* ſectio enim curvarum in partes æque amplas moleſtiam quandoque in praxi creare poſſet; quæ autem hic commode evitatur. Sciendum interim hoc artificium, quod nititur prævia conſtructione curvæ ſimilis, ad habendam curvam diſſimilem & æqualem propoſitæ, poſſe etiam in motu obreptionis locum habere. Etenim, ſi conſtruatur curva L M N R datæ A P B ſimilis, ſed ſemiſſis tantum longitudinis; quod fit, biſecando rectas ex polo O eductas O A, O P, O C, O B; obrepat poſtea L M N R ſe ipſam inverſo ordine, hoc eſt curva L M N R bis deſcribatur, atque una obrepat alteram, facto ſcilicet reptionis initio ab unius extremitate L applicata ad extremitatem R alterius; manifeſtum eſt, reptoriam hinc exurgentem [quippe æqualem per *Theorema I.* duplici L M N] æqualem eſſe propoſitæ A P B, ut & eidem diſſimilem, niſi forte partes P A & P B eſſent æquales & ſimiles; quo caſu adhibenda foret medela modo ſupra allata. Cæteroquin tamen hoc notandum in favorem prioris ſolutionis, quod per hanc poſteriorem, non quemadmodum per priorem, amplitudines reptoriarum decreſcant; ipſæ-

ipſæque adeo ad rectitudinem magis magiſque accedant; ſed ex adverſo omnes prodeant ejus amplitudinis, cujus eſt curva propoſita.

Solutio ſingularis pro Circulo.

Pervenio tandem ad caſum unicum [ſi curva data circularis eſt] qui ſolus ſolutiones noſtras generales non agnoſcit, iiſque non comprehenditur, quem propterea jam ſupra excepi. Nam quomodocunque circulus circulum perreptet, ſive obrependo, ſive ſubrependo; reptoria quoque orietur ſemper circularis, cujus cauſa eſt, ut ſupra jam monui, æquabilis convexitas circuli, ſeu partium ejus non interrupta ſimilaritas. Ne igitur, hoc uno in caſu, inter infinitos, immo omnes alios a nobis ſolutos, aqua nobis hæreret, excogitanda fuit pro circulo peculiaris ſolvendi ratio, petita ex methodo jam olim mihi pro aliis curvis non infeliciter adhibita, ut videre eſt in *Actis* hiſce, *Anno* 1694, pag. 396 & 397 *, ut & *Anno* 1695, pag. 64 †, ubi ea uſus fui ad conſtruendam curvam paracentricam per longitudinem curvæ algebraïcæ; atque jam tum monui eam conſiſtere in diviſione quadrati differentialis propoſitæ in duo alia quadrata, quorum latera ſint integrabilia, adeo ut videre poſſit Clariſſimus CRAIGIUS, ſuæ ſolutionis fundamentum jampridem mihi innotuiſſe; quamquam tamen pro univerſali venditare nollem. Interim ecce ſolutionem pro circulo.

Eſto Circulus, cujus peripheria transformanda ſit in curvam aliam algebraïcam: Deſcribatur primo circulus alius A B E cujus radius C A = 8 radiis circuli propoſiti, ut ſcilicet quadrans A B totam circumferentiam datam contineat bis: Sit radius CA vel CB $= a$, abſciſſa CD $= x$, adeoque applicata DP $= \sqrt{(aa - xx)}$; conſtruatur nunc alia curva HGR hac conditione, ut ſit abſciſſa CF $= (3aax - x^3) : 3aa$, & applicata FG $= (aa - xx)\sqrt{(aa - xx)} : 3aa$; quo facto, erit ſemper, uti calculanti facile patebit, portio curvæ HG ducta in radium æqualis ſegmento circulari A P D C; adeo ut, ſumta C D = ipſi radio [quo caſu ſegmentum A P D C dege- TAB. XVII. Fig. 6.

* Nº. XIX. pag. 121. † Nº. XXIII. pag. 137.

generat in quadrantem circuli AB] hinc fiat $CF = CR = \frac{2}{3}a$, & $FG = 0$; ipſa autem curva HGR ducta in radium = quadranti circuli CAB = quadranti circumferentiæ APB ducto in ſemiradium : Unde curva $HGR = \frac{1}{2} APB =$ [per conſtr.] toti circumferentiæ datæ ; quam igitur mutavimus in æqualem aliam curvam algebraicam : Hæc vero porro, per præcedentes ſolutiones, in alias infinitas transformabitur. Quare nunc dedimus Problema ex omni parte ſolutum.

N°. LXXV.

SOLUTION DU PROBLEME

Propoſé par M. Jaques BERNOULLI, *dans les* Actes de Leipſic *du mois de* May *de l'Année 1697 ; trouvée en deux manieres par M.* Jean BERNOULLI *ſon Frere, & communiquée à M.* LEIBNITZ *au mois de* Juin 1698 †.

SUR LES ISOPERIMETRES.

PROBLEME I.

Memoires de l'Acad. Roy des Sciences de Paris 1706. pag. 235. Ed. de Paris. pag. 304. Ed. de Holl.

De toutes les Courbes iſopérimétres décrites ſur un même axe déterminé BN, *trouver la Courbe* BFN *telle, que ſes appliquées* FP *élevées à une puiſſance donnée, ou generalement telle, que les fonctions quelconques de ces appliquées, exprimées par d'autres appliquées* PZ, *forment ou rempliſſent un eſpace* BZN, *qui ſoit le plus grand de tous ceux qui peuvent être formés de la même maniere*

† Cette Solution étoit Latine, dans un paquet cacheté, préſenté à l'Académie Royale des Sciences de Paris, Le 1. Fevr. 1701, par Mr. VARIGNON, de la part de Mr. BERNOULLI, qui recommenda en même tems qu'il ne fût ouvert, qu'après que ſon Frere auroit publié ſon Analyſe de ce même Probléme (Voiés N°. LXVI.) Comme il y eut des difficultés ſur cette Publication & qu'enſuite Mr. BERNOULLI *l'ainé* eſt mort le 16 Août 1705, le paquet n'a été ouvert par l'Académie que le 17 Avril 1706.

maniere : ou bien [ce qui revient au même] une Courbe BH, *qui ait pour axe* BG *perpendiculaire à* BN, *étant donnée, déterminer la Courbe* BFN *dont les appliquées* FP *prolongées juſqu'en* Z, *enſorte que* PZ *ſoit égale à* GH, *faſſent un eſpace* BZN, *qui ſoit le plus grand de tous ceux qui peuvent être formés de la même maniere & compris par d'autres Courbes quelconques décrites ſur* BN *& de même longueur que* BFN. TAB. XVIII. *Fig.* 1.

SOLUTION.

Que $BF\Phi$ ſoit une partie de la Courbe cherchée, & que $BZ\zeta$ ſoit partie de l'autre Courbe engendrée par celle-ci, ſuivant les appliquées de la Courbe donnée *BH*. Je regarde $FO\Phi$, élement de la Courbe $BF\Phi$, comme composé de deux petites lignes droites FO, $O\Phi$; & de même l'élement $ZL\zeta$ de la Courbe $BZ\zeta$, comme composé de deux petites lignes droites ZL & $L\zeta$. Maitenant, parce que toute Courbe, qui doit donner un *Maximum*, conſerve auſſi dans toutes ſes parties les loix de ce même *Maximum*, il ſuit que ſi des point *F* & Φ on mene deux autres petites lignes droites $F\omega$, $\omega\Phi$, leſquelles priſes enſemble ſoient égales à $FO + O\Phi$, & que de ces lignes on en forme par la même loi $Z\lambda$, $\lambda\zeta$, de même que de FO, $O\Phi$, on a formé ZL, $L\zeta$; il ſuit, dis-je, que l'eſpace $ZP\pi\zeta\lambda Z$ doit être plus grand que tout autre $ZP\pi\zeta\lambda Z$. Afin donc de trouver la poſition requiſe des petites lignes FO, $O\Phi$, qui doivent donner ce *Maximum*, & delà de trouver la nature de la Courbe $BF\Phi$; je conçois que foyers F, Φ, & de la longueur du fil $FO\Phi$, on ait décrit une petite Ellipſe, ſur la circonférence de laquelle les deux points O, ω, ſoient infiniment proches l'un de l'autre, c'eſt à dire, dont la diſtance $O\omega$ ſoit infiniment plus petite que la diſtance des foyers F, Φ, quoique la droite $F\Phi$ ſoit déja infiniment petite par elle-même, étant la ſoûtendante de l'élement $FO\omega\Phi$ de la Courbe $BF\Phi$. Donc, par la nature du *Maximum*, les deux eſpaces $ZP\pi\zeta LZ$ & $ZP\pi\zeta\lambda Z$ ſeront égaux entr'eux; & en *Fig.* 2.

 ayant

ayant ôté ce qu'ils ont de commun, il reſtera le triangle ZLY égal au triangle $\zeta\lambda Y$; ou bien menant les paralleles LO, $\lambda\omega$ [en négligeant les parties infiniment plus petites LYM & $Y\lambda\mu$] le triangle ZLM ſera égal au triangle $\zeta\lambda\mu$, c'eſt à dire, qu'ayant mené ZC & ζD paralleles à l'axe $B\pi$, comme auſſi FI & ΦK, l'on aura $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$. Mais parce que LM eſt la différence des lignes LR, MR, de même que $\lambda\mu$ l'eſt des lignes $\lambda\varrho$, $\mu\varrho$; & que LR, MR, & $\lambda\varrho$, $\mu\varrho$, ſont les fonctions des lignes reſpectives RO, RT, & $\varrho\omega$, $\varrho\theta$; il eſt clair que LM repréſentera la différence des fonctions qui ſont entre RO, RT; & que $\lambda\mu$ repréſentera de même la différence des fonctions qui ſont entre $\varrho\omega$, $\varrho\theta$. Il faut bien remarquer, que la différence des fonctions de deux lignes comme RO, RT, qui ſe ſurpaſſent d'une quantité TO infiniment petite du ſecond genre, ſe trouve en différentiant ſimplement la fonction de RO, & en multipliant par TO ce qui en vient, ayant omis les différentielles: Par exemple, ſi RL, fonction de RO, étoit ſeulement la puiſſance n de la même RO, en quoi conſiſte le cas de mon Frere, c'eſt à dire que ſi la Courbe BH étoit une Parabole du degré n, alors LM ou $(RO - RT)^n$ ſeroit $= nRO^{n-1} \times TO$. De même, ſi la Courbe BH étoit un cercle dont le rayon fût $= a$, alors LM ou $\sqrt{(2a \times RO - RO^2)} - \sqrt{(2a \times RT - RT^2)}$ ſeroit $= a - RO) \times TO : \sqrt{(2a \times RO - RO^2)}$; & ainſi des autres. Il faut auſſi remarquer, qu'en général on exprimera les différences des fonctions de RO, RT, par $\Delta RO \times TO$, en prenant Δ pour le ſigne ou la caractériſtique des différences des fonctions, où l'on omet les différences des grandeurs dont elles ſont fonctions. Donc ayant déja $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$, l'on aura auſſi $FI \times \Delta RO \times TO = \Phi K \times \Delta \varrho\omega \times \theta\omega$.

Maintenant, des centres F & Φ ſoient décrits les petits arcs OX, $\omega\xi$, leſquels, par la nature des l'Ellipſe, ſont égaux entr'eux. Donc TO eſt à $\omega\theta$ comme la ſecante de l'angle XOT ou IFO, eſt à la ſecante de l'angle $\xi\omega\theta$ ou $K\Phi\omega$. Mais on auſſi FI:

ΦK

$\Phi K = FO \times$ ſin. $FOI : \Phi\omega \times$ ſin. $\Phi\omega K$. Donc ſi à la place de FI, ΦK, & de TO, $\theta\omega$, on ſubſtituë les grandeurs qu'on leur voit ici proportionelles, on aura $FO \times$ ſin. $FOI \times \Delta RO \times$ ſec. $IFO = \Phi\omega \times$ ſin. $\Phi\omega K \times \Delta\rho\omega \times$ ſec. $K\Phi\omega$. Or par les loix des ſinus, tangentes, & ſecantes, le rectangle fait du ſinus de l'angle FOI par la ſecante de l'angle IFO, eſt égal au quarré du ſinus total, lequel par les mêmes loix eſt égal au rectangle fait du ſinus de $\Phi\omega K$ par la ſecante de $K\Phi\omega$. Donc $FO \times \Delta RO = \Phi\omega \times \Delta\rho\omega$; ou ſi pour RO l'on prend ſon équivalente PF, qui lui eſt jointe par la petite ligne droite FO, & que pour $\rho\omega$ on prenne de même ſon équivalente $\pi\Phi$, l'on aura $FO \times \Delta PF = \Phi\omega \times \Delta\pi\Phi$; & par conſéquent $\Delta PF : \Delta\pi\Phi = \Phi\omega\ [\Phi O] : FO =$ ſin. $OF\Phi$: ſin. $O\Phi F$. Et, *permutando*, ΔPF : ſin. $OF\Phi = \Delta\pi\Phi$: ſin. $O\Phi F$. Et parce que $F\Phi$ eſt la ſoûtendante d'un arc infiniment petit $FO\Phi$ de la Courbe $BFO\Phi$; & qu'ainſi on peut regarder chacun des angles $OF\Phi$ & $O\Phi F$ comme la moitié de l'angle de la courbure en F & en Φ; il ſuit que ΔPF eſt au ſinus de la courbure en F, comme $\Delta\pi\Phi$ eſt au ſinus de la courbure en Φ, c'eſt à dire, en raiſon conſtante. Ainſi ce Probléme étant ainſi reduit à la pure analyſe, on peut l'énoncer en cette ſorte.

Trouver la Courbe BFΦ, *dont la nature ſoit telle que le ſinus de ſa courbure, dans un de ſes points quelconque* F, *ſoit à la fonction différentiée de ſon appliquée reſpective* PF [*ayant négligé la différence de cette appliquée*] *en raiſon conſtante.*

Voici la maniere dont on peut réſoudre ce Probléme. Soit BF la Courbe cherchée, dont l'élement [que l'on prend pour conſtant] ſoit $Fl = dt$, $BP = y$, $PF = x$, $Pp = dy$, $Cl = dx$; ſoit regardée Fm comme la tangente en $F = Fl$, & par conſéquent lFm comme l'angle de la courbure, dont le ſinus eſt lm. Soit enfin le triangle rectangle mnl, dont les côtés mn, nl, ſoient paralleles aux côtés lC, CF, du triangle FCL; l'on aura $mn = ddx$, & $nl = ddy$. De plus TAB. XVIII. Fig. 5.

 à

à cauſe de ces triangles ſemblables CFl, nml, on aura auſſi $Cl\,[dx] : Fl\,[dt] = nl\,[ddy] : ml = \frac{dtddy}{dx}$. Mais par la nature de la Courbe, ml eſt à ΔPF en raiſon conſtante. Donc en faiſant $\frac{dtddy}{dx} : \Delta x = dt : a$; l'on aura cette équation $addy = \Delta x \times dx$. Mais comme $\Delta x \times dx$ eſt la fonction elle-même différentiée; ſi l'on intégre, l'on aura la fonction elle-même, ou GH. Soit donc cette ligne $GH = X$, ayant auſſi pris l'intégrale de l'égalité qu'on vient de trouver, on aura $ady = X \pm c$; ou bien, ayant multiplié les parties homogenes par la conſtante dt, on aura $ady = Xdt \pm cdt$ [il faut bien remarquer que j'entends par c une quantité conſtante arbitraire, dont il eſt permis d'augmenter ou de diminuer l'intégrale d'une différentielle quelconque]; & en quarrant de part & d'autre l'on aura auſſi $aady^2 = dt^2 \times (X \pm c)^2 = (dx^2 + dy^2) \times (X \pm c)^2$; d'où l'on tire enfin $dy = dy(X \pm c) : \surd(aa - (X \pm c)^2)$, qui ſera l'équation générale de la Courbe cherchée, laquelle deviendra fort ſimple [il ſuffit d'en trouver une qui ſatisfaſſe] en ſuppoſant $c = o$ dans cette équation : car il en réſultera $dy = Xdx : \surd(aa - XX)$, dont l'intégrale ſera $y = \int(Xdx : \surd(aa - XX))$, ſuivant laquelle ſi l'on conſtruit une Courbe, je dis qu'elle ſera celle qu'on demande.

COROL. Ayant ſuppoſé $c = o$, & conſéquemment $ady = = Xdt$, l'on aura $dy : X = dt : a$. Mais en ſuppoſant dt conſtante, dy eſt le ſinus de l'angle BFP. Donc le ſinus de l'angle $BFP : X\,[GH] = dt : a$. c'eſt-à-dire, en raiſon conſtante. Mais ſi BF eſt la Courbe *Brachyſtochrone*, & BH la Courbe, dont les ordonnées GH expriment les viteſſes aux points F, j'ai fait voir * dans le tems, que le ſinus de l'angle BFP eſt à GH en raiſon conſtante. D'où l'on voit que la Courbe BF a en même tems ces deux proprietés; puiſqu'elle eſt telle que $\int Xdx$ eſt un *Maximum*, & en même tems $\int(dt : X)$ un *Minimum*. Mais cette Courbe n'a pas cette proprieté lorſque c n'eſt pas $= o$.

PROBLE-

* Ci-deſſus N°. XXXVII. pag. 190.

PROBLEME II.

Les mêmes choſes étant poſées, ſi l'on ſuppoſe maintenant que PZ *ſoit comme la fonction donnée de l'arc* BF, *on demande la nature de la Courbe* BFN. TAB. XVIII. *Fig.* 1.

SOLUTION.

Si l'on ſuit la même méthode que ci-deſſus, on réſoudra facilement ce Probléme. Car le triangle ZLT ſera toûjours égal au triangle $\zeta\lambda T$ par la nature du *Maximum*, ou $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$. Mais $LM\,[LR - MR]$ eſt la différence des fonctions des deux arcs BFO, BFT; & $\lambda\mu\,[\lambda\varrho - \mu\varrho]$ la différence des fonctions des deux arcs $BF\omega$, $BF\theta$; & l'on trouvera la différence de ces fonctions de la même maniere que ci-deſſus, en multipliant ſimplement la fonction différentiée [ayant négligé la différentielle de l'arc dont elle eſt fonction] par la différence des deux arcs BFO, BFT, c'eſt-à-dire, par TX. Donc à la place de $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$, il faut écrire $FI \times \Delta BFO \times TX = \varphi K \times \Delta BF\omega \times \theta\xi$. Maintenant, par la proprieté de l'Ellipſe ſuppoſée décrite des foyers F, φ, par le moyen d'un fil $= FO + O\varphi = F\omega + \omega\varphi$, les petites lignes OX & $\omega\xi$ ſont égales entr'elles. Donc $TX : \theta\xi =$ tang. IFO: tang. $K\varphi\omega$. De plus, on a encore $FI : \varphi K = FO \times$ ſin. FOI: $\varphi\omega \times$ ſin. $\varphi\omega K$. Donc ſi à la place de FI, φK, & de TX, $\theta\xi$, on prend ces grandeurs qu'on voit leur être proportionelles, on aura $FO \times$ ſin. $FOI \times$ tang. $IFO \times \Delta BFO = \varphi\omega \times$ ſin. $\varphi\omega K \times$ tang. $K\varphi\omega \times \Delta BF\omega$. Mais, par la proprieté des ſinus, tangentes, & ſecantes, le ſinus de $FOI \times$ tang. $IFO =$ ſin. total $\times$ ſin. IFO; de même le ſinus de $\varphi\omega K \times$ tang. $K\varphi\omega =$ ſin. total $\times$ ſin. $K\varphi\omega$. On aura donc $FO \times$ ſin. $IFO \times \Delta BFO = \varphi\omega \times$ ſin. $K\varphi\omega \times \Delta BF\omega$; ou bien, ſi à la place de BFO on prend ſon équivalente BF, & à la place de $BF\omega$, ſon équivalente $BF\varphi$; l'on aura $FO \times$ ſin. $IFO \times \Delta BF = \varphi\omega \times$ ſin. Fig. 2.

$K\Phi\omega \times \Delta BF\Phi$. Donc ſin. $IFO \times \Delta BF$: ſin. $K\Phi\omega \times \Delta BF\Phi$ $= \Phi\omega\, [\Phi O] : FO =$ ſin. $OF\Phi$: ſin. $O\Phi F$. Et, *permutando*, ſin. $IFO \times \Delta BF$: ſin. $OF\Phi =$ ſin. $K\Phi\omega \times \Delta BF\Phi$: ſin. $O\Phi F$, en raiſon conſtante. De ſorte que ce Probléme ainſi reduit à la pure analyſe, ſe peut propoſer de cette maniere.

Trouver une Courbe B F Φ *de telle nature, que le ſinus de ſa courbure dans un de ſes points quelconque* F, *ſoit au ſinus de* I F O × Δ B F *en raiſon conſtante.*

TAB. XVIII. *Fig.* 3. Pour reſoudre ce Probléme, ſoit nommée, comme ci-devant, BP, y; PF, x; BF, t; Pp, dy; Cl, dx; Fl ou Fm, dt; & la fonction donnée de l'arc BF, v; l'on aura $ml = dt\,ddy : dx$. Donc en faiſant [ſelon la proprieté que l'on vient de trouver de la Courbe cherchée] $\frac{dt\,ddy}{dx} : dx \times \Delta v\ [\frac{dx\,dv}{dt}] = dt : a$. l'on aura cette équation $adtddy : dx^2 = dv$, ou $adt\,ddy : (dt^2 - dy^2) = dv$, dont l'intégrale eſt $v = \int (adtddy : (dt^2 - dy^2))$, ou [parce que a & dt ſont ſuppoſées conſtantes] $v = \int (ddy : (dt^2 - dy^2))$; laquelle équation exprime la nature de la Courbe qu'on demande †.

REMARQUE.

TAB. XVIII. *Fig.* 1. On trouvera avec la même facilité, ſi on le veut, la Courbe BFf, en prenant PZ pour quelqu'autre fonction que ce ſoit, compoſée à volonté des fonctions non-ſeulement de l'arc BF, ou de l'appliquée PF, mais auſſi de toutes les deux enſemble de telle maniere qu'on voudra. Car on en viendra toûjours à cette proprieté, que le ſinus de la courbure dans un point quelconque F, eſt à une certaine quantité en raiſon conſtante. Ainſi ce Probléme étant reduit à la pure analyſe, on trouvera facilement l'équation qui exprime la nature de la Courbe cherchée.

On peut auſſi reſoudre, de la même maniere, le Probléme des *Catenaires* & des *Brachyſtochrones*, dont les Solutions s'accordent facilement avec celles que j'ai données, & que j'avois trou-

† Voiez ſur cette Solution, ce que l'Autheur en dit lui-même, N°. CIII.

trouvées par différentes méthodes; ce qui ne contribue pas peu à faire voir l'excellence de celle-ci. Au reſte, comme cette méthode eſt directe, je vais en ajoûter une indirecte, priſe de la preſſion des liqueurs, laquelle donnera préciſément la même ſolution; & cet accord merveilleux de ces deux méthodes, tant directe qu'indirecte, nous aſſûrera encore de leur certitude.

Soit un linge *BFN*, étendu par une liqueur qui le preſſe par deſſus, dont la peſanteur ſoit uniforme, ou non. Il eſt clair que ce linge prendra une courbure telle, qu'elle permettra à la liqueur de deſcendre le plus bas qu'il eſt poſſible: & cela arrivera, lorſque les *gravitations* de toutes les parties de la liqueur jointes enſemble feront un *Maximum*. Il faut bien remarquer, que je ne dis pas que cela arrivera, lorſque le centre de peſanteur de la liqueur ſera le plus bas; car on ne peut conſiderer ici le centre de peſanteur, puiſque la courbe *BFN* variant [quoiqu'elle ſoit iſopérimétre] la quantité de liqueur contenuë dans cette courbe changera auſſi: ainſi le centre de peſanteur n'y ſeroit pas le même. Que l'on imagine donc maintenant que l'eſpace *BFN* ſoit diviſé en ſes filamens par les appliquées verticales *PF*, *pf* &c. Et ſoit la Courbe *BL*, dont les ordonnées *GL* expriment les gravitations de la liqueur, ſuivant la hauteur *BG* ou *PF*, c'eſt à dire, dont les appliquées, *GL* & *ED*, expriment le rapport de ce dont la particule *FC* de la liqueur, ſuivant ſa profondeur *PF*, peſe plus, ou eſt plus preſſée par le poids du filament ou de la colonne *PFCp*, qu'une égale particule *Mn*, ſuivant la profondeur *PM*, n'eſt preſſée par le poids de la colonne *PMnp*: comme donc *LG* exprime la gravitation de la particule *FC*, & de toutes les autres qui ſont à la même profondeur, ou qui ſe trouvent dans la droite *GC* prolongée; de même, comme *DE* marque la gravitation de la particule *Mn*, & des autres qui ſe trouvent dans la droite *EM* prolongée; il eſt clair que toutes ces appliquées priſes enſemble, c'eſt à dire, les eſpaces *BLG* & *BDE* marqueront toutes les gravitations [je ne dis pas les peſanteurs] priſes enſemble de toutes les particules qui ſe trouvent dans les colon-

lonnes *PFCp*, *PMnp*. Si donc on décrit une autre Courbe *BH*, dont les appliquées *GH* ſoient reſpectivement comme les eſpaces *BLG*, & ſi à *P* on applique $PZ = GH$ l'on aura une nouvelle Courbe *BZN*, dont les appliquées *PZ* exprimeront la ſomme des gravitations des particules, par rapport à leurs colonnes reſpectives *PFCp*; & par conſéquent la ſomme des appliquées *PZ*, c'eſt à dire, tout l'eſpace *BZN* repréſentera les gravitations de toutes les parties de la liqueur contenuë dans le linge ou la voile *BFN*. Donc puiſque la voile prend une telle figure ou courbure, que toutes les gravitations priſes enſemble [c'eſt à dire l'eſpace *BZN*] ſont un *Maximum*, il eſt clair, que ſi l'on emploïoit une liqueur d'une peſanteur continuellement différente, avec cette loi ou condition, que *LG*, *DE*, ou les gravitations des particules dans les profondeurs de *F*, *M*, fuſſent dans la raiſon des différentielles des appliquées *GH* [leſquelles, dans le Probléme de mon Frere, marquent les fonctions des mêmes *PF*]; il eſt clair, dis-je, qu'alors la courbure du linge ou de la voile ſeroit la même que la courbure que mon Frere m'a propoſée de chercher, ſeulement pour les puiſſances de *PF*. Mais je l'ai réſolu cideſſus, ce Probléme, par la méthode directe pour une fonction quelconque.

Afin donc que je montre l'accord de cette méthode directe avec l'indirecte, je vas chercher la nature de la Courbe, ou courbure, que prend un linge ou une voile chargée d'une liqueur dont la gravitation varie ſuivant le rapport que j'ay marqué: que ſi je tombe dans la même équation trouvée cideſſus, qui eſt-ce qui oſera douter de l'infaillibilité de ces méthodes? Il ſe préſente ici d'abord un cas fort facile, qui eſt lorſque la peſanteur de la liqueur eſt uniforme, ce qui eſt ordinaire, c'eſt à dire lorſque les gravitations *LG*, *DE* ſont entr'elles comme les profondeurs *BG*, *BE*; ce qui rend la Courbe *BL* une ligne droite, & la Courbe *BH* une parabole ordinaire: alors *BFN* ſera la courbure ordinaire du linge, ou de la voile, laquelle courbure mon Frere a attribué à

ſon

ſon *Elaſtique*, & dont la nature s'exprime [comme je l'ay trouvé autrefois auſſi-bien que mon Frere] par cette équation $y = \int (xxdx : \surd (a^4 - x^4))$.

Maintenant, ſi dans l'équation générale $y = \int (Xdx : \surd (aa - XX))$ trouvée ci-deſſus (*Sol. Probl.* 1.) par la méthode directe, on met à la place de la fonction générale X, le cas particulier xx que l'on ſuppoſe ici, l'on aura $y = \int (xxdx : \surd (a^2 - x^4))$, ou [ayant ſuppléé aux termes homogenes] $y = \int (xxdx : \surd (a^4 - x^4))$; cequi fait voir déja en ceci l'accord des méthodes.

Si l'on ſuppoſe préſentement, pour loi générale de la gravitation de la liqueurs ; que la courbe BDL ſoit une courbe quelconque, & qu'on veuille trouver la nature de la courbure de la voile BFN; on le peut faire par la méthode dont je me ſuis ſervi autrefois pour trouver la courbure de la voile enflée par le vent, laquelle conſiſte en ceci, que la direction de la preſſion de la liqueur, qui eſt par tout perpendiculaire à la courbe, ſoit regardée comme compoſée de deux preſſions collaterales, l'une horizontale & l'autre verticale, & que par l'une & par l'autre priſe ſéparément, on cherche quelle eſt la ténacité requiſe dans le point le plus bas, ou la force avec laquelle la voile dans le point le plus bas eſt étenduë ſuivant la tangente ; a, qui eſt la force abſolue, étant conſtante dans quelque point de la courbure que la voile ſoit ſuſpenduë, ou [ſi on l'aime mieux] qu'elle ſoit attachée à un clou. Ainſi formant une équation de ce qui viendra, avec une quantité conſtante priſe à volonté, de la maniére que je l'avois fait autrefois pour les funiculaires, ou catenaires, on trouvera la même équation, que j'ay trouvée ci-deſſus par la méthode directe. Cette maniere d'operer, quoique légitime, eſt néanmoins plus longue & n'eſt pas ſi naturelle que cette autre, que j'ay découverte depuis peu de tems, & que je vas rapporter ici.

Parce que chaque particule Ff du linge, ou de la voile, eſt preſſée ſuivant FI, qui eſt une direction perpendiculaire à la courbe, par le poids de la colonne de liqueur qui ap- TAB. XVIII. *Fig.* 1.

puïe deſſus, ou par la gravitation de la particule *FC* de la liqueur, laquelle gravitation eſt exprimée par la ligne *LG*, la courbe ſera la même que celle qui ſe formeroit, ſi je conçevois que le fil *BRFST* fût étendu par des puiſſances *R*1, *F*2, *S*3, *T*4, &c. perpendiculairement appliquées à tous les points *R*, *F*, *S*, *T*, &c. & proportionelles aux appliquées correſpondantes *ED*, *LG*, *VK*, &c. Or je vas montrer d'une maniere facile, que cette courbe, & par conſéquent la courbure du linge, eſt la même que celle que j'ay trouvée ci-deſſus par la méthode directe.

TAB. XVIII. Fig. 4.

Soit la Courbe conçûë comme un polygone d'une infinité de côtés *BR*, *RF*, *FS*, *ST*, &c. leſquels étant prolongés font des angles *aRF*, *bFS*, *cST*, &c. qui marquent les courbures de la courbe dans le points *R*, *F*, *S*, &c. Maintenant on ſçait par les loix de la Méchanique, que la puiſſance 1*R* qui pouſſe, eſt à la puiſſance *l* qui ſoûtient, ou [ce qui eſt la même choſe] à la force de la ténacité requiſe du fil, dans un point quelconque moïen entre *R* & *F*, comme le ſinus de l'angle *aRF* eſt au ſinus de l'angle *BR*1, c'eſt à dire, au ſinus total: de même, la puiſſance qui ſoûtient en *l*, eſt à la puiſſance 2*F* qui pouſſe, comme le ſinus de l'angle 2*Fm*, ou ſinus total, eſt au ſinus de l'angle *bFS*; d'où il eſt évident que la puiſſance 1*R* eſt à la puiſſance 2*F*, comme le ſinus de l'angle *aRF* eſt au ſinus de l'angle *bFS*. On démontrera de la même maniere que la puiſſance 2*F* eſt à la puiſſancc 3*S*, comme le ſinus de *bFS* eſt au ſinus de *cST*; & ainſi de ſuite. Donc la puiſſance 1*R* eſt à la puiſſance 3*S*, comme le ſinus de l'angle *aRF* eſt au ſinus de l'angle *cST*; & *permutando*, le ſinus de l'angle *cST* eſt à la puiſſance 3*S* [*KV*], comme le ſinus de l'angle *aRF* eſt à la puiſſance 1*R* [*DE*]: c'eſt à dire, que le ſinus de l'angle de la courbure dans un point quelconque *R* eſt à *DE*, que je ſuppoſe exprimer la fonction différentiée de *BE*, en raiſon conſtante. Or j'ay trouvé par la méthode directe cette même proprieté. Donc la courbure du linge, ou de la voile, chargée de la maniere qu'on

le

N° LXXV.

Fig. 2.

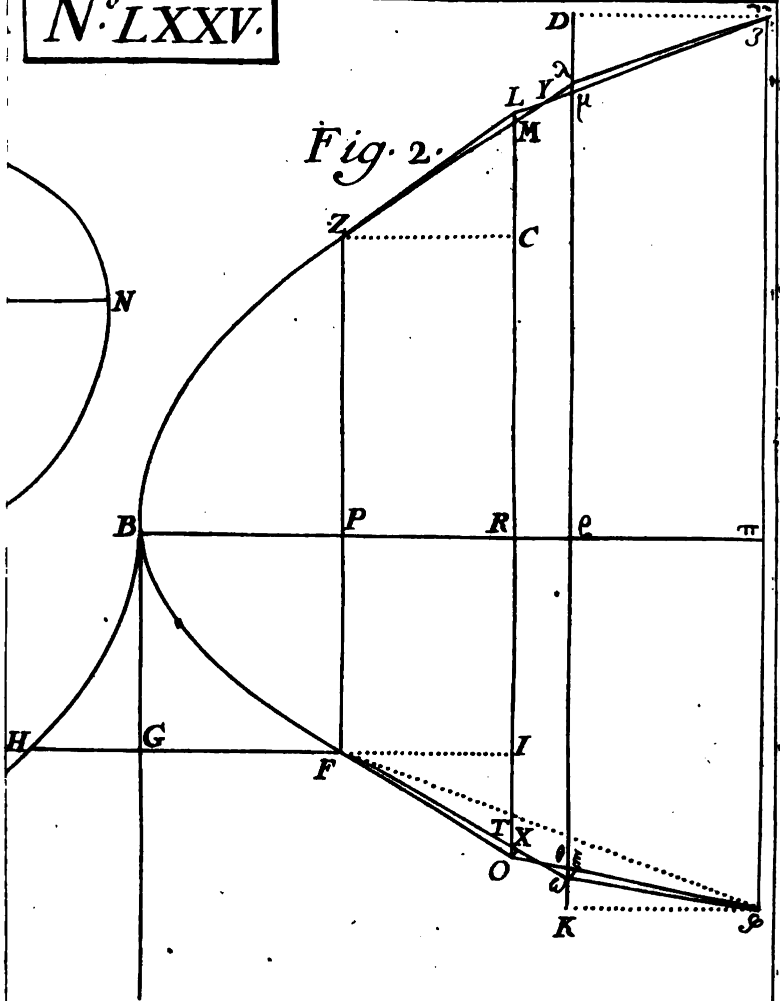
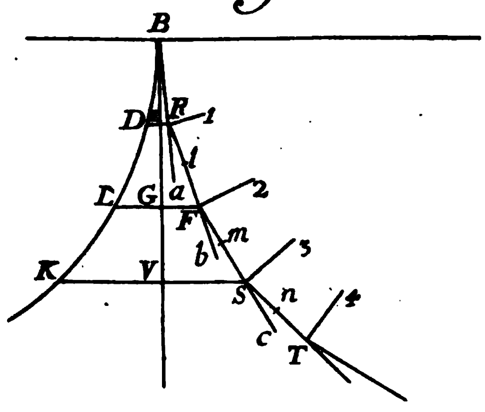


Fig. 4.



le vient de dire, & celle des Iſopérimétres, eſt la même. Donc la méthode directe & l'indirecte ſe confirment l'une l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Voiés Tom. II. *N°.* CIII.

N°. LXXVI.

SUR LA LUMIERE DES CORPS FROTTEZ.

LE nouveau & ingénieux Phoſphore de M. BERNOULLI, dont il a été parlé dans les Hiſtoires de 1700. & de 1701. * ne pouvoit manquer d'exciter la curioſité des Philoſophes, & ſur tout celle de l'Académie, qui a en quelque ſorte un droit particulier ſur cette découverte, dûe à l'un de ſes Membres. Entre les expériences qui ont été faites ſur ce ſujet, on eſt venu à celles de la Lumiére que rendent certains corps frottés dans l'obſcurité. M. BERNOULLI écrivit qu'il avoit fait depuis long-tems des obſervations ſur ces Phénoménes, mais que juſques-là il avoit négligé d'en rendre compte à la Compagnie. Voici quel en eſt le réſultat. *Hiſt. de l'Acad. Royale des Sciences de Paris.* 1707 pag. 1.

Comme elles n'ont pas été faites la plûpart ſur les Corps qui rendent le plus aiſément la lumiére, tels que ſeroient le dos d'un chat frotté à contre-poil en hiver, ou du ſucre, ou du ſouffre qu'on pile, &c. il y a certaines conditions à obſerver.

D'abord il faut que des deux Corps que l'on frotte l'un contre l'autre, il y en ait au moins un qui ſoit transparent, afin que l'on puiſſe voir la lumiére au travers, pendant qu'elle dure; car d'ordinaire elle ne dure pas plus que le frottement.

Il faut que la ſuperficie des Corps ſoit plane, bien polie, & bien nette, afin que le contact ſoit immédiat.

Il faut que les deux Corps ſoient durs.

Une grande denſité, ſans une grande dureté, fait auſſi ſon effet. Ainſi M. BERNOULLI a eu de la lumiére en frottant, contre une glace de verre, du Mercure amalgamé avec l'étaim.

L'un des deux Corps doit être le plus mince qu'il ſe pourra, il en ſera plus aiſé à échauffer par le frottement, & en rendra plus promptement de la lumiére, & une lumiére plus vive. C'eſt ce que M. BERNOULLI a éprouvé ſur de petites plaques de Cuivre de différente épaiſſeur.

* Voiés ci deſſus N° LXII. LXIII. LXIV.

L'Or frotté contre le verre lui a paru le plus propre de tout les métaux à donner de la lumiére. Aucun Corps n'en donne une ſi exquiſe que le Diamant. Elle n'eſt pas moins vive que celle d'un Charbon fortement excitée par le ſoufle. Il n'importe de quelle épaiſſeur ſoit le Diamant.

De là M. BERNOULLI a conclu que M. BOYLE, tout habile qu'il étoit dans la Phyſique expérimentale, a regardé comme une eſpèce de prodige ce qui n'en étoit pas un. C'étoit un Diamant qui étant frotté dans l'obſcurité, jettoit de l'éclat, & auquel il donna le ſuperbe nom d'*Adamas lucidus*. Il n'avoit point de privilège particulier. Il eſt vrai cependant que ſon éclat duroit quelques inſtants après le frottement, ce qui ne laiſſeroit pas de fonder en partie l'eſtime qu'en faiſoit M. BOYLE.

A l'occaſion des Expériences de M. BERNOULLI, M. CASSINI *le fils* en fit auſſi ſur le même ſujet.

1°. Un Diamant taillé en table, frotté contre une glace de verre, rendit une lumiére ſemblable à celle d'un charbon enflammé, & qui parut plus large que la face du Diamant.

2°. Un Diamant taillé à facettes a rendu une lumiére moins vive.

3° Un Ecu, & diverſes autres plaques d'argent, en ont moins rendu que le Diamant.

4°. Un Double de Cuivre, & un ſol en ont un peu rendu.
Tous les différens Corps des Expériences précédentes ont été frottés contre du verre.

5°. Le Diamant en table frotté contre une plaque d'argent, a fait de la lumiére.

JOHAN-

N°. LXXVII.

JOHANNIS BERNOULLI

Inventa de Appropinquationibus promtis ad metiendas figuras per Motus Repentis conſiderationem exhibitis.

Ex Epiſtola ad G. G. LEIBNITIUM, *Baſil.* 15 Janu. 1707.

SIT Ellipſis data ABDE cujus axes conjugati AD & BE; Fac igitur aliam Ellipſin datæ æqualem MPNQ, tangantque primo duæ illæ Ellipſes ſe mutuo in verticibus conjugatis A, & P; ita nempe ut in directum cadat axis major AD cum minori PQ. Hoc in poſitu repat PMQN, hoc eſt, moveatur motu parallelo ſuper immobili ABDE, ſeu ita, ut recta aliqua in mobili ſumta, velut MN, ſibi ſemper maneat parallela, ſervato interim ſemper contactu mutuo Ellipſium; quo fiet ut Ellipſis PMQN transferatur poſt primum circumlationis quadrantem in ſitum $P_1 M_1 Q_1 N_1$; poſt ſecundum in $P_2 M_2 Q_2 N_2$, poſt tertium in $P_3 M_3 Q_3 N_3$, & poſt quartum redeat in primum PMQN; atque interim vertices quatuor A, B, D, E, ſucceſſive excipient ſuos reſpective conjugatos P, N, Q, M. Hoc motu punctum quodvis in plano curvæ repentis, ex. gr. centrum O, deſcribet curvam $O G O_1 H O_2 J O_3 K O$, quæ ſecundum ea quæ demonſtrari in *Actis Lipſienſibus*, * erit dupla curvæ Ellipticæ ABDE; adeoque illius dimidia $OGHO_2$ erit æqualis propoſitæ curvæ Ellipticæ. Quod ſi magis deſideretur, ut integra deſcripta Ellipſi datæ ſit æqualis; oportet prius aſſumere loco Ellipſis datæ aliam Ellipſin ſimi-

Miſcellanea Berolinenſia Tom. I. pag. 173.

TAB. XIX. *Fig.* 1.

* Supra N°. LXXIV.

ſimilem, habentem axes conjugatos datarum dimidios; ita enim ambæ Ellipſes ABDE & PMQN ſimul ſumtæ æquant propoſitam, huicque adeo æqualis erit integra curva deſcripta GHIK. Habemus ergo conſtructionem per motum continuum, certe non minus geometricam, quam ea eſt, qua per motum continuum deſcribitur circulus. Quod ſi petatur æquatio algebraïca pro determinanda natura curvæ ejuſque punctis inveniendis; etiam hoc præſtabitur. Sit igitur ſemiaxis major AC $= a$, ſemiaxis minor BC $= b$, abſciſſa indeterminata in Ellipſi CR $= x$, adeoque applicata in eadem RS $= b\sqrt{(aa - xx)} : a =$ [brevitatis gratia] $by : a$; ex his fiant coordinatæ CT, TF hac conditione, ut abſciſſa CT ſit $= x + bx^3 : \sqrt{(a^4yy + b^4xx)}$ & ordinata TF $= by : a + a^3y : \sqrt{(a^4yy + b^4xx)}$; Dico, curvam hoc modo determinatam fore quæſitam, nempe illam ipſam, quæ per motum repentem puncti O fuit delineata. Notetur hic obiter, puncta F & S ita ſibi reſpondere, ut ubi O prorepſit in F, mutuus Ellipſium contactus tunc ſemper celebretur in S, quæ omnia demonſtratu ſunt facilia.

Sed ad aliud nunc progredior, quod moneri alicujus operæ pretium duco. Idque hoc eſt, quod hæc mea methodus transformandi curvas ſimul doceat lineas Ellipticas, cæteraſque Ellipticarum formam habentes, imo omnes curvas, comprehendere intra limites pro arbitrio coarctandos duorum circulorum, quorum unus majorem, alter minorem circumferentiam habeat, quam data curva Elliptica; quod quantum uſum habere poſſit in praxi patet; licet tale quid nemo hucuſque præſtiterit: nemo enim hucuſque, ſine ſerie, in terminis finitis & geometricis, reduxit, exempli gratia, Ellipſin ordinariam intra duas circumferentias circulares, quæ vel tantum centeſima, nedum milleſima, vel minori adhuc ſui parte, altera alteram excedat. Hoc tamen eſt quod mea Methodus feliciter exequitur.

Manifeſtum eſt Curvam rependo deſcriptam, quæ Ellipſi æqualis, habere quatuor ſua puncta cardinalia, O, O 1, O 2,

O 3,

O 3, æqualiter diſtantia a centro C; ſed & demonſtrare poſſum, intra quatuor iſta puncta dari quatuor alia exacte intermedia G, H, I, K, itidem æqualiter diſtantia a Centro C, ſed hoc diſcrimine, quod illorum intervalla a centro C ſint minima, horum vero maxima; id quod curvæ noſtræ peculiarem hanc formam conciliat, ut nempe habeat quatuor gibbos, valde quidem obtuſos, in G, H, I, K, alternatim protuberantes inter quatuor puncta cardinalia O, O 1, O 2, O 3, ubi curva quatuor velut compreſſiones patitur: unde clarum eſt, circulos duos ex centro C & radiis CO, CG deſcriptos tangere curvam in quatuor punctis; & unum quidem interne in O, O 1, O 2, O 3, & alterum externe in G, H, I, K; adeoque illum, tanquam inſcriptum, minorem eſſe curva, hunc vero tanquam circumſcriptum, eadem eſſe majorem. Eſt autem radius inſcripti $CO = CA + CB = a + b$ & radium circumcripti CG invenio $= AB\sqrt{2} = \sqrt{(2aa + 2bb)}$. Hinc ergo concludo, curvam O G O 1 H O 2 I O 3 K O, hoc eſt Ellipſin, cujus axes conjugati ſunt $4a$ & $4b$, nempe duplo majores quam A D & B E, eſſe majorem quam ambitum circuli cujus radius $a + b$; ſed minorem quam alium cujus radius $\sqrt{(2aa + 2bb)}$. Sumamus exemplum hujus adjectæ figuræ, ubi tali Ellipſi ſum uſus, in qua ſemiaxes conjuncti A C & B C, ſunt ut 5 & 4; unde radius circuli minoris erit 9 vel $\sqrt{81}$, & radius circuli majoris erit $\sqrt{82}$; Aſſero igitur, longitudinem Ellipſeos, cujus ſemiaxes conjugati habent partes 10 & 8, eſſe inter duas circumferentias circulares radiorum $\sqrt{81}$ & $\sqrt{82}$, qui numeri ſibi propius accedunt quam hi rationales 9 & $9\frac{1}{18}$, hoc eſt, quam 162 & 163; ideoque minor a majori minus differt, quam centeſima ſexageſima ſecunda ſui parte.

Hac occaſione memini me legere apud nonnullos Practicos; quod pro comparandis perimetris Ellipſium cum circularibus; jubeant deſcribere circulum, radio æquali medio Arithmetico inter ſemiaxes conjugatos Ellipſis propoſitæ; cui aſſerunt æqualem fore circuitum circuli ita deſcripti. Revera hic circulus, cujus circuitum haud dubie ex ſola ſenſuum æſtimatione æqualem

lem judicant lineæ Ellipticæ, eſt ipſiſſimus minor ex limitibus a me hic aſſignatis. Sed cum illi eum non niſi circiter æqualem æſtiment, incerti tamen, utrum, rem accurate ſumendo, ſit juſto major aut minor; ego, rei veritatem ſcientifice aſſecutus, oſtendi nonnihil juſto minorem eſſe.

Sed hæc de limitibus primis. Nunc limites ſecundos, multo quam primi propinquiores, & poſtea tertios propinquiores adhuc, & ita porro invenio, hac ratione. Finge ſcilicet curvam noſtram, prima operatione inventam, GHIK, ſe ipſam obrepere, & ita quidem, ut ab initio vertex gibboſitatis G tangat verticem compreſſitatis O, hoc eſt, ut recta longiſſima GC, in curva mobili, cadat in directum cum curva breviſſima OC, in curva immobili; plane ut factum eſt in ipſa Ellipſi, ubi ab initio vertices conjugati A & P [qui ſane nihil aliud ſunt quam id quod ibi voco vertices gibboſitatis & compreſſitatis] ſe tangunt, & maxima minimaque diſtantia AC, PO, in directum ponuntur. Hoc intellecto, levi attentione adhibita percipitur, ſecundo hoc motu reptitio, centrum C curvæ mobilis, vel quodvis aliud ejus plani, deſcribere curvam novam Octigibbam, hoc eſt, quæ habebit octogibbos tantillum prominentes alternatim inter totidem compreſſuras, & quorum vertices octo æqualiter a centro diſtabunt; curvamque ipſam octi-gibbam longitudine duplam eſſe curvæ generantis quadrigibbæ, uti hæc ipſa dupla eſt Ellipticæ, ex qua fuit generata. Attendas igitur admirabilem generationem harum curvarum: Ellipſis, quæ reapſe eſt curva bigibba, generat ſui duplam quadrigibbam; quadrigibba producit duplam octigibbam; & ita porro in infinitum. Sed quemadmodum curva quadrigibba propius ad rotunditatem circuli accedit quam bigibba, ſeu Ellipſis; ita quoque octigibba quam quadrigibba, & ita porro; adinſtar polygonorum, quæ quo plures habent angulos, eo magis circulo aſſimilantur; magno tamen diſcrimine ratione appropinquationis; nam per multiplicationem angulorum in Polygonis, diu multumque procedendum eſt, antequam perveniatur ad limites a *Ludolpho* VAN CÖLLEN conſtitutos, ſed curvæ noſtræ multigibbæ incredi-

incredibili adeo celeritate ad circulum convergunt, ut, quemadmodum ex indiciis quibuſdam mihi patet, inſtitutis quinque operationibus, jam perveniatur ad limites *Ludolphinis* arctiores; reperta nempe curva tantum 64 gibborum: cum ARCHIMEDI opus fuerit Polygono 96 angulorum, ad rationem ſuam, 7 ad 22, diametri ad circumferentiam inveniendam, quæ tamen vera multum adeo adhuc abludit. Veritatem hujus aliquo modo percipies ex limitibus nunc tradendis quos mihi ſuppeditavit curva octigibba. Hos ut inveniam, facile colligere eſt ex ante dictis, neceſſe eſſe ut quæram illius curvæ diſtantias a centro, maximam & minimam; circulus enim radio maximi intervalli deſcriptus tanget curvam exterius in octo punctis, & erit per conſequens longitudine major quam curva; ſed circulus deſcriptus radio minimi intervalli tanget curvam interius in octo punctis, adeoque longitudine minor erit quam curva. Quantum ad diſtantiam minimam, invenitur facile; eſt enim æqualis ſummæ diſtantiarum minimæ & maximæ curvæ quadrigibbæ genitricis, quod per ſe patet. Sed quod ſpectat ad diſtantiam maximam, demonſtrare poſſum quod ſit illa æqualis perpendiculari CZ bis ſumptæ, quæ demittitur ex centro C in rectam VX, tangentem curvam quadrigibbam generatricem in Y, quæ tangens ſupponitur facere cum CO & CG prolongatis, baſin trianguli iſoſcelis VCX: & quidem pari modo, diſtantiæ minimæ & maximæ in ſequentibus curvis multigibbis inveniuntur; ſemper enim diſtantia minima æquatur diſtantiis duabus, minimæ & maximæ ſimul ſumptis, in præcedente multigibba generatrice; & diſtantia maxima æqualis eſt altitudini bis ſumptæ trianguli iſoſcelis formati per prolongationem diſtantiarum præcedentium maximæ & minimæ, uſque ad tangentem, tanquam baſin ejus trianguli. Ex hoc generali fundamento, ſi nunc lubeat eruere limites ſecundos, quos nempe ſuppeditat curva octigibba; advertendum primo eſt, cum octigibba ſit dupla quadrigibbæ, & quadrigibba dupla bigibbæ, ſeu Ellipſeos; fore curvam octigibbam longitudine quadruplam Ellipſeos, adeoque, ut illa

fiat æqualis Ellipſi propoſitæ, aſſumendam eſſe pro prima generatrice aliam Ellipſin ſimilem, cujus axes conjugati ſint ſubquadrupli conjugatorum propoſitæ. Sint igitur iterum [ut ante] axes conjugati Ellipſeos propoſitæ $4a$ & $4b$, adeoque nunc $AD = a$, & $BE = b$, inveni pro limitibus ſecundis, nempe radium circuli curvæ octigibbæ inſcripti $= a + b + \frac{1}{2}\sqrt{(2aa + 2bb)}$, & radium circuli eidem circumſcripti $\frac{1}{2}\sqrt{(2aa + 2bb + (aa - bb)\sqrt{2})} + \frac{1}{2}\sqrt{(2aa + 2bb - (aa - bb)\sqrt{2})}$, vel quod tantundem eſt, $\sqrt{(aa + bb + \frac{1}{2}\sqrt{(2a^4 + 12aabb + 2b^4)})}$. Ut applicationem faciamus ad exemplum noſtrum, ubi ſemiaxes conjugati Ellipſis propoſitæ ſunt partium 10 & 8, hoc eſt ubi $a = 5$ & $b = 4$; invenietur pro radio circuli minoris $9 + \frac{1}{2}\sqrt{82}$, & pro radio circuli majoris $\sqrt{(41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562})}$, qui numeri ſibi magis appropinquant quam hi rationales $9\frac{8}{289}$ & $9\frac{391}{14000}$: etenim $9\frac{8}{289}$ tantillulo minor quam $9 + \frac{1}{2}\sqrt{82}$, & $9\frac{391}{14000}$ tantillulo major quam $\sqrt{(41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562})}$. Atqui numeri $9\frac{8}{289}$, & $9\frac{391}{14000}$ paulo adhuc propius accedunt ad rationem æqualitatis, quam quæ eſt inter 36562 & 36563. Determinavi igitur, hac ſecunda operatione, duas circumferentias circulares, unam propoſita Ellipſi majorem, alteram eadem Ellipſi minorem, quæ tamen circumferentiæ tam parum ab æqualitate recedunt, ut in plus quam triginta ſex millibus partium, ne quidem parte unica a ſe differant. Nunc, quæſo, perpende, ſi limites primos 162, & 163, excipiant ſtatim limites ſecundi, enormi adeo modo ſibi propinquiores; quid fieret, ſi inſtitueremus nunc tertiam operationem, poſtea quartam, imo & quintam? haud dubitabis credo, de eo quod dixi, paucis iſtis operationibus poſſe, pro Ellipſibus coæquandis perimetris circulorum, perveniri ad limites anguſtiores quam quos *Ludolphus*, multis concatenatis operationibus, invenit, pro ipſo circulo rectificando. Fateor equidem, ulteriores operationes noſtras nonnihil difficiles & longas evadere, propter complicationem ſignorum radicalium, quæ in expreſſionibus limitum magis magiſque coacervantur; ſed qui hiſce delectatur, operæ pretium faceret, ſi inquireret, num qua certa lege li-

mites

mites progrediantur; quo caſu, ſine calculo, pro lubitu continuari poſſent, uti certe jam factum eſt, pro definiendo limite minori; quippe qui, ut ſupra monui, ſemper eſt æqualis medio arithmetico inter limites præcedentes: modo nunc pari facilitate limes major ex præcedentibus erui poſſet, haberemus quod volumus. Interim quamvis nondum id laboris mihi dederim, ut inſtituta tertia operatione tertium limitem majorem definierim; poteſt tamen, conferendo tertium limitem minorem, qui tam facile invenitur, cum præcedente ſecundo majori, perveniri ad rationem magis æqualitati accedentem, quam quæ habetur, ex utroque limite ſecundo. Ita in præſenti exemplo, ubi limites ſecundi $9 + \frac{1}{2}\sqrt{82}$, & $\sqrt{(41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562})}$, quorum ratio continetur intra 36562 ad 36563, nunc habebitur pro limite minori $\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{82} + \frac{1}{2}\sqrt{(41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562})}$ & pro majori $\sqrt{(41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562})}$. Hos limites reperio contineri intra terminos hujus rationis 56717 ad 56718; quos vides una tantum unitate differre. Ellipſis igitur noſtra, cujus axes conjugati ſunt ut 5 ad 4, eo jam proximitatis ad perimetrum circuli reducta eſt, ut exhiberi poſſint duæ circumferentiæ circulares, una Ellipſi major, altera eadem minor, quæ tamen in pluſquam quinquaginta ſex millibus partium, ne una quidem a ſe differunt.

Inſcriptam lineam circumſcripta eſſe minorem certum eſt, cum lineæ ſint ad eaſdem partes cavæ. Dubitabit autem fortaſſe aliquis, an tales ſint hæ multigibbæ; ſed tales eſſe manifeſte infertur ex conſtructione earum ipſa, per motum repentem. Et mirum videri non debet, cum circulus lineam ad eaſdem partes cavam in pluribus punctis tangere poſſit, quod recta non poteſt.

N°. LXXVIII.

EXCERPTUM

Ex Epiſtola Reſponſoria G. G. LEIBNITII *ad* Joh. BERNOULLIUM.

Data *Berolini*, 1. Febr. 1701.

Miſcel. Berolin. Tom. I. pag. 180.

TAB. XIX. *Fig.* 2.

COGITAVI inter ſcribendum, an tua per circulum appropinquandi ad curvam Ellipſeos Methodus applicari appropinquationi rectæ ad circuli circumferentiam poſſit, adhibendo curvam Ellipſiformem, quæ in rectam extendi poteſt. Sit linea Epicycloidalis A B C D E deſcripta revolutione circuli cujuſdam mobilis, ſuper circulo immobili A E F. Sit B D, chorda maxima in dicta Epicycloidali, per quam abſcindatur ſegmentum B C D: huic adjungatur aliud, per omnia congruum B K D, & ita formabitur linea Ellipſiformis B C D K B, rectificabilis per Geometriam ordinariam; talem enim aſſumtam ſuppono, cujus & puncta per Geometriam communem definiri poſſunt. Hæc tractetur per motum repentem, ut Ellipſis, & habebimus curvas ei æquales, vel ad eam in ratione data, quæ ad circulum in infinitum accedent; adeoque lineam rectificabilem quouſque libebit, admovendo ad circularem, viciſſim circumferentiam circuli magis magiſque admovebimus menſurationi, ſeu rectæ.

EXCER-

N°. LXXIX.

EXCERPTUM

Ex Epiſtola BERNOULLI *ad* G. G. LEIBNITIUM.

Baſilea 23 *Martii* 1707.

QUælibet linea rectificabilis huic fini inſervire poteſt, & ſi Ellipſeos formam non habeat. Sit enim BA arcus curvæ cujuſcunque, exempli gratia, Parabolæ; adjungatur ad B, verſus partem alteram, arcus alius priori per omnia ſimilis & æqualis BD; ita quidem, ut in B [quamquam nec hoc abſolute ſit neceſſarium] habeant communem tangentem, hoc eſt, ut forment curvaturam continuam; jam duobus iſtis arcubus BA, BD, adaptentur duo alii prorſus ſimiles & æquales EA, ED; ut hinc oriatur figura clauſa Ellipſiformis BAED, cujus tota circumferentia æquatur arcui BA quater ſumto; neque obſtat quod in A & D arcus in angulos coëant, non vero, ut in B & E, abeant in curvam continuam. Jam ſi huic figuræ BAED, alia per totum congruens PNQM admoveatur, & altera alteram obrepat, ut in Ellipſi; deſcribet punctum O curvam quampiam quadrigibbam, quæ erit arcus BA octupla, hæc quadrigibba poſtea mutabitur in octigibbam, & ita porro, &c. Fateor equidem curvas iſtas multigibbas non eſſe uniformis naturæ, ut ſunt illæ quæ generantur ex Ellipſibus; conſtant enim ex arcubus diverſis; qui tamen in continuam ubique abeunt curvitatem; & hoc jam ſufficit, pro approximatione ad Circulum. Apparet itaque, quomodo nunc Parabolæ arcus, &, quæ ab eo dependet, area Hyperbolæ, per circulum quantumvis prope menſu- *Miſcel.Berol.Tom.I. pag. 180. Tab.XIX. Fig. 3.*

menſurari poſſit; quod ſane hactenus nemo feliciter executus eſt: hac enim Methodo, intra paucas horas, pro illis arctiores limites invenirentur, quam quos miſi pro Ellipſibus. Interim ut & hoc moneam, non neceſſe eſt ut arcus BA quater ſumatur ad formandam figuram clauſam Ellipſiformem BAED, niſi eam omnino ad integram circumferentiam reducere velimus. Nam quilibet arcus ſolus cujuſvis curvæ, per obreptionem ſubcontrariam continuo repetitam in infinitum, tandem abit ſaltem in arcum circuli. Voco autem *obreptionem ſubcontrariam*, quando arcus aliquis ſe ipſum obrepit inverſe, hoc eſt, quando in reptionis initio extremitates oppoſitæ ſe mutuo tangunt: hoc enim modo, arcus propoſitus, per reptionem primam mutabitur in alium ejuſdem, ut voco, amplitudinis, ſed qui conſtabit ex duobus arcubus ſimilibus & æqualibus; qui ſi nunc porro ſubcontrarie ſe mutuo obrepant, orietur arcus conſtans quatuor arcubus ſimilibus & æqualibus, adeoque ad rotunditatem arcus circularis magis accedens; per obreptionem tertiam ſubcontrariam formabimus arcum habentem arcus octo ſimiles & æquales & ſic magis ac magis ad ipſum arcum circuli, ejuſdem cum præcedentibus ſingulis amplitudinis, perveniemus. Hoc unicum adhuc addam, pro applicanda methodo ad rectæ appropinquationem ad circulum, ſumi poſſe Ellipſin, cujus axis minor ſit indefinite parvæ longitudinis, quæ utique nihil aliud erit quam linea recta duplicata. Hanc ſi more Ellipſium per reptionem moveas habebis loco curvæ quadrigibbæ quatuor latera quadrati; poſtea loco octigibbæ ambitum octogoni. Ita ſcilicet Ellipſi abeunte in rectam lineam, Curvæ multigibbæ quoque abeunt in Polygona regularia, & hæc tandem in Circulum. Id quod mihi ſuppeditavit modum hunc facilem exhibendi, per conſtructionem continuo & celeriter appropinquantem, arcum circuli æqualem lineæ rectæ datæ. Eſto data recta BG, perpendicularis ad aliam rectam AC. Ducatur ad arbitrium recta BA, & angulo A fiat æqualis angulus ABC, ut habeatur triangulum iſoſceles BCA. Jam ducatur perpendicularis CD in AB, & ipſi CD capiatur æqualis CL, jungatur

Tab. XIX Fig. 4.

tur DL, in quam agatur perpendicularis CE, cui æqualis abſcindatur CM. Jungatur EM & ducatur perpendicularis CF; hocque continuetur in infinitum; & ſit CR illarum perpendicularium ultima. Dico, arcum circuli RS, radio CR deſcriptum, fore æqualem rectæ propoſitæ BG. Quamquam poſtea viderim puncta B, D, E, F &c. eſſe in Quadratrice DINOSTRATI, quod quidem facile demonſtrari poteſt, adeoque hoc nomine nihil novi me præſtitiſſe, quatenus diu jam cognitum eſt, rectificationem circuli dependere a determinatione interſectionis quadratricis & ejus diametri: in eo tamen aliquid ſingulare hic factum eſt, quod hic puncta in Quadratrice D, E, F &c ob perpendicularitatem CD, CE, CF &c. certius deſignentur, adeoque punctum ultimum R multo accuratius determinetur, quam per modum vulgarem, quo, propter ſectiones magis magiſque obliquas, puncta in Quadratrice tandem valde incerta evadunt. Cæterum vero quidquid de eo ſit, elegans mihi videtur & minime contemnendum, quod hoc ab aliis jam quidem inventum, & ut ſingulare quid venditatum, idem tamen noſtræ inventionis nonniſi minimum tantum ſit Corollariolum.

N°. LXXX.

EXCERPTUM

Ex Epiſtola Bernoulliana *data Baſileæ* 15. April. 1709.

MULTUM excolui & promovi hanc materiam, [de Motu Reptorio & multigibbis,] & admiranda Theoremata detexi: limites quippe pro Ellipticis perimetris ad circulares revocandis non tantum provexi ulterius, ſed etiam certam, eamque facilem legem provehendi quouſque libuerit, erui; habeoque Theorema geometricum [mox ſubnectendum] quod applau-

Miſcel. Berolin. Tom. I. pag. 153.

applauſum tuum merebitur, exhibens duos circulos quantumvis prope æquales, quorum unius circumferentia major, alterius minor eſt circumferentia Ellipſis propoſitæ. Aliud vero longe generalius mihi ſuppetit Theorema, quod ſpectat ad quamvis curvam propoſitam, intra duos arcus circulares, quantumvis ſibi propinquos, coarctandam, idque e veſtigio. Ecce

TAB. XIX. *Fig.* 5.

Theorema prius: Eſto ſemicircumferentia A 4 B, cujus diameter A B compoſita eſt ex ſemiaxibus alicujus Ellipſis A C & B C. Sit ſemicircumferentia biſecta continuo in 2, 4, 8, 16, & quotcunque libuerit partes æquales, atque rectarum ductarum ex puncto C ad diviſionum puncta imparia 1, 3, 5, 7, capiatur media Arithmetica [hoc eſt $(C1 + C3 + C5 + C7) : 4$] quæ vocetur M: & rectarum ductarum ex puncto C ad diviſionum puncta paria, 2, 4, 6, auctarumque radio R, ſeu AB, ſumatur media Arithemetica [hoc eſt $(C2 + C4 + C5 + R) : 4$] quæ vocetur N, dico M & N fore radios duorum circulorum, quorum ille circumferentiam habet majorem, hic minorem quam Ellipſis propoſita. Sunt enim illi duo circuli, circumſcriptus & inſcriptus, curvæ multigibbæ Ellipticam circumferentiam æquanti, duplo plurium exiſtenti gibborum, quam eſt numerus diviſionum. Unde, ſi in octo partes dividatur ſemicircumferentia A 4 B erunt M & N duo radii duorum circulorum circumſcripti & inſcripti curvæ ſedecigibbæ, quæ ſit Ellipſi æqualis. Ponamus [pro exemplo] axes Ellipſis eſſe inter ſe ut 5 ad 4, calculus me docuit M ad N fore in minore ratione quam eſt 6000001 ad 6000000.

De

N°. LXXXI.

DE LINEARUM CURVARUM LONGITUDINE.

Auctore Joh. Craig.

LEMMA.

Philoſoph. Tranſact. N°. 314. Mart Apr. 1708. Art. IV. p. 64.

Acta Erud. Lipſ. 1710. Aug. pag. 352.

D*UORUM Quadratorum ſummam in alia duo Quadrata dividere.*

Sint dz^2, ds^2 duo Quadrata data, quorum ſumma $dz^2 + ds^2$ dividenda eſt in alia duo Quadrata dx^2, dy^2; ſintque m & n duo quilibet numeri ad arbitrium ſumendi. Jam ex conditione Problematis, eſt $dx^2 + dy^2 = dz^2 + ds^2$, unde [ut ex Diophanto conſtat,] erit $dx = ((mm - nn)\, dz + 2mn\, ds) : (mm + nn)$; $dy = ((nn - mm)\, ds + 2mn\, dz) : (mm + nn)$. *Q. E. I.*

PROBLEMA.

Curvas innumeras invenire, quæ ſint ejuſdem longitudinis cum Curva quavis propoſita, ſive algebraïca, ſive tranſcendente.

Deſignent z, s, coordinatas Curvæ propoſitæ, & x, y coordinatas Curvæ quæſitæ, quæ ejuſdem ſit longitudinis cum propoſita: Unde, ex Curvarum Elementis $dx^2 + dy^2 = dz^2 + ds^2$. Ideoque, per Lemma præcedens, $dx = ((mm - nn)\, dz + 2mn\, ds) : (mm + nn)$ & $dy = ((nn - mm)\, ds + 2mn\, dz) : (mm + nn)$, Quarum integrales ſunt $x = ((mm - nn)\, z + 2mns) : (mm + nn)$, & $y = ((nn - mm)\, s + 2mnz) : (mm + nn)$.

Et ſic innoteſcunt coordinatæ x & y unius ex Curvis quæſitis, ſimiliter ex hac una invenietur ſecunda, ex ſecunda tertia, & ſic porro innumeræ invenientur. *Q. E. I.*

Exempla jam non addo, nam poſtea [Deo volente] opportunior dabitur locus, in quo methodus hæc ad plura hujuſmodi Problemata extendetur, & ſolutio Problematis hujus per Exempla illuſtrabitur. Et quidem hanc ſolutionem, ſemel iterumque, tam aperte indicavi, ut faciſlime a quovis in his verſato deduci poſſit ex iis, quæ ſubjunguntur ſolutioni caſus ſpecialis hujus Problematis, in quo ſcil. Curva propoſita eſt algebraïca, quamque exhibui in *Actis Philoſ. R. S.* Janu. 1704 †, ut

† Supra N°. LXXIII.

ut Clariſſ. Problematis propoſitori Dno. *Joh.* BERNOULLI conſt[illegible] illius ſolutionem methodis Calculi differentialis inverſis maxime [illegible] poſſe obtineri; utpote qui, in privatis ſuis ad Dnum. CHEYNE[illegible] litteris ſignificabat eandem non poſſe exhiberi per Theoremata no[illegible] in *Actis Phil. R. S.* Mart. 1703 publicata. Et quoniam, ex *Actis Erudit.* Aug. 1705 *, percipio ſolutionem illam [quæ ſcopo prædicto [illegible] ſuperque ſatisfaciebat] Doctiſſimo Viro non arridere, ideo modo pr[illegible] miſſam ſolutionem, nulli objectioni obnoxiam, publici juris facio. Ne[illegible] ceſſe itaque eſt, ut Clariſſ. BERNOULLI agnoſcat, vix ullum d[illegible] Problema, cujus ſolutio ex Calculo Integrali facilius deducitur, qu[illegible] ſui de Transformatione Curvarum.

Quæ vero in ipſius BERNOULLI ſolutione diſplicent, paucis enu[illegible] rabo. Et Primo, Quod ad Curvas tantum algebraïcas eandem exte[illegible] derit. Secundo, Quod mechanica tantum ſit, a *Motu* [ut vocat] *re[illegible] torio* tota dependens. Immortali quidem honore dignus eſt HUGENIUS ob inventum Evolutionis motum, quia, & ipſe, & poſt ipſum alii, plurima egregia Theoremata geometrice exinde deduxerunt. Sed nec Motus LEIBNITII tractionis, nec BERNOULLI Motus reptorius, cum HUGENII Motu evolutionis comparabuntur, donec, cum HUGENIO, celeberrimi Viri Curvas per Motus ſuos genitas ad leges geometric[illegible] revocaverint; quod cum neuter eorum præſtiterit, ideo Problemat[illegible] ſolutiones, dependentes a Curvis per Motus ſuos genitis, inter Mechanicas ſolum annumerari poſſunt.

* Supra N°. LXXIV. pag. 409. 410.

EXCER-

N°. LXXXII.

EXCERPTUM

Ex Epiſtola J. BERNOULLI *ad Dom.* BURNETUM, *Illuſt. Epiſcopi Sarisberienſis filium*, *data* 9 Jan. 1709.

PROPOSUI olim Problema, quod alius Mathematicus mihi popoſuerat, *de curva data in aliam differentem* [algebraïca in algebraïcam] *ejuſdem longitudinis transmutanda*, ſimulque inſinuavi ſolutionem ejus in mea manu eſſe. Hujus ſolutionem dare poſſe ſibi viſus eſt D. CRAIGIUS, eamque *Tranſactionibus Londinenſibus* Januar. & Febr. 1704 inſeruit, † unde poſtea in *Acta Lipſienſia* Aprilis 1705 tranſlata eſt. Sed oſtendi in *Actis* Auguſti ejuſdem Anni, †† cum propriam ſolutionem darem, a D. CRAIGIO principium petitum fuiſſe, quoniam ſolutionem ſuam fundavit in poſtulato æque aut magis difficili quam ipſum Problema. Supponit enim quod ſemper facile ſit dividere ſummam duorum quadratorum in duo alia quadrata, quorum latera ſint ſummabilia, ſeu dent ordinatas figurarum quadrabilium. Dn. CRAIGIUS, triennio elapſo, ſatisfacturus tandem poſtulato ſuo, ſchediaſma quoddam inſeruit *Tranſactionibus Londinenſibus* menſium Martis & Aprilis Anni 1708, * ubi majorem adhuc Paralogiſmum admiſit; nam credens exhiberi a ſe curvam novam priori æqualem, revera exhibet curvam eandem cum priore, ad alium ſaltem axem accommodatam. Si bona eſſet D. CRAIGII ſolutio, ipſe Author ejus primus non fuiſſet: lubricus enim locus eſt, & me ipſum ſpecies ac ſimplicitas ſolutionis olim deceperat, cujus rei teſtes habeo amicos, ſed mox Paralogiſ-

Miſcel. Berolin. Tom. I. pag. 184.

† N°. LXXIII. †† N°. LXXIV. * N°. præced.

logiſmum detexi. Quin & D. MOIVRÆUS in hanc falſam ſolutionem incidit triennio abhinc, parumque abfuit ab ejus publicatione: ſibi tamen diffidens, mecum eam prius communicavit, erroremque me monente agnoſcens†, ſibi cavit. At D. CRAIGIUS non tantum publice ſolutionem ſuam nulli objectioni obnoxiam pronunciare audet, ſed meam etiam Methodum per Motum Reptorium ſpernit; cum tamen ea ſit una ex meis inventionibus, quas maxime æſtimo, quam LEIBNITIUS, NEWTONUS, aliique intelligentes, non ſatis æſtimare potuerunt, & cujus ope detexi quadraturæ circuli longe præferenda, quale quid eſt Methodus generalis omnes curvas ad circulorum circumferentias ipſis æquales reducendi, tam prope quam velim. Et fruſtra Dn. CRAIGIUS ſolutionem meam mechanicam eſſe pronunciat, tanquam a motu dependentem, cum tamen ad calculum analyticum reduci poſſit, & curva data exiſtente algebraïca, etiam Reptoriæ ſint tales.

N° LXXXIII.

FRAGMENTUM

Ex Logarithmotechnia generali : Autore Joh. CRAIG.

- -

Phil. Tranſact. N°. 323. Oct. 1710. Art. III. pag. 195. *Acta Erud. Lipſ.* 1713. Jul. p. 315.

OBiter Lectorem hic monitum volo, quod Curva, quæ ex noſtra Problematis de Longitudine linearum curvarum analyſi in *Actis Philoſ.* R. S. Anni 1708. * edita (reperitur), eadem ſit eum propoſita. Ego quidem de recte inſtituta analyſi tantum ſollicitus, hanc Curvæ propoſitæ & inventæ coincidentiam minime obſervabam, priuſquam de ea me certiorem fecerit Clariſſ: Dnus. *Joh.* BERNOULLI, in litteris ſuis ad Dnum. *Guil.* BURNETUM R. S. S. miſſis; in quibus etiam Celeberr. Virum meis contra *Motum* ſuum *reptorium* objectionibus plene ſatisfeciſſe, ex puro (quam colo) Veritatis amore, libenter agnoſco.

† N° LXXXI.

LETTRE

N°. LXXXIV.

LETTRE

De M. Jean BERNOULLI *à* M. DE MONTMORT.

MONSIEUR,

COMME je n'ay receu votre beau Livre † que long-tems après votre derniere lettre, j'ai bien voulu différer la reponſe juſqu'à ce que je l'euſſe rèçû & lû, pour être en état de vous en dire mon ſentiment. Quoiqu'une fluxion ſur les yeux, dont je ſuis ſouvent incommodé, m'empêche de travailler beaucoup ſur des choſes qui demandent de longs calculs, ſur tout dans le temps de l'hyver, je n'ai pas laiſſé d'examiner aux heures oiſives les principaux endroits de votre Traité, & de faire moi-même, autant que la foibleſſe de mes yeux me l'à permis, le calcul de la plûpart des Problémes. J'y ai trouvé effectivement pluſieurs choſes très belles & très curieuſes pour la ſpéculation, & utiles pour l'uſage qu'on en peut tirer dans les occaſions; mais pour vous faire part des remarques en particulier que j'ai faites çà & là, en liſant votre ouvrage, puiſque vous le ſouhaités, les voici. *Eſſay d'Analyſe ſur les Jeux de Hazard.* 2e. Edition Paris. 1713. 4o. pag. 283.

La route générale que vous tenés, qui eſt de chercher dabord le nombre des cas qu'une telle & telle choſe peut arriver, eſt très ſûre & bonne; mais il eſt de la prudence du Calculateur de ne pas ſe plonger dans un calcul long & ennuyeux, en multipliant les cas plus qu'il ne faut & au de-là de la néceſſité. Par exemple *Pierre* parie contre *Paul* que d'entre 300 jettons [dont il y a également de blancs, de noirs, &

† *Eſſay d'Analyſe ſur les Jeux de hazard.* 4°. Paris. 1708.

& de rouges] il tirera un jetton blanc; pour ſavoir la r
ſon de leurs ſorts, je dis qu'il n'eſt pas néceſſaire de dire q
y a 100 cas qui ſont gagner *Pierre*, & 200 qui le font per-
dre; voiant évidemment qu'à cauſe de l'indifference, ou
l'égale facilité, avec laquelle chaque couleur peut être tirée
ce ne ſont proprement que trois cas à conſiderer; un pour
blanc, un pour le noir, & un pour le rouge; en ſorte qu
vaut mieux s'attacher au nombre de diverſes couleurs qui peu-
vent arriver avec une égale facilité, qu'au nombre des jet-
tons, dont la multitude égale de chaque couleur ne varie au-
cunement les ſorts des Joueurs, qui eſt toujours comme 1 à 2.
Il ſemble cependant que vous n'avez pas obſervé cela, avec
beaucoup de ſoin. En voici quelques Exemples. Dans votre
Livre, *page* 8 ſur le *Jeu de Pharaon*, pour chercher le *ſort du*
Banquier qui tient quatre cartes entre les mains, parmi leſ-
quelles la carte du Ponte eſt une fois, vous faites le denom-
brement de tous les 24 arrangemens des quatre cartes, pour
en prendre les favorables au Banquier, ſans faire reflexion que
ce ne ſont pas proprement les divers arrangemens, mais ſeu-
lement les diverſes ſituations de la carte du Ponte entre les
autres, qui font la diverſité des cas; ainſi au lieu de vos 24
arrangemens, je n'ai que ces quatre variations à conſiderer (je
nomme *a* la carte du Ponte, & *b* chacune des autres.)

1. *bbba*, 2. *bbab*, 3. *babb*, 4. *abbb*

De ces quatre variations, la premiere eſt indifferente au Ban-
quier, la 2e. & la 4e. le font gagner, & la 3e. le fait per-
dre; ſon ſort ſera donc $= (1 \times A + 2 \times 2A + 1 \times 0) : 4 = \frac{5}{4}A = A + \frac{1}{4}A$ †, tout comme vous avez trouvé. Si la carte
du Ponte ſe trouve deux fois entre les cartes du Banquier,
il y aura ces ſix variations, au lieu de 24 arrangemens,

1. *bbaa*, 2. *baba*, 3. *abba*, 4. *baab*, 5. *abab*, 6. *aabb*.

La

† A exprime ici l'Argent du Jeu.

La premiere, la troiſieme, & la cinquieme font gagner le Banquier; la ſeconde & la quatrieme le font perdre; & la ſixieme lui donne la moitié de la miſe du Ponte: & partant le ſort du Banquier ſera $= (3 \times 2A + 2 \times 0 + 1 \times \frac{3}{2}A) : 6 = \frac{5}{4}A = A + \frac{1}{4}A$, encore comme vous. Si la carte du Ponte ſe trouve trois fois entre les cartes du Banquier, on voit clairement qu'il doit y avoir autant de variations, que lorſque la carte du Ponte n'y eſt qu'une fois; car il n'y a qu'à faire une permutation de lettres *a* en *b* & *b* en *a*.

1. *baaa*, 2. *abaa*, 3. *aaba*, 4. *aaab*,

D'où l'on tire derechef le ſort du Banquier $= A + \frac{1}{4}A$. Par cette maniere de diſtribuer les cas, on voit ſans peine, que quelque nombre de cartes que tienne le Banquier exprimé par p, ſi celle du Ponte ne s'y trouve qu'une fois; l'avantage du Banquier ſera $\frac{1}{p}A$. Il n'en eſt guère autrement ſi la carte du Ponte ſe trouve plus d'une fois entre les cartes du Banquier; car au lieu de tous les arrangemens qu'il faudroit examiner, & dont le nombre eſt immenſe, pour un nombre mediocre de cartes; ici il ne faut que conſidérer le nombre des variations des deux lettres *a* & *b*, qui eſt toujours égal au nombre des combinaiſons, que des choſes, dont le nombre eſt celui de la carte du Ponte, peuvent être priſes differemment dans le nombre de toutes les cartes; & puis de ces combinaiſons, dont le nombre eſt toujours beaucoup plus petit que celui de tous les arrangemens, il ſera facile de choiſir celles qui font gagner, ou entierement, ou en partie, le Banquier, & ainſi de déterminer ſon ſort. Par exemple: Donnons au Banquier ſix cartes, entre leſquelles ſuppoſons que la carte du Ponte eſt deux fois. Dans cette ſuppoſition je n'ai que faire d'examiner, comme vous faites, tous les 720 arrangemens que les ſix cartes peuvent ſubir, me contentant de parcourir ſim-

ple-

plement ces quinze variations poſſibles, que la lettre *a* pr
deux fois peut faire avec la lettre *b* priſe quatre fois.

1. *bbbbaa*	4. *babbba*	7. *bbabab*	10. *bbaabb*	13. *baab*
2. *bbbaba*	5. *abbbba*	8. *babbab*	11. *bababb*	14. *abab*
3. *bbabba*	6. *bbbaab*	9. *abbbab*	12. *abbabb*	15. *aabb*

Entre ces quinze variations, on en compte ſept, qui donne le tout au Banquier; deux qui lui donnent ſa miſe avec la moitié de la miſe du Ponte, & les ſix autres qui le font perdre; en ſorte que le ſort du Banquier ſera $= (7 \times 2\,A + 2 \times \frac{3}{2}\,A + 6 \times 0) : 15 = \frac{17}{15}\,A = A + \frac{2}{15}\,A$, conformément à ce que vous avez trouvé. Ainſi de même ſi la carte du Ponte eſt trois fois entre les ſix cartes du Banquier, il n'y aura que 20 façons de varier la ſituation de deux lettres *a* & *b* priſe chacune trois fois, qui étant demêlées feront voir que le ſort du Banquier ſera $= A + \frac{3}{20}\,A$. Suivant ce principe, voici les formules générales que j'ai trouvées pour quelque nombre de cartes qu'il y ait entre les mains du Banquier, & quelque nombre de fois que la carte du Ponte s'y trouve, ſans ſuppoſer connu le ſort du Banquier dans un nombre de cartes exprimé par $p - 2$, comme vous faites dans votre formule générale, que j'ai auſſi trouvée fort aiſément; voici, dis-je, les miennes. Soit $1.2.3.4\ldots(p-q) = m$; $(q+1).(q+2).(q+3)\ldots p = n$; $(p-q+1).(p-q+2).(p-q+3)\ldots p = l$; je dis que l'avantage du Banquier, ſi q eſt un nombre pair, ſera exprimé par cette ſuite

$$\frac{m}{2n} \times \left(1 + \frac{(q-1)q}{1.2} + \frac{(q-1)q(q+1)(q+2)}{1.2.3.4} + \frac{(q-1)q(q+1)\ldots(q+\ldots}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots \frac{(q-1)q(q+1)\ldots(p-2)}{1.2.3.4\ldots(p-q)}\right).$$

Ou bien par celle-ci

$$\frac{(q-1)q}{2l} \times (1.2.3\ldots(q-2) + 3.4.5\ldots q + 5.6.7\ldots(q+2) + \ldots (p-q+1).(p-q+2)\ldots(p-2))$$

Mais

Mais ſi q eſt un nombre impair, on aura pour le dit avantage,

$$\frac{(q-1).m}{2n}\times\left(1+\frac{q.(q+1)}{1.2.3.}+\frac{q.(q+1).(q+2).(q+3)}{2.3.4.5.}+\ldots\frac{q.(q+1).(q+2)\ldots(p-2)}{2.3.4\ldots p-q},\right)$$

ou bien $\frac{(q+1)q}{2l}\times(2.3.4\ldots(q-1)+4.5.6\ldots\ldots(q+1)+6.7.8\ldots(q+3)+\ldots\ldots(p-q+1).(p-q+2)\ldots(p-2))$; où il faut remarquer que les nombres p & q peuvent être quelconques, pourvû que q ne ſoit pas moins grand que 3. Si vous voulés prendre la peine, vous pouvés examiner ces formules générales, ſi elles s'accordent avec les votres que vous donnés pour des cas particuliers, *pag.* 24 & 25.

Au reſte, ce que j'ai dit juſqu'ici ſur le jeu du *Pharaon* ſe doit auſſi entendre ſur celui de la *Baſſette*, *pag.* 66 & ſuivantes, où pareillement pour calculer les cas favorables & les déſavantageux au Banquier, on peut s'épargner la peine d'éplucher tous les arrangemens poſſibles des cartes, qui ſont entre les mains du Banquier, en n'emploiant que les variations des deux lettres a & b, comme il a été fait ci-deſſus; mais paſſons à d'autres.

Pag. 32. *ligne* 15. En parlant de l'avantage d'avoir la main au *Jeu du Lanſquenet*, vous dites, Monſieur, qu'*on ne peut exprimer cet avantage, que par une ſuite compoſée d'un nombre infini de termes, qui iront toûjours en diminuant, & qu'on ne pourra jamais avoir la valeur préciſe de l'avantage de* Pierre. Il ſemble qu'en écrivant cela, vous n'aviés pas encore pris garde, que cette ſuite va toujours en progreſſion géométrique, laquelle par conſéquent, quoique continuée à l'infini, fait une ſomme qu'on peut trouver fort aiſément par les règles communes. La ſuite, par exemple, que vous donnés *pag.* 35. eſt ſommable: qu'eſt-il donc beſoin d'approcher de la juſte valeur en ajoutant un grand nombre de termes? puiſqu'on peut trouver au juſte cette valeur dans un moment & ſans peine, étant préciſement $\frac{1125}{4024}$ qui eſt plus grand que $\frac{1}{4}$ ou $\frac{4}{16}$, & par conſéquent en approche plus que de $\frac{4}{17}$ que vous avés mis pour

la quantité approchante; mais il ſemble auſſi que vous vo ſoyez enfin apperçu que ce ſont des progreſſions, dont o peut donner la ſomme de tous les termes; car à la *page* 5 vous donnés les valeurs exactes de l'avantage & du dé vantage des coupeurs. Voici une formule générale, qui exp me l'avantage de celui qui a la main en quelque ſorte d jeu que ce ſoit, & qui recommence à avoir la main au tant de fois qu'il gagne, juſqu'à ce qu'il perde: Soit nom mé *a* l'avantage qu'il a dans chaque main, *m* le *nombr* des cas qui le font gagner, & *n* le nombre des cas qui l font perdre; je dis que ſon avantage total ſera [en ſuppoſa $m:(m+n)=p$) égal à cette ſuite $a+pa+p^2a+p^3a$ &c dont la ſomme eſt $=a:(1-p)=(m+n)a:n=a+$ $ma:n$. On peut trouver la même choſe ſans le *ſecours d'u*ne progreſſion par l'Algébre; voici comment.

Soit *z* la miſe de chaque Joueur, & ainſi le ſort pour le premier jeu de celui qui tient la main ſera $(m\times z+n\times o$ $(m+n)=2mz:(m+n)$ & partant ſon avantage $=$ $2mz:(m+n)-z=(m-n)z:(m+n)$; d'où ſuit que nommant *a* l'avantage de chaque main, on aura $z=(m+n)a:(m-n)$. La miſe des Joueurs étant ainſi trouvée, ſoit *x* l'avantage total, qui conſiſte dans le *droit de Pierre* de tenir les cartes autant de fois qu'il gagne; il y aura donc, lorſqu'il commence à jouer, *m* cas qui le font ga gner la miſe de ſon antagoniſte, plus l'avantage total de con tinuer le jeu ſçavoir $(m+n)a:(m-n)+x$, & *n* cas qui le font perdre ſa miſe, c'eſt à dire qui le font avoir $(-m-n)a:(m-n)$; on aura donc cette égalité $x=(m((m+n)a:(m-n)+x)+n((-m-n)a:(m-n)))$: $(m+n)$ laquelle étant reduite donnera pour l'avantage total $x=(m+n)a:n=a+ma:n$, tout comme ci-deſſus. Cette voye eſt plus commode que celle par la progreſſion, parce qu'on peut ainſi trouver avec une égale facilité l'avantage de *Pierre*, en ſuppoſant que *Pierre* aiant perdu une fois, le jeu ne finiſſe pas encore; mais qu'on le continue à l'*infini*,

la

la main paſſant alternativement d'un Joueur à l'autre : Soit donc t l'avantage de *Pierre*, qui commence à avoir la main ; il y aura m cas, qui lui donnent pour gain la miſe de ſon antagoniſte, plus l'avantage de recommencer, ſavoir $(m+n)a:(m-n)+t$, & n cas, qui lui ôtent ſa miſe, & qui en même tems le mettent dans l'état où étoit ſon antagoniſte lorſqu'on alloit commencer le jeu, c'eſt à dire, qui le ſont avoir $(-m-n)a:(m+n)-t$; d'où il reſulte cette égalité $t=(m((m+n)a:(m-n)+t)+n((m-n)a:(m-n)-t)):(m+n)$; par la réduction de laquelle on trouve $t=(m+n)a:2n$; en ſorte que l'avantage de *Pierre*, en ſuppoſant que le jeu doive être continué à l'infini, n'eſt que la moitié de l'avantage qu'il auroit dans la ſuppoſition que le jeu finiſſe auſſi-tot qu'il perd la main. Je m'étonne que vous n'ayés pas pris ſoin de déterminer l'avantage dans cette autre ſuppoſition là, comme la plus naturelle & la plus convenable à l'intention des Joueurs, qui ne commencent pas le jeu dans le deſſein de le finir dès que celui qui a le premier la main la perdra, mais plutôt de faire paſſer le droit de la main d'un Joueur à l'autre, un aſſés grand nombre de fois, en ſorte que le jeu peut être cenſé durer à l'infini.

Pag. 59. *l.* 26. La ſuite que vous donnés ici pour déterminer le ſort de *Pierre*, tenant la main au jeu du Treize †, eſt très belle & très curieuſe, on la tire aiſément de la formule générale de la *page* 58. J'ai auſſi trouvé cette formule, avec une autre, qui m'a fourni la même ſuite, mais ſans changement de ſignes, & qui ſuppoſe les ſorts des nombres précédens des cartes connus, comme vous l'allés voir. Soit S le ſort de *Pierre* que l'on cherche, le nombre des cartes que *Pierre* tient étant exprimé par n; t le ſort de *Pierre* le nombre des cartes étant $n-1$; s ſon ſort, le nombre des cartes étant $n-2$; r le ſort, quand le nombre des cartes eſt $n-3$, & ainſi de ſuite; on aura $S=\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots\frac{1}{1.2.3..n}-\frac{t}{1}-\frac{s}{1.2.}-\frac{r}{1.2.3.}-\ldots\frac{0}{1.2.3..n}$; Cela peut paſſer pour un Théoréme,

† Cette ſuite eſt $\frac{1}{1}-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}-\frac{1}{1.2.3.4.5.6}+$ &c.

réme, votre ſuite étant plus propre pour trouver d'abord la valeur de *S*.

Pag. 63 *l.* 13. Vous faites $x = \frac{1}{2}(4A + S) + \frac{1}{2}A$; mais vous vous trompés; il faut faire $x = \frac{1}{2}(4A + S - A) + \frac{1}{2}A$; & ainſi l'avantage de *Pierre* eſt $\frac{1}{7}$ A & non pas $\frac{2}{7}$ A : par la même raiſon *pag.* 64 l. 11 *à fine* ce que vous dites que l'avantage de *Pierre* ſeroit $2A + \frac{16}{57}A$, n'eſt pas juſte, car je ne trouve que $A + \frac{16}{57}A$.

Pag. 80. Il ne ſemble pas que Mr. PASCAL lui-même ait compris tout l'uſage de ſa Table †; une des plus belles proprietés dont on ne fait pas mention ici, étant que les bandes perpendiculaires expriment les coëfficiens des puiſſances d'un binome: car ſi l'expoſant d'une puiſſance quelconque ſe nomme p, on aura

$$(a+b)^p = 1a^p + \frac{p}{1}a^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{1.\,2.}a^{p-2}b^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\,2.\,3.}a^{p-3}b^3 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.\,2.\,3.\,4}a^{p-4}b^4 + \&c.$$

ce que j'ai trouvé autrefois par une voie toute particuliere, & j'en ai communiqué la démonſtration à feu *Mr. le Marquis de* L'HOPITAL : on en voit quelque choſe dans ſon Livre poſthume *, à l'endroit que vous allegués, *pag.* 92.

Pages 158 & 159. Vous prétendés, Monſieur, d'avoir reſolu le ſecond Probléme de Mr. HUYGUENS ††, ce que vous avés effectué, à la vérité, dans le ſens que vous donnés à ce Probléme, qui eſt qu'on doit ſuppoſer que chaque Joueur aiant retiré un jetton noir, le remette incontinant dans le pot, pour laiſſer à ſon ſucceſſeur la douzaine de jettons toûjours complette, ce qui rend le Probléme fort facile, & fait trouver le ſort des trois Joueurs dans la raiſon de 9, 6, 4; comme vous avés trouvé. Mais il ſemble que Mr. HUYGUENS ait propoſé ce Problé-

† C'eſt le *Triangle Arithmétique* ſi connu, & dont Mr. PASCAL a compoſé un Traité.

* *Traité Analytique des Sections Coniques.* Paris 1707. 4°.

†† Le Probléme eſt propoſé en ces termes.

Tres Colluſores A, B, C, aſſumentes 12 calculos, quorum 4 albi, & 8 nigri exiſtunt, ludunt hac conditione; ut, qui primus ipſorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio ſit penes A, ſecunda penes B, & tertia penes C, & tum ſequens rurſus penes A, atque ſic deinceps alternatim. Quæritur quænam futura ſit ratio illorum ſortium?

HUYGUENS *De ratiociniis in Ludo alea.* pag. ult.

Probléme dans un autre ſens, qui paroit plus naturel, qui eſt que toutes les fois qu'on tire un jetton noir, il ne ſoit plus remis dans le pot; ſi bien que le premier tireur aiant manqué en tirant un jetton noir, le ſecond quand il vient à tirer, ne trouve plus qu'onze jettons; & le ſecond aiant auſſi manqué, le troiſieme ne trouve plus que dix jettons; & celui ci aiant pareillement tiré un noir, ne laiſſe que neuf jettons au premier qui doit recommencer à tirer, & ainſi conſécutivement; le Probléme étant conçû dans ce ſens, devient un peu plus difficile, & en rend le calcul plus long. Eſſayés-le, pour voir ſi vous vous accordés avec moi; j'en ai mis la ſolution après la propoſition dans le Traité *De Ratiociniis in ludo aleæ*, il y a bien douze ans; en le conſultant, je trouve que j'y ai écrit ces trois nombres, 77, 53, 35, pour la raiſon des ſorts des trois Joueurs.

Page 137. J'ai trouvé une formuſe qui s'exprîme & ſe fait entendre plus facilement en cette maniere; pour les cas déterminés, † le nombre en eſt $= (1.2.3.4\ldots p):(1.2.3\ldots b \times 1.2.3\ldots c \times 1.2.3\ldots d \times 1.2.3\ldots e \times$ &c.) c'eſt-à-dire $=$ à une fraction dont le numerateur eſt le nombre des arrangemens d'une multitude exprimée par p, & le dénominateur le produit des nombres des arrangemens des multitudes exprimées par b, c, d, e &c. Il eſt remarquable que cette formule exprime juſtement la méthode, que j'ai trouvée autrefois, pour la détermination du coëfficient de quelque terme que l'on voudra d'un polynome quelconque élevé à une puiſſance quelconque, ce qui me fut propoſé autrefois par Mr. LEIBNITZ, qui approuva fort la ſolution que je lui en avois donnée, & la trouva utile pour élever promptement un polynome à une haute puiſſance; car ſoit le polynome $(t+x+y+z+\&c.)^p$ dont il faille trouver le coëfficient du terme $t^b x^c y^d z^e$ &c. en

† Il s'agit, étant donné un nombre quelconque p de dez, qui aient chacun tant de faces qu'on voudra, de trouver combien il y a de hazard pour amener le nombre b d'as, c de deux, d de trois, e de quatre, &c.

en ſuppoſant $b + c + d + e$ &c. $= p$; je dis que le coëf[illegible] cherché ſera comme ci-deſſus $(1.2.3.4 \ldots p) : (1.2.3 \ldots b \times 1.2.[illegible]$ $c \times 1.2.3 \ldots d \times 1.2.3 \ldots e \times$ &c.)

Mais pour revenir à la queſtion ſur les dez, & pour [illegible] voir combien il y a de cas indéterminés, qu'avec un cer[illegible] nombre de dez on peut amener tant d'une eſpèce, tant [illegible] ne autre † &c. Soit nommé la valeur de cette fraction [illegible] il faut multiplier v (ſuppoſant R le nombre des faces de [illegible] que dez) par cette ſuite $R.(R-1).(R-2).(R-[illegible]$ continuée juſqu'à ce qu'il y ait autant de termes, qu'il y [illegible] d'expoſans, & diviſer le produit par 1. 2. 3, s'il y a [illegible] expoſans égaux, & le diviſer encore par 1. 2. 3. 4, s'il y [illegible] a quatre égaux, & ainſi de ſuite s'il y a d'autres expo[illegible] égaux.

Pages 159. & 160. Les deux Problémes, que vous me[illegible] ici comme le troiſiéme & le quatriéme, ſont dans le trai[illegible] Mr. HUYGUENS, le quatrieme & le troiſiéme. Pour [illegible] qui eſt de celui-là, * c'eſt-à-dire du quatriéme ſelon l'or[illegible] de Mr. HUYGUENS, ou du troiſiéme dans votre livre, il [illegible] bien reſolu, en tant que *Pierre* parie que parmi les [illegible] tons qu'il va prendre, il s'y en trouvera juſtement 3 blancs [illegible] plus ni moins; car je trouve auſſi que le ſort de *Pierre* [illegible] à celui de *Paul*, dans cette ſuppoſition, comme 35 à 64, [illegible] comme 280 à 512; mais ſi on veut que *Pierre* ait gagne a[illegible] ſi quand il tire les quatre blancs, ce qui paroit être le ve[illegible] table ſens des paroles de Mr. HUYGUENS, *inter quos* 3 *a*[illegible] *erunt*, où il faut ſuppléer *minimum*, comme ſi *Pierre* s'eng[illegible] geoit de tirer trois blancs pour le moins, parmi les 7 jetton[illegible] qu'il prend entre les 12: Ce ſens étant donné au Probléme on trouve que les ſorts de *Pierre* & de *Paul* ſeront comm[illegible] 14 & 19.

Pag. 16[illegible]

† C'eſt-à-dire, tant de ſimples, tant de doubles, tant de triples &c. On [illegible] pelle doubles, deux dez qui marquent un même point, triples, trois dez qui ma[illegible] que un même point, &c.

* *Aſſumptis* . . . 12 *calculis* 4 *albis & 8 nigris*, *certat* A (Petrus) *contra* B. P[illegible] lum) *quod velatis oculis* 7 *calculos ex iis exemerit*, *inter quos* 3 *albi erunt*. *Q*[illegible] *ritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B?* HUYG. de Rat. de Lud. aleæ pag. [illegible]

Pag. 162. La propoſition que vous faites ici du Probléme 5. de Mr. HUYGUENS † lui donne un ſens tout différent, & ce n'eſt plus le même Probléme. Pour vous en faire voir la grandiſſime différence, je vais vous donner ici les ſimples ſolutions de l'un & de l'autre propoſé en général. Selon les conditions de Mr. HUYGUENS, ſoit nommé n le nombre des jettons que chaque Joueur prend au commencement, a le nombre des coups qui font gagner à *Pierre* un jetton de *Paul*, & b le nombre des coups qui font gagner à *Paul* un jetton de *Pierre*; je dis que leurs ſorts ſeront communs a^n & b^n; & ainſi pour le cas particulier, qui eſt en queſtion, des 3 dez, où $n = 12$, $a = 27$ & $b = 15$; & ſorte que $a : b = 27 : 15 = 9 : 5$, je dis que le ſort de *Pierre* ſera à celui de *Paul* $= 9^{12} : 5^{12} = 282429536481 : 244140625$. Vous n'avés pas obſervé, je crois, que ces deux grands nombres ne ſont autre choſe que la 12[e] puiſſance de 9 & de 5. Mais ſelon les conditions de votre propoſition, nommons encore n le nombre des jettons qu'un des deux Joueurs doit gagner le premier pour gagner la partie, c'eſt à dire la moitié des jettons que *Jaques* diſtributeur tient au commencement entre ſes mains; ſoit auſſi a le nombre des coups favorables à *Pierre*, & b celui des coups favorables pour *Paul*. Je trouve que les ſorts des deux Joueurs ſeront exprimés par les deux ſommes des deux moitiés des termes du binome $a + b$ élevé à la puiſſance $2n - 1$: par exemple ſi $n = 3$, les ſorts de *Pierre* & de *Paul* ſeront comme la ſomme des trois premiers termes & la ſomme des trois derniers termes de $(a+b)^5$, c'eſt à dire, $a^5 + 5a^4b + 10a^3bb$, & $b^5 + 5b^4a + 10b^3a^2$; & ainſi en général ſuppoſant

2 n —

† Le Probléme de M. HUYGUENS eſt celui-ci, *A* (Paulus) & *B* (Petrus) *aſſumentes ſingulis* 12 *nummos, ludunt tribus teſſeris, hac conditione ut, ſi* 11 *puncta jaciantur, A tradat nummum ipſi B; at ſi* 14 *puncta jaciantur, B tradat nummum ipſi A; & ut ille ludum victurus ſit, qui primum omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B, ut* 244140625 *ad* 282429536481. Ce que M. DE MONTMORT avoit, par mépriſe, entendu comme ſi *Jaques* aiant en main 24 jettons, en donnoit un à *Paul*, toutes les fois que les dez aménent 11, & un à *Pierre*, quand ils aménent 14: & que celui-là a gagné, qui a le premier 12 jettons.

$2n - 1 = p$, ces deux ſuites $a^p + \frac{p}{1} a^{p-1} b^1 + \frac{p.(p-1)}{1.2} a^{p-2} b^2 + \frac{p.(p-1)(p-2)}{1.2.3} a^{p-3} b^3 + \&c.$ & $b^p + \frac{p}{1} b^{p-1} a^1 + \frac{p.(p-1)}{1.2} b^{p-2} a^2 + \frac{p.(p-1)(p-2)}{1.2.3} b^{p-3} a^3 + \&c.$ continuée chacune juſqu'au nombre des termes exprimés par n, donneront la raiſon des ſorts de *Pierre* & de *Paul*. Dans notre cas particulier où $n = 12$, & $a : b = 9 : 5$, il faudroit prendre douze termes de chacune de ces deux ſuites $9^{23} + \frac{23}{1} 9^{22} 5^1 + \frac{23.22}{1.2} 9^{21} 5^2 + \frac{23.22.21.}{1.2.3.} 9^{20} 5^3 + \frac{23.22.21.20}{1.2.3.4} 9^{19} 5^4 + \&c.$ & $5^{23} + \frac{23}{1} 5^{22} 9^1 + \frac{23.22}{1.2} 5^{21} 9^2 + \frac{23.22.21}{1.2.3} 5^{20} 9^3 + \frac{23.22.21.20}{1.2.3.4} 5^{19} 9^4$, ce qui produiroit deux nombres ſi grands que le premier conſiſteroit [ſelon ma conjecture] pour le moins en 25 figures : ſi vous avés envie d'en faire le calcul, voilà de la beſogne pour exercer votre patience : Cependant vous voiés l'extrême différence, qu'il y a entre les deux manieres de propoſer le Probléme cinquieme de M. HUYGUENS : ſi bien que ce ſont effectivement deux Problémes tous différens, dont je vous ai reſolu chacun généralement. Vous ſerés peut-être étonné que vos 23 égalités vous fourniſſent pourtant la même ſolution de Mr. HUYGUENS, nonobſtant que vous propoſiés le Probléme dans un ſens qui le fait, comme je viens de vous le montrer, ſi différent de celui de Mr. HUYGUENS ; mais la raiſon en eſt, parce que vous ſuivés effectivement, en formant les égalités, les conditions de Mr. HUYGUENS, & non pas celles de votre propoſition ; car je vois que vous ſuppoſés que les ſorts des deux Joueurs ſont les mêmes lorſqu'il y a une même différence entre le nombre des jettons que l'un a déja gagné, & le nombre des jettons que l'autre a gagné ; en ſorte que vous ſuppoſés, par exemple, que leurs ſorts ſont les mêmes, ſoit que

que *Pierre* ayant gagné cinq jettons, *Paul* en ait trois, ou que *Pierre* ayant deux jettons, *Paul* n'en ait point: c'eſt cette ſuppoſition, qui n'eſt pas juſte, ne pouvant ſubſiſter avec le Probléme pris dans le ſens que vous lui donnés.

Pag. 177, *lig* 12. & 13. *A qui il manque le moins de points.* Cette reſtriction qu'il doit manquer à *Pierre* le moins de points eſt ſuperflue, la regle que vous donnés n'étant pas moins bonne, quand il manque à *Pierre* le plus de points; il ſeroit même plus expéditif, de ſuppoſer que *Pierre* ſoit celui à qui il manque plus de points; car votre ſuite aura un plus petit nombre de termes, qui ſeront par conſéquent plûtôt ajoutés en une ſomme, que dans l'autre ſuppoſition. Quand au reſte, je réſous ce Probléme plus généralement, & par une expreſſion plus ſimple & plus naturelle: je l'énonce ainſi. Pierre *&* Paul *jouent en pluſieurs parties à un jeu inégal, où le nombre des cas favorables à* Pierre *eſt à celui des cas favorables à* Paul *comme* a *à* b; *& après avoir joué quelque temps le nombre des parties qui manquent encore à* Pierre *ſoit* p, *& le nombre des parties qui manquent à* Paul *ſoit* q; *on demande la raiſon de leurs ſorts.* Solution. Elevés le binome $a+b$ à la puiſſance $p+q-1=r$; le nombre des termes en ſera $p+q$; je dis que la ſomme des premiers termes dont le nombre ſoit q, eſt à la ſomme du reſte des termes dont le nombre ſera p, comme le ſort de *Pierre* eſt à celui de *Paul*; or ces deux ſommes ſont comme il ſuit:

$$a^r + \frac{r}{1}a^{r-1}b^1 + \frac{r\,(r-1)}{1.\,2}a^{r-2}\,b^2 + \frac{r.\,(r-1)(r-2)}{1.\,2.\,3}a^{r-3}b^3 + \&c.$$

continuée juſqu'au nombre des termes exprimés par q. Et

$$b^r + \frac{r}{1}b^{r-1}a^1 + \frac{r(r-1)}{1.\,2}b^{r-2}a^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.\,2.\,3}b^{r-3}a^3 + \&c.$$

continuée juſqu'au nombre de termes exprimé par p. Suppoſant p & q égaux, nous tombons dans le cas du Probléme cinquiéme de Mr. Huyguens, pris dans le ſens que vous le propoſés, *pag.* 162, ſur lequel je vous ai parlé amplement ci-deſſus.

Page 178. *l.* 9. *Voici une Table* &c. Je m'étonne que vo n'ayés pas obſervé l'uniformité de cette Table & la grande fa- cilité avec laquelle on conſtruit une Table générale, po quelque nombre de parties qu'on joue toûjours en rabatta car ſoit le nombre des parties en leſquelles *Pierre* & *Paul* con viennent de jouer, n : voici la Table de leurs ſorts.

T A B L E.

Si *Pierre* a nul point, ſon ſort eſt	$n+0$	contre	$n-0$
un point	. . . .	$n+1$	. .	$n-1$
deux points	. . . .	$n+2$	. .	$n-2$
trois points	. . . .	$n+3$	. .	$n-3$
quatre points	. . . .	$n+4$	. .	$n-4$
. .		. .		. .
. .		. .		. .
n points,	. . . .	$n+n$	. .	$n-n$

Vous voyés que leurs ſorts vont en progreſſion arithméti- tique, l'une aſcendante, l'autre deſcendante: en effet votr Table que vous avés faite pour le nombre de ſix ſeulement, s'accorde avec la mienne générale ; car le ſort de

7	contre 5,	eſt la même choſe que	$6+1$	contre	$6-1$
2	. . 1	. . . .	$6+2$	. .	$6-2$
3	. . 1	. . . .	$6+3$	. .	$6-3$
5	. . 1	. . . .	$6+4$	. .	$6-4$
11	. . 1	. . . .	$6+5$	. .	$6-5$

Page 181. *ligne* 13 *Elles ſont abſolument impratiquables.* Au contraire, comme c'eſt un progreſſion géométrique, on peut ajouter dans un moment autant des termes qu'on veut, par des regles communes, qu'on trouve dans tous les livres d'a- rithmétique; ainſi le nombre des termes étant b, je trouve que la ſomme de tous les termes ſera $= p(m^b - q^b) : (m - q)\, m^b$; mais pour le reſte, vous faites bien d'emplo- yer

yer les logarithmes; je m'en ſuis ſervi utilement dans une pareille occaſion, il y a bien douze ans, où il s'agiſſoit de déterminer combien il reſtoit de vin & d'eau mêlé enſemble dans un tonneau, lequel étant au commencement tout plein de vin, on en tireroit tous les jours pendant une année une certaine meſure, en le rempliſant incontinant, après chaque extraction, avec de l'eau pure. Vous trouverés la ſolution de cette queſtion, qui eſt aſſés curieuſe, dans ma Diſſertation *De Nutritione* *; que Mr. VARIGNON vous pourra communiquer. Je fis cette queſtion, pour faire comprendre, comment on peut déterminer la quantité de vieille matiere qui reſte dans nos corps, mêlée avec de la nouvelle, qui nous vient tous les jours par la nourriture, reparer la perte que nos corps font inſenſiblement par la tranſpiration continuelle.

Mais en voilà bien aſſés, Monſieur & peut-être plus qu'il ne faut pour vous cauſer de l'ennui; c'eſt pour cela que je ne vous parle pas des fautes, ſoit de calcul, ſoit d'impreſſion que j'ai rencontrées en quelques endroits. Je vous prie cependant de prendre en bonne part tout ce que j'ai dit juſqu'ici; c'étoit pour l'amour de la vérité que j'ai crû vous devoir communiquer avec ma franchiſe ordinaire mes réflexions; d'autant plus que vous me les avés demandées. Je ne laiſſe pas d'eſtimer votre Livre autant qu'on peut eſtimer un Ouvrage, qui fait honneurs à ſon Auteur, & qui marque tout enſemble une profonde pénétration d'eſprit, & une patience infatigable à faire de longs & pénibles calculs. Il ſeroit à ſouhaiter que vous vouluſſiés prendre la peine d'étendre votre Livre, & d'en faire un ouvrage plus ample & plus riche: la matiere ne vous manqueroit pas, ſur-tout ſi vous vouliés entrer dans la morale & la politique, comme mon Frere avoit commencé de faire dans ſon Ouvrage, qui ſelon toutes les apparences ne paroitra jamais. †. J'entens avec plaiſir que les Mathématiques, malgré les misères de la guerre, fleuriſſent de plus en plus, & deviennent même en honneur en France. Ici, dans nos pays,

 nous

* Ci-deſſus N°. LII.
† Il a paru en 1713, ſous le titre d'*Ars conjectandi*. Baſileæ. 4°.

nous ne pouvons pas nous vanter du même bonheur. Depuis le départ de Mr. HERMAN, je ne ſçai perſonne, excepté mon Neveu, & très peu d'autres, dont il faille eſperer de grands progrès dans ces ſciences, leſquelles étant conſiderées, comme n'étant pas *de pane lucrando*, on les néglige, comme des choſes ſéches & peu utiles. Les quatre Problémes que vous propoſés à la fin de votre Traité ſont curieux; mais le premier me paroit inſoluble pour la longeur du calcul qu'il demanderoit, & que la vie humaine ne ſeroit pas ſuffiſante d'achever. Je n'entends pas le ſens du quatrieme: le ſecond, & le troiſieme me paroiſſent traitables, quoique non ſans beaucoup de peine & de travail, que j'aime mieux vous laiſſer pour apprendre de vous la ſolution, que de travailler long-tems aux depens de mes occupations ordinaires, qui ne me laiſſent guére le loiſir de m'appliquer à d'autres choſes. Il me tarde de voir la nouvelle Edition du Livre de Mr. NEWTON. Il y a long-temps qu'il m'a promis qu'il me l'enverroit, dès qu'il ſeroit imprimé; mais du depuis je n'en ai plus rien entendu; quand vous l'aurés reçû, je vous prie de me mander par occaſion ce que nous y aurés trouvé: En attendant, je me donne l'honneur de me nommer,

MONSIEUR

Votre très humble & très obéïſſant Serviteur

BERNOULLI

Basle, 17 *Mai* 1710.

EXTRAIT

N°. LXXXV.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De Monſieur HERMAN *à Monſieur* BERNOULLI, *dattée de* Padoue, le 12. Juillet 1710.

JE ſuis bien aiſe, Monſieur, que vous ayez pleinement réſolu le Probléme inverſe des Forces centripètes, pour *trouver la Courbe qu'elles doivent faire décrire, la loi de ces forces étant donnée:* Probléme que je croi incomparablement plus difficile que le direct. C'eſt ce qui m'a porté à eſſayer auſſi mes forces ſur cettte queſtion, & aſſez heureuſement, ayant trouvé par mon analyſe, que les Sections Coniques ſont les ſeules Courbes que les Planètes puiſſent décrire avec des forces centripètes réciproquement proportionnelles aux quarrés des diſtances de ces Planetes au centre de ces forces: Vous en jugerez par l'analyſe que voici (ce me ſemble) aſſez courte.

Mémoires de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris. 1710. pag. 519. Edit. de Paris. pag. 682. Edition de Hollande.

Soient ABC la Courbe cherchée, LI ſon axe, S le centre des forces, BC une particule infiniment petite de la courbe, ſur laquelle particule prolongée ſoit CE = BC; du point E ayant tiré ED parallèle à CS, & qui rencontre la Courbe en D, ſoient DF, CG, BH, parallèles à LI, leſquelles rencontrent en F, G, la petite droite EG parallèle à CI perpendiculaire ſur LI, & en H la droite CI; ſoit enfin la droite DK parallèle auſſi à CI, & qui rencontre CG en K.

TAB. XX. N°. LXXXV.

Cela fait, ſoient SI = x, IC = y: l'on aura SC = $\sqrt{(xx+yy)}$, BH ou CG = dx, CH ou EG = dy; & conſéquemment KG, ou DF = ddx, EF = ddy, ce qui donnera le double du triangle BSC ou CSD = $ydx - xdy$, que je ſuppoſe conſtant: de ſorte que les triangles [*Conſtr.*] ſemblables EDF, CSI, rendront ED = $(-ddx\sqrt{(xx+yy)}):x$.

Préſentement, puiſque le triangle BSC eſt [hyp] conſtant, l'on aura DE, en raiſon de la force centripète au point C, c'eſt-à-dire, en raiſon de $1:(xx+yy)$, ou en raiſon de $(ydx-xdy)^2:(xx+yy)$ d'où réſulte cette équation differentio-differentielle $-addx = x(ydx-xdy)^2:(xx+yy)^{\frac{3}{2}} = (ydx-xdy)(xydx-xxdy):(xx+yy)^{\frac{3}{2}}$, dont l'intégrale eſt $-adx = -y(ydx-xdy):\sqrt{(xx+yy)} = (xydy-yydx):\sqrt{(xx+yy)}$, ou $-abdx:xx = (bxydy-byydx):xx$

$\sqrt{(xx+yy)}$, dont l'intégrale eſt auſſi $ab:x$, ou plus généralement $ab:x \pm c = b\sqrt{(xx+yy)}:x$, ou $a \pm cx:b = \sqrt{(xx+yy)}$, qui eſt une équation aux trois Sections Coniques: ſavoir à la Parabole ſi $b = c$, à l'Ellipſe ſi $b > c$, & à l'Hyperbole ſi $b < c$.

J'ai auſſi tiré de là une maniere facile de déterminer la force centripète ſur une Courbe donnée quelconque. Car ſi (pour abréger) l'on prend $z = SC = \sqrt{(xx+yy)}$ dans cette Courbe; $r =$ SL ſegment de ſon axe, compris entre ſa touchante EL & le centre S des forces centripètes, en prenant toûjours SI $= x$, IC $= y$, & de plus la ſoûtangente IL $= s$: ſi après cela on différentie juſqu'aux ſecondes differences l'équation de la Courbe donnée, & qu'on y ſubſtituë $vrrxyy:z$ au lieu de ddx, $vrry^3:z$ au lieu de ddy, s au lieu de dx, & y au lieu de dy; il en réſultera une équation en grandeurs toutes finies, dont v déſignera la force centripète; laquelle étant regardée comme inconnue, les autres grandeurs x, y, r, s, z, doivent toutes être priſes pour connuës.

Si vous voulez bien, Monſieur, me faire part de vôtre analyſe de ce Probléme des Forces centripètes inverſes, que je crois très-élégante, vous me ferez beaucoup de plaiſir, &c.

N°. LXXXVI.

EXTRAIT DE LA REPONSE

De Monſieur BERNOULLI *à Monſieur* HERMAN, *dattée de* Basle *le* 7 *Octobre* 1710.

Mém. de l'Acad. R. des Sciences de Paris, 1710. pag. 521. Edition de Paris, pag. 685. Ed. de Hol.

PERMETTEZ-MOI, *Monſieur*, d'examiner tant ſoit peu vôtre Solution du Probléme inverſe des Forces centripètes, quoique bonne & digne de vôtre pénétration; aprés quoi je vous expliquerai plus au long ma maniere de le réſoudre, que vous me marquez ſouhaiter. A vous parler franchement, vôtre ſolution paroit faite à deſſein, accommodée à ce que vous cherchiez, & à ce que vous connoiſſiez déja. En effet, comment ſans cela auriez-vous vû, que pour trouver l'intégrale de vôtre équation $-ddx\sqrt{(xx+yy)}:x = (ydx - xdy)^2:(xx+yy)$, il faloit la réduire à $-addx = (ydx - xdy) \times (xydx - xxdy):(xx+yy)^{\frac{3}{2}}$.

De

De plus, comment ſans cela auriez-vous pû tirer l'intégrale de celle-ci, & enſuite l'intégrale de l'intégrale? puiſque les indéterminées x, y, dx, dy, ddx, y ſont ſi mêlées & ſi compliquées, que de les vouloir ſéparer, ſeroit entreprendre un travail à ſe déſeſperer; & qu'il vous auroit été impoſſible de les integrer toutes mêlées, comme vous avez fait, ſi vous n'euſſiez pas ſoupçonné que les Sections Coniques, que vous aviez en vûë, ſatisfaiſoient à votre équation differentio-differentielle; que vous avez pour cela ſi heureuſement accommodée au but où vous tendiez, que vous l'avez enfin reduite à une équation algébrique. Je ſouhaiterois fort que vous eſſayaſſiez vôtre méthode ſur l'hypothèſe générale, c'eſt-à-dire pour trouver la courbe trajectoire dans quelque hypothèſe que ce ſoit des forces centripètes, du moins en ſuppoſant la quadrature des eſpaces curvilignes : vous verriez que le mêlange des indéterminées vous engageroit alôrs dans un embarras, d'où je ne crois pas que vous ſortiſſiez, ſans prendre un autre chemin que celui-là.

De plus, il ne ſuit pas encore de votre Solution particuliére, qu'elle ne conviennent qu'aux ſeules Sections. Coniques; après la premiere intégration de votre équation differentio-differentielle, vous avez oublié d'y ajoûter de part ou d'autre une quantité conſtante; ce qui pourroit laiſſer quelqu'un en doute, ſi outre les Sections Coniques, il n'y auroit point encore quelqu'autre genre de Courbes qui ſatisfit à vôtre queſtion. Pour lever ce doute, vous deviez faire voir que l'addition ou le retranchement d'une quantité conſtante dans un des membres de l'intégrale d'une équation differentielle quelconque, ne change rien à la nature de la Courbe exprimée par ces deux équations. Voici comment je ſupplée à cette omiſſion.

Dans vôtre équation differentio-differentielle $-addx = (ydx - xdy) \times (xydx - xxdy) : (xx + yy)^{\frac{3}{2}}$ je ne mets pas ſeulement [comme vous] $-adx$ pour l'intégrale de $-addx$, mais $-adx \pm$ une quantité conſtante, c'eſt-à-dire, $-adx \pm e(ydx - xdy)$; pour le reſte je le fais comme vous; de ſorte qu'en intégrant vôtre précédente équation

tion differentio-differentielle, je trouve $- adx \pm e(ydx \mp xdy) = -y(ydx - xdy) : \sqrt{(xx+yy)} = (xydy - yydx) : \sqrt{(xx+yy)}$, ou $-abdx : xx \pm eb(ydx - xdy) : xx = (bxydy - byydx) : xx\sqrt{(xx+yy)}$; dont l'intégrale eſt $ab : x \pm eby : x \pm c = b\sqrt{(xx+yy)}$; c'eſt-à-dire (en prenant $h = eb$, & en reduiſant l'équation) $ab \pm hy \pm cx = b\sqrt{(xx+yy)}$: laquelle équation, quoiqu'elle renferme hy, que la vôtre ne renfermoit pas, eſt cependant [comme elle] aux trois Sections Coniques. Quant à la grandeur conſtante $e(ydx - xdy)$, que vous avez négligée, ſi elle n'eût pas été intégrable étant diviſée par xx; & ſi étant ainſi intégrable, elle eût donné des y de pluſieurs dimenſions; Vous voyez, Monſieur, qu'outre les Sections Coniques il y auroit eu encore d'autres Courbes, qui auroient ſatisfait à vôtre queſtion, ſans que vous vous en ſuſſiez apperçu. Ce qui me fait eſperer que vous conviendrez avec moi, que vôtre Solution eſt défectueuſe, faute d'être aſſez générale.

Voici préſentement ma Solution, que vous me marquez ſouhaiter: j'eſpère auſſi qu'elle ne vous déplaira pas, 1°. étant générale pour quelque hypothèſe que ce ſoit, & donnant la conſtruction de la Courbe, les quadratures des eſpaces curvilignes étant données; 2°. en ce que j'y arrive à une équation ſans mêlange d'indéterminées; 3°. & parce qu'il n'y entre que des premieres differentielles, ſans avoir beſoin de differentio-differentielles. Pour vous faire voir le tout d'un bout à l'autre, & dans une étenduë, qui [quoique longue] ne vous déplaira pas; je commence par le Lemme ſuivant.

LEMME.

TAB. XX. N°. LXXXVI. *Fig.* 1.

Si deux Corps, de maſſes proportionnelles à leurs peſanteurs, commencent à deſcendre d'un même point A avec des viteſſes égales, & avec des forces égales vers un même point O; l'un directement ſuivant la droite AO, & l'autre obliquement ſuivant la trajectoire ABC qu'il décrira: je dis que dans toutes les diſtances égales

égales de part & d'autre du centre O des forces, comme en B, E, en imaginant l'arc de cercle BE décrit de ce centre O; ces deux Corps auront toûjours des viteſſes égales : de ſorte que ſi EG marque la viteſſe acquiſe en E du Corps qui deſcendroit ſuivant AO, la même EG marquera auſſi la viteſſe en B du Corps qui décrit la trajectoire ABC.

La démonſtration de ce Lemme ſe trouve dans le Livre de Mr. NEWTON, *De Princ. Math. Phil. Nat. pag* 125. † Mais elle y eſt trop embarraſſée: la voici plus ſimplement.

Concevons la Courbe ABC & la droite AO diviſées en leurs élemens B*b*, E*e*, par une infinité de cercles BE, *be*, infiniment proches les uns des autres, tous décrits du centre O. Cela conçû, les Méchaniques font voir que par tout la force en chaque point E ſuivant EO, qui [*hyp*] eſt la même qu'en chaque point correſpondant B ſuivant BO, eſt à ce qu'il en reſulte de celle-ci au mobile, ſuivant chaque élement correſpondant B*b* de la Courbe qu'il trace, comme B*b* eſt à E*e*. Or les Méchaniques faiſant voir auſſi que les accroiſſemens de viteſſes, qui reſultent des ces forces dans des corps égaux, ſont entr'eux en raiſon composée de ces mêmes forces, & des temps élementaires employés par elles à produire ces accroiſſemens de viteſſes, c'eſt-à-dire, employés à faire parcourir à ces corps les élemens linéaires E*e*, B*b*; & qu'au commencement en A, où les viteſſes ſont ſupposées égales de part & d'autre, ces élemens de temps ſont entr'eux comme les premieres de ces petites lignes E*e*, B*b*: il ſuit delà que ces accroiſſemens de viteſſes ſuivant les premieres E*e*, B*b*, ſont ici entr'eux en raiſon composée de B*b* à E*e*, & de E*e* à B*b*, c'eſt-à-dire, comme B*b* × E*e* eſt à E*e* × B*b*. Donc à la fin de ces premiers élemens des lignes AO, ABC, les accroiſſemens de viteſſes ſuivant ces premiers élemens linéaires ſeront ici égaux entr'eux. On les démontrera de même égaux entr'eux à la fin des ſeconds élemens de ces lignes AO, ABC; à la fin des troiſiemes; à la fin des quatriemes, &c. pris ainſi deux à deux à diſtances égales du point O. Donc à diſtances égales quelconques de ce point O,

† Liv. I. Sect. VIII. Prop. 40.

O, les viteſſes ſuivant chacune des lignes AO, ABC, ſe trouvant ainſi faites des premieres [*hyp*] égales entr'elles, & d'un égal nombre d'accroiſſemens égaux deux à deux de part & d'autre, ſeront auſſi égales entr'elles. *Ce qui falloit démontrer.*

COROLL. Delà voici la Courbe DGH de ces viteſſes, c'eſt-à-dire, une courbe qui par chacune de ſes appliquées EG déſigne la viteſſe que le corps, qui deſcend droit de A vers O, a en chaque point E correſpondant de la droite AO; & conſéquemment auſſi [*Lem* 1.] celle que le corps, qui trace la courbe ABC, a en chaque point B correſpondant de cette courbe. Pour cela ſoit OE $= x$, EG $= v$, & la force en E, ou en B, vers O, c'eſt-à-dire, la force centripéte $= \phi$, laquelle ſoit donnée en x & en conſtantes, ſuivant quelque loi de forces que ce ſoit. Cela poſé, puiſque le temps par E*e* eſt $= dx : v$, & que ce tems multiplié par la force centripéte Φ, donne l'augmentation ou la diminution momentanée de viteſſe, ſelon que le corps deſcend ou monte, c'eſt-à-dire, ſelon qu'il s'approche ou qu'il s'éloigne du point O; l'on aura ici $\Phi\, dx : v = - dv$, ou $\Phi\, dx = - vdv$, dont l'intégrale eſt $\int \Phi\, dx = ab - vv$: j'entends par ab une quantité conſtante quelconque, laquelle ſe peut ajouter à volonté aux intégrales ſimples. Donc $v = \sqrt{(ab - \int \Phi\, dx}$, qui eſt l'équation cherchée de la Courbe DGH de viteſſes.

C'eſt pour éviter les fractions que je prends vv pour $\frac{1}{2}\, vv$, la grandeur arbitraire ab me le permettant. Voici préſentement le Problême en queſtion, en vûë de qui tout ce qui précéde à été fait.

PROBLEME.

Les quadratures étant ſuppoſées, & la loi des forces centripètes Φ *étant donnée à volonté en* x *& en conſtantes; trouver la trajectoire* ABC *qu'elles doivent faire décrire au mobile.*

SOLUT.

SOLUT. Soit OA $= a$, & de ce rayon l'arc de cercle AL $= z$, L$l = dz$; & par conſéquent N$b = xdz : a$. Soit auſſi le temps par Bb en raiſon de N$b \times$BO, (double du triangle BOb) $= xxdz : a$. Vous ſavez que ce temps multiplié par la viteſſe, c'eſt-à-dire, [ſuivant le Corollaire du Lemme précedent] par $\sqrt{(ab - \int \Phi\, dx)}$ donne l'eſpace Bb. Donc $xxdz\sqrt{(ab - \int \Phi\, dx)} : a =$ B$b = \sqrt{(dx^2 + xxdz^2 : aa)}$; d'où réſulte l'équation $dz = aacdx : \sqrt{(abx^4 - x^4 \int \Phi\, dx - aaccxx)}$, qui exprime la nature de la trajectoire cherchée ABC, dans laquelle équation c eſt une conſtante arbitraire pour rendre le tout homogène. *Ce qu'il falloit trouver.*

Vous voyez, Monſieur, que j'arrive tout d'un coup à une équation differentielle du premier degré, dans laquelle il n'y a aucun mêlange des indéterminées entr'elles; & qu'ainſi la conſtruction géométrique s'en peut aiſément déduire, les quadratures des eſpaces curvilignes étant données, & même plus commodément que Mr. NEWTON ne l'a trouvée, dans la page 127. &c. de ſes *Princ. Math.* *

Mon équation fait voir de plus, ſi la trajectoire cherchée eſt algébrique, ou non, dans quelque hypothéſe que ce ſoit des forces données. Car ſi l'intégrale de $aacdx : \sqrt{(abx^4 - x^4 \int \Phi\, dx - aaccxx)}$ ſe trouve réductible à un arc de cercle, dont le rayon ſoit à OA (a) comme nombre à nombre; la Courbe cherchée ſera néceſſairement alors algébrique. Ainſi l'hypothèſe ordinaire des forces centripètes en raiſon reciproque des quarrés des diſtances du mobile à leur centre, c'eſt-à-dire, l'hypothèſe de $\Phi = aag : xx$ changeant l'équation précédente en $dz = aacdx : \sqrt{(abx^4 + aagx^3 - aaccxx)} = aacdx : x\sqrt{(abxx + aagx - aacc)}$ qui ſe peut réduire à un tel arc de cercle; je vois tout d'un coup que vôtre courbe ABC doit être algébrique dans cette hypothèſe.

Pour voir préſentement que cette courbe ABC, dans cette hypothèſe, eſt toûjours une Section Conique, ainſi que Mr. NEWTON l'a ſuppoſé, *pag.* 55. *Coroll. I.* † ſans le démontrer; il y faut bien plus d'adreſſe: Voici comme j'en viens à bout.

* Liv. I. Sect. VIII. Prop. 41. † Liv. I. Sect. III. Prop. 13.

Afin de réduire cette valeur de dz à une formule differe tielle ordinaire d'arc circulaire, ſoit $x = aa : y$ la ſubſtitutio de cette valeur de x donnera $aacdx : x\sqrt{(abxx + aagx — aa}$ $= —acdy : \sqrt{(a^3 b + aagy — ccyy)}$ [en ſuppoſant $y = aag : 2cc —$ $= acdt : \sqrt{(a^3 b + a^4 gg : 4cc — cctt)} =$ [en ſuppoſa $cchh = ab^3 + a^4 gg : 4cc$ pour abreger] $= adt : \sqrt{(bh —}$ $= dz$; & par conſéquent $dz : a = dt : \sqrt{(hh — tt)} = (1 : h$ $\times hdt : \sqrt{(hh — tt)}$ qui eſt une differentielle d'arc de cerc (dont le rayon eſt $= h$, & le ſinus $= t$) diviſé par ſon rayo

Cela étant, puiſqu'un arc de cercle, diviſé par ſon rayon, exprime l'angle qui lui eſt oppoſé, & que, ſuivant cela, l'an gle $LOl = dz : a$; l'on aura auſſi $(1 : h) \times hdt : \sqrt{(hh —}$ pour la quantité d'un angle differentiel, qui auroit ſon rayon $= h$, & ſon ſinus $= t$. Donc, à cauſe de l'égalité de ces deux angles differentiels, les angles intégraux en ſeront auſſi égaux, ou [pour plus de généralité] l'un ſurpaſſera l'autre d'un angle conſtant. Si donc on décrit un cercle MST d'un rayon $OM = h$, & que l'angle AOL [$\int dz : a$] ſoit diminué ou augmenté d'un angle conſtant LOS pour avoir l'angle MOS [$\int((1 : h) \times hdt : \sqrt{(hh - tt)})$]; il eſt manifeſte que la per pendiculaire SP ſur AO ſera $= t$, & que de là (en retro gradant) on trouvera y, & enſuite x, ou OE, qui ſera $= 2acc$ $(aag — 2cct)$. Donc en décrivant du rayon OE l'arc EB qui coupe OL en B, ce point B ſera un de ceux de la tra jectoire ABC, que je prétends être une Section Conique: Je le démontre.

Tout Géométre attentif verra que l'angle conſtant LOS, dont on augmente ou diminue l'angle AOL, ne change point la nature de la Courbe ABC; mais ſeulement ſa ſituation, en l'avançant ou en l'arriérant autour du point O, tous les points B s'avançant ou s'arriérant ainſi dans leurs arcs EB, de même que ſi tout le plan de cette Courbe ABC tournoit avec elle autour de ce centre fixe O. Cependant, pour rendre le calcul plus facile, je vas ſuppoſer que l'angle AOL n'augmen te ni ne diminue, c'eſt-à-dire, que l'angle MOS lui eſt égal.

Soit

Soit donc [*Fig.* 2. où les mêmes lettres marquent les mêmes choſes que dans la figure précédente] perpendiculairement en O ſur A O la droite $OQ = aag : 2cc$; & du centre Q entre les aſymptotes QO, QR, une hyperbole équilatère VXZ, dont le rectangle [des coordonnées] QYX ou $QOZ = aa$; ſoit prolongée une ordonnée quelconque XY de l'hyperbole, juſqu'à-ce qu'elle rencontre le cercle MST en S, par lequel point S ſoit menée OS, ſur laquelle [prolongée, s'il en eſt beſoin] ſoit priſe $OB = XY$. Je dis que le point B ſera un de ceux de la trajectoire ABC; puiſque [*hyp.*] $OB = XY = QOZ : QY = aa : (aag : 2cc - t) = 2aacc : (aag - 2cct)$; & que la conſtruction préſente rend ABC une Section Conique, ainſi qu'on s'en convaincra, ſi l'on cherche l'équation qui exprime le rapport de ſes coordonnées OF, FB; car en les appellant x, y, on trouvera l'équation $(a^4 gg - 4c^4 hh) xx = 8aac^4 hx - a^4 ggyy + 4a^4 c^4$, qu'on ſait exprimer une Section Conique: ſavoir une Parabole, lorſque $OQ [aa : 2c] = OT [h]$; une Ellipſe, lorſque $OQ > OT$; & une Hyperbole, lorſque $OQ < OT$. *Ce qu'il falloit démontrer.* TAB. XX. N°. LXXXVI. *Fig.* 2.

Préparation à une autre Solution.

Quand à la maniere de trouver les forces centripètes, les Courbes étant données, voici un aſſez beau Théoréme, dont je trouvai autrefois la Solution, indépendamment de l'inverſe précédente: je la communiquai à Mr. DE MOIVRE, dans une Lettre du 16 Fevrier 1706, en ces termes, après avoir ſuppoſé que EPp eſt la Courbe donnée, S le centre, ou le foyer des forces centripètes, & SA une perpendiculaire ſur la tangente $A\pi$ de cette Courbe en P: voici, dis-je, en quels termes je lui écrivis. TAB. XX. N°. LXXXVI. *Fig.* 3.

„Soit tirée du centre S des forces une droite $S\pi$ infiniment „proche de SP, & qui coupe la tangente prolongée en π, „& la Courbe en p; ſoit auſſi tirée la petite perpendiculaire $p\pi$. „Suppoſant donc que le triangle PSp, qui marque le tems

 „que

„ que le mobile employe à parcourir l'élemen
„ be, ſoit conſtant, on pourra faire SA × P
„ ſavez que le diamètre de la développée en P
„ R) eſt à Pp comme Pp à $p\pi = Pp^2 : R$,
„ triangles ſemblables SAπ & $p\pi$π, on fait
„ $= p\pi\,[Pp^2 : R] : p$π. Ainſi on trouvera
„ gnement momentané de la tangente, = SP
„ $= SP \times SA^2 \times Pp^2 : SA^3 \times R$ [à cauſe de
„ $= SP : SA^3 \times R$, en ſorte que la force c
„ raiſon directe des diſtances, & en raiſon réci
„ ſée du diamètre des développées, & du cube
„ culaires ſur les tangentes, &c.

De cette maniere, la force centripète ſe tr
ment exprimée en termes tous finis.

Ce Théoréme ſert à trouver encore une aut
Probléme inverſe des forces centripètes, que je
m'en ſouviens bien] il y a environ quinze ans,
vée en *Hollande*. Il eſt vrai qu'elle renferme des
ferences; mais j'ai une maniere particuliere de l
enſuite d'intégrer l'équation, & de la réduire à
bléme précédent: voici cette autre Solution, que
vous communiquer.

TAB. XX. N°. LXXXVI. *Fig.* 1. Soient ici comme là, dans la Figure, OB = OE =
$OA = a$, $BN = dx$, $Nb = dy$, la force centrip
(par le Théoréme que je viens de démontrer) =
appellant p, la perpendiculaire menée du point C
chante en B; & r, le diamètre de la développée e
formules ordinaires donnent $p = xdy : \surd(dx^2 + d$

faire aucune differentielle conſtante, on trouve $r = 2x$
$(dx^2 dy + dy^3 + xdxddy - xdyddx)$. Donc
$x : p^3 r$, ou $\Phi = (dy^3 + dx^2 dy - xdyddx + xdxddy$

L'artifice, dont je me ſers pour ſéparer ici les ind
[ce qui ſeroit difficile autrement] conſiſte à abreger
gue formule; ce qu'on pourra faire en conſiderant la
differentielles [cela eſt arbitraire] étant faite conſtant

à parcourir les dans cette équation, n'y laiſſera que deux termes en y ourra faire S1ſant les deux autres. Or je vois que cela ſe peut facila développement faire en deux manieres, ſavoir en prenant xdy, ou $dx:x$ à $pr = Pp$ constante, quoi qu'on ait déja pris le temps xdy [SA 1 & pr 1, e:] conſtant dans le Théoréme précédent pour arriver à

Ainſi on tr proportionelle à la force centrale en P] $= SP : SA^{5} \times R$ a tangente, $= : p^{3} r$, cette formule étant la même que ſi l'on n'y eût $^{3} \times R$ [à ce rien de conſtant.

orte que la fc Si $xdy = c$, l'on aura $\Phi = (dy^{3} - xdy\,ddx) : 2c^{3}$, , & en rai i s'intégre en differentiant la conſtante xdy, qui donne oppées, & à: $+ dxdy = 0$, ou $dy = - xddy : dx$, & ſubſtituant &c. valeur de dy dans la précedente équation $\Phi = (dy^{3}$ $dyddx) : 2c^{3}$, il en proviendra $\Phi = (- dyddy -$ ce centripet: $lx) : 2ccdx$, ou $\Phi\, dx = (- dyddy - dxddx)$: is finis. dont l'intégrale eſt $\int \Phi\, dx = (- dy^{2} - dx^{2}) : 4cc \pm n$; er encore ends encore ici par n une quantité conſtante quelconque.

entripètes, On peut encore arriver autrement à cette équation en multiviron quant t $\Phi = (dy^{3} - xdyddx) : 2c^{3}$, par dx, & en la prenant par u'elle renferm es pour avoir $\Phi\, dx = dy^{3}\, dx : 2c^{3}\, [dx : 2x^{3}] - xdxdyddx$: e particulier [$- dxddx : 2xxdy^{2}$], dont l'intégrale eſt $\int \Phi\, dx =$ & de la réd t : $4xx - dx^{2} : 4xxdy^{2} \pm n = (- dy^{2} - dx^{2})$: utre Solution $dy^{2} \pm n$, comme ci-devant.

. Soit préſentement $dx : x$ conſtante. Cette autre ſuppogure, OB = On changera l'équation précédente $\Phi = (dy^{3} + dx^{2}dy -$ dy, la force $ddx + xdxddy) : 2x^{3}dy^{3}$ en $\Phi = (dy^{3} + xdxddy)$: de démontr dy^{3}, qui peut encore s'intégrer en deux manieres; mais menée du po me ſervir ſeulement de la ſeconde, ſoit cette derniere de la développ ation multipliée par dx, & diſtribuée en pluſieurs parties xdy : v ties que $\Phi\, dx = dx : 2x^{3} + dx^{2}\, ddy : 2xxdy^{3}$, dont les grales [à cauſe de $dx^{2} : xx$ conſtante] donnent $\int \Phi\, dx =$, on trouve [illegible] $1 : 4xx - dx^{2} : 4xxdy^{2} \pm n = (- dy^{2} - dx^{2})$: $dyddx$ [illegible] $xdy^{2} \pm n$, comme cy-deſſus.

$xdyddx$ + Nôtre équation differentio-differentielle étant ainſi réduite ſepare une équation differentielle ordinaire, ſi l'on s'y prend bien conſiſte à en ſuppléant les homogènes] l'on en déduira $bbdx : \sqrt{(nxx}$ en conſid $- xx$

tant faire c

$- xx\int\Phi\, dx - b^4) = dy = xdz : a$, & conſéquemment auſſi $dz = abbdx : \sqrt{(nx^4 - x^4\int\Phi\, dx - b^4 xx)}$ équation ſemblable à celle que j'ai trouvée par la premiere méthode, & de laquelle par conſéquent ſuit encore [comme de celle-là] la conſtruction univerſelle de la trajectoire, & ſa détermination aux Sections Coniques, dans l'hypothéſe particuliere des forces centripètes réciproquement proportionelles aux quarrés des diſtances du mobile au centre de ces forces.

REMARQUE.

J'ai dit ci-devant que Mr. NEWTON, après avoir démontré que les forces centrales d'un Corps, dirigées vers un des foyers d'une Section Conique quelconque décrite par ce corps, ſont toûjours entr'elles en raiſon renverſée des quarrés des diſtances de ce même corps à ce foyer, ſuppoſe l'inverſe de cette propoſition, ſans la démontrer: ſavoir que lorſque les forces centrales d'un corps qui décrit une Courbe, ſont en raiſon réciproque des quarrés des diſtances de ce corps à quelque point du plan de cette courbe, elle eſt toûjours une Section Conique, dont ce point eſt le foyer, ou un des foyers. Pour voir encore la néceſſité de la démonſtration que je viens de donner de cette inverſe, il n'y a qu'à conſiderer que de ce qu'un corps, pour ſe mouvoir ſur une Spirale Logarithmique, requiert des forces centrales en raiſon réciproque des cubes de ſes diſtances au foyer ou centre de cette courbe; ce n'eſt pas une conſéquence, qu'avec de telles forces il décrivit toûjours une telle Courbe: Puiſqu'il eſt aiſé de ſe convaincre par les formules directes des forces centrales, que ce corps auroit auſſi ces forces en cette raiſon, s'il décrivoit une Spirale Hyperbolique CFED, dont la nature fût d'avoir égaux entr'eux, ou conſtans, tous les rectangles, ou produits AB × CD, faits chacun de chacun des rayons CD de cette Spirale, par l'abſciſſe correſpondante AB de la circonference du cercle ABL, décrit du centre C de cette même Spirale hyperbolique.

TAB. XX. N°. LXXXVI. *Fig.* 4.

EXCER-

N°. LXXXVII.

EXCERPTUM
EX
CELEBERRIMI NEWTONI
Philoſophiæ Naturalis Principiis Mathematicis
LIBRO II. SECT. II.

Ex Editione prima.

Prop. X. Probl. III.

Pag. 260. *Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut Medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur, tum Medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iiſdem locis.*

TAB. XXI. Fig. 1. Sit AK planum illud plano ſchematis perpendiculare; ACK linea curva; C corpus in ipſa motum; Pag. 261 & FC*f* recta ipſam tangens in C. Fingatur autem corpus C nunc progredi ab A ad K per lineam illam ACK, nunc vero regredi per eandem lineam; & in progreſſu impediri a Medio, in regreſſu æque promoveri, ſic ut in iiſdem locis eadem ſemper ſit corporis progredientis

Ex Editione ultima.

Prop. X. Probl. III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut Medii denſitas, & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur; tum corporis velocitas & Medii reſiſtentia in locis ſingulis. Pag. 252.

Sit PQ planum illud plano ſchematis perpendiculare; PFHQ, linea curva plano huic occurrens in punctis P & Q; G, H, I, K loca quatuor corporis in hac curva ab F ad Q pergentis, & GB, HG, ID, KE ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demiſſæ, & lineæ horizontali PQ ad puncta B, C, D, E inſiſtentes; & ſint BC, CD, DE diſtantiæ ordinatarum inter TAB. XXI. Fig. 2.

tis velocitas. Æqualibus autem temporibus deſcribat corpus progrediens arcum quam minimum C G, & corpus regrediens arcum C *g*; & ſint C H, C *h* longitudines æquales rectilineæ, quas corpora de loco C exeuntia, his temporibus, abſque Medii & Gravitatis actionibus deſcriberent: & a punctis C, G, *g*, ad planum horizontale A K demittantur perpendicula C B, G D, *g d*, quorum G D ac *g d* tangenti occurrant in F & *f*. Per Medii reſiſtentiam fit ut corpus progrediens, vice longitudinis C H, deſcribat ſolummodo longitudinem C F; & per vim gravitatis transfertur corpus de F in G: adeoque lineola H F vi reſiſtentiæ, & lineola F G vi gravitatis ſimul generantur. Proinde [per Lem. X. Lib. I.] lineola F G eſt ut vis gravitatis & quadratum temporis conjunctim; adeoque [ob datam gravitatem] ut quadratum temporis; & lineola HF ut reſiſtentia & quadratum temporis; hoc eſt, ut reſiſtentia & lineola F G. Et inde reſiſtentia fit ut H F directe & F G inverſe, ſive ut H F : F G. Hæc ita ſe habent in lineolis naſcentibus. Nam in lineolis finitæ magnitudinis hæ rationes non ſunt accuratæ.

Et

ter ſe æquales. A punctis G & H ducantur rectæ G L, H N curvam tangentes in G & H & ordinatis CH, DI ſurſum productis occurrentes in L & N, & compleatur parallelogrammum H C D M. Et tempora quibus corpus deſcribit arcus G H, HI, erunt in ſubduplicata ratione altitudinum L H, N I, quas corpus temporibus illis deſcribere poſſet a tangentibus cadendo: & velocitates erunt ut longitudines deſcriptæ GH, HI directe & tempora inverſe. Exponantur tempora per *T* & *t* velocitates erunt ut $GH : T$, & $HI : t$, & decrementum velocitatis tempore *t* factum, exponetur per $GH : T - HI : t$. Hoc decrementum oritur a reſiſtentia corpus retardante & gravitate corpus accelerante. Gravitas in corpore cadente & ſpatium N I cadendo deſcribente, generat velocitatem qua duplum illud ſpatium eodem tempore deſcribi potuiſſet [ut Galilæus demonſtravit] id eſt, velocitatem $2 NI : t$; at in corpore arcum HI deſcribente, auget arcum illum ſola longitudine $HI - HN$ ſeu $MI \times NI : HI$, ideoque generat tantum velocitatem $2 MI \times NI : t \times HI$. Pag. 25[illegible] Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentia ſola oriundum, nempe $GH : T - HI : t + 2 MI \times NI : t \times HI$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $2NI : t$, Reſiſtentia erit ad Gravitatem ut $GH : T - HI : t + 2 MI \times NI : t \times HI$, ad $2 NI : t$, ſive ut $t \times GH : T - HI + 2 MI \times NI : HI$ ad $2 NI$.

Jam

Et ſimili argumento eſt *fg* ut quadratum temporis, adeoque ob æqualia tempora æquatur ipſi F G; & impulſus, quo corpus regrediens urg. 262. getur, eſt ut *hf* : *fg* Sed impulſus corporis regredientis & reſiſtentia progredientis, ipſo motus initio, æquantur, adeoque & ipſis proportionales *hf*: *fg* & HF: FG æquantur; & propterea ob æquales *fg* & F G, æquantur etiam *hf* & H F, ſuntque adeo C F, C H [vel C*h*] & C*f* in progreſſione arithmetica, & inde H F ſemidifferentia eſt ipſarum .C*f* & C F; & reſiſtentia, quæ ſupra fuit ut HF: FG, eſt ut (C*f* — CF): FG.

Eſt

Jam pro abſciſſis C B, C D, C E ſcribantur $-o, o, 2o$. Pro ornata C H ſcribatur P, & pro M I ſcribatur ſeries quælibet $Qo + Roo + So^3 +$ &c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo + So^3 +$ &c. erunt NI, & Ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c. & $P + Qo - Roo + So^3 -$ &c. reſpective. Et quadrando differentias Ordinatarum B G — C H & C H — D I, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, habebuntur arcuum G H, H I quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c; & $oo + QQoo + 2QRo^3 +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{(1+QQ)} - QRoo : \sqrt{(1+QQ)}$ & $o\sqrt{(1+QQ)} + QRoo : \sqrt{(1+QQ)}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab ordinata C H ſubducatur ſemiſumma ordinatarum B G ac D I, & ab ordinata D I ſubducatur ſemiſumma ordinatarum C H & E K, manebunt arcuum G I & H K ſagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et hæ ſunt lineolis L H & N I proportionales, adeoque in duplicata ratione temporum infinite parvorum T & t, & inde ratio $t : T$ eſt $\sqrt{(R + 3SO)} : \sqrt{R}$, ſeu $(R + \frac{3}{2}So) : R$, & $t \times GH : T - HI + 2MI \times NI : HI$, ſubſtituendo ipſorum $t : T$, GH, HI, MI, & NI valores jam inventos, evadit $3Soo\sqrt{(1+QQ)} : 2R$. Et cum 2 N I ſit $2Roo$, Re- Pag. 254.
ſiſtentia jam erit ad Gravitatem ut $3Soo\sqrt{(1+QQ)} : 2R$ ad $2Roo$, id eſt ut $3S\sqrt{(1+QQ)}$ ad $4RR$.

Eſt autem reſiſtentia ut Medii denſitas & quadratum velocitatis. Velocitas autem ut deſcripta longitudo CF directe, & tempus $\sqrt{FG}$ inverſe, hoc eſt ut CF : $\sqrt{FG}$, adeoque quadratum velocitatis ut CF*q* : FG. Quare reſiſtentia, ipſique proportionalis (C*f* — CF) : FG, eſt ut Medii denſitas & CF*q* : FG conjunctim; & inde Medii denſitas, ut (C*f* — CF) : FG directe, & CF*q* : FG inverſe, id eſt ut (C*f* — CF) : CF*q*.

Corol. I. Et hinc colligitur, quod ſi in C*f* capiatur C*k* æqualis CF, & ad planum horizontale AK demittatur perpendiculum *ki*, ſecans curvam ACK in *l*; fiet Medii denſitas ut (FG — *kl*) : CF × (FG + *kl*). Erit enim *f*C ad *k*C, ut $\sqrt{fg}$, ſeu $\sqrt{FG}$, ad $\sqrt{kl}$, & diviſim *fk* ad *k*C, id eſt C*f* — CF ad CF, ut $\sqrt{FG} - \sqrt{kl}$ ad $\sqrt{kl}$, hoc eſt [ſi ducatur terminus uterque in $\sqrt{FG} + \sqrt{kl}$] ut FG — *kl* ad *kl* + $\sqrt{FG \times kl}$, ſive ad FG + *kl*. Nam ratio prima naſcentium *kl* + $\sqrt{FG \times kl}$ & FG + *kl* eſt æqualitatis. Scribatur itaque (FG — *kl*) : (FG + *kl*) pro (C*f* — CF) : CF; & Medii denſitas, quæ fuit ut (C*f* — CF) : CF*q*, evadet ut (FG — *kl*) : CF × (FG + *kl*).

Pag. 363. Corol. II. Unde cum 2 HF & C*f* — CF æquentur, & FG & *kl* [ob rationem æqualitatis] componant 2 FG; erit 2 HF ad CF ut FG — *kl* ad 2 FG; & inde HF ad

Velocitas autem ea eſt qua cum corpus de loco quovis H, ſecundum tangentem HN egrediens, in Parabola diametrum HC & latus rectum HN*q* : NI, ſeu $(1 + QQ) : R$ habente, deinceps in vacuo moveri poteſt.

Et reſiſtentia eſt ut Medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea Medii denſitas eſt ut reſiſtentia directe & quadratum velocitatis inverſe, id eſt, ut $3S\sqrt{(1 + QQ)} : 4R^2$ directe & $(1 + QQ) : R$, inverſe, hoc eſt, ut $S : R\sqrt{(1 + QQ)}$. *Q. E. I.*

Coroll. I. Si tangens HN producatur utrinque, donec occurrat ordinatæ cuilibet AF in T: erit HT : AC æqualis $\sqrt{(1 + QQ)}$, adeoque in ſuperioribus pro $\sqrt{(1 + QQ)}$ ſcribi poteſt. Qua ratione, Reſiſtentia erit ad Gravitatem ut $3S \times$ HT ad $4RR \times$ AC, Velocitas erit ut HT : AC $\sqrt{R}$, & Medii denſitas erit ut $S \times$ AC : $R \times$ HT.

Coroll.

ad FG, hoc eſt, reſiſtentia ad gravitatem, ut rectangulum CF in FG — kl ad 4 FG *quad.*

Corol. III. Et hinc ſi curva linea definiatur per relationem inter baſem, ſeu abſciſſam AB, & ordinatim applicatam BC [ut moris eſt]; & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem; Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur: ut in Exemplis ſequentibus.

Exempl. I. Sit linea ACK ſemicirculus ſuper diametro AK deſcriptus, & requiratur Medii denſitas, quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Biſecetur ſemicirculi diameter AK in O; & dic OK, n; OB, a; BC, e; & BD, vel Bi, o: & erit DGq, ſeu OGq — ODq æquale $nn - aa - 2ao - oo$, ſeu $ee - 2ao - oo$; & radice per methodum noſtram extracta, fiet DG $= e - ao : e - oo : 2e - aaoo : 2e^3 - ao^3 : 2e^3 - a^3o^3 : 2e^5$, &c. Hic ſcribatur nn pro $ee + aa$ & evadet DG $= e - ao : e - nnoo : 2e^3 - anno^3 : 2e^5$, &c.

Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos, in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva o non extat; ſecundum, in quo quantitas illa extat unius dimenſionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium eſt, & ſic in infinitum. Et primus terminus, qui hic eſt e, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ BC inſiſtentis ad indefinitæ quantitatis initium B; ſecundus terminus,

Coroll. II. Et hinc ſi curva linea PFHQ definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam AC & ordinatim applicatam CH, [ut moris eſt] & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur, ut in exemplis ſequentibus.

Exemplum. I. Sit linea PFHQ ſemicirculus ſuper diametro PQ deſcriptus, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Biſecetur diameter PQ in A; dic AQ, n; AC, a; CH, e, & CD, o; & erit DIq, ſeu AQq — ADq $= nn - aa - 2ao - oo$, ſeu $ee - 2ao - oo$, & radice per methodum noſtram extracta, fiet Pag. 255. DI $= e - ao : e - oo : 2e - aaoo : 2e^3 - ao^3 : 2e^3 - a^3o^3 : 2e^5$ — &c. Hic ſcribatur nn pro $ee + aa$, & evadet DI $= e - ao : e - nnoo : 2e^3 - anno^3 : 2e^5$ &c.

Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos, in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva o non extat; ſecundum in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis; tertium in quo extat duarum; quartum in quo trium eſt, & ſic in infinitum. Et primus terminus, qui hic eſt e, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ CH inſiſtentis ad initium indefinitæ quantitatis o; ſecundus terminus,

Pag. 264. minus, qui hic eſt $ao : e$, denotabit differentiam inter B C & D F, id eſt, lineolam I F, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum B C I D, atque adeo poſitionem Tangentis C F ſemper determinat: ut in hoc caſu capiendo I F ad IC, ut eſt $ao : e$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hic eſt $nnoo : 2e^3$, deſignabit lineolam F G, quæ jacet inter Tangentem & Curvam, adeoque determinat angulum contactus FCG, ſeu curvaturam quam curva linea habet in C. Si lineola illa F G finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium una cum ſubſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus, qui hic eſt $anno^3 : 2e^5$, exhibet variationem curvaturæ; quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum ſerierum in ſolutione Problematum, quæ pendent a Tangentibus & curvatura Curvarum.

Præterea C F eſt latus quadratum ex C I q & I F q, hoc eſt, ex B D q & quadrato termini ſecundi. Eſtque F G + kl æqualis duplo termini tertii, & F G — kl æqualis duplo quarti. Nam valor ipſius D G convertitur in valorem ipſius il, & valor ipſius F G in valorem ipſius kl, ſcribendo Bi pro BD, ſeu $-o$ pro $+o$. Proinde cum FG ſit $- nnoo : 2e^3 - anno^3 : 2e^5$ &c. erit $kl = - nnoo : 2e^3 + anno^3 : 2e^5$, &c. Et horum terminorum ſumma eſt

minus, qui hic eſt $ao : e$, denotabit differentiam inter C H & D N, id eſt, lineolam M N, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum H C D M, atque adeo poſitionem tangentis H N ſemper determinat; ut in hoc caſu capiendo M N ad H M, ut eſt $ao : e$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hic eſt $nnoo : 2e^3$, deſignabit lineolam I N quæ jacet inter tangentem & curvam; adeoque determinat angulum contactus I H N, ſeu curvaturam quam curva linea habet in H. Si lineola illa I N finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum, tertium una cum ſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum ſerierum in ſolutione Problematum, quæ pendent a tangentibus & curvatura curvarum.

Con-

eſt $- nnoo : e^3$, differentia $- anno^3 : e^5$. Terminum quintum & ſequentes hic negligo, ut infinite minores quam in hoc Problemate conſiderandi veniant. Itaque ſi deſignetur ſeries univerſaliter his terminis $+ Qo - Roo - So^3$ &c. erit CF æqualis $\sqrt{(oo + QQoo)}$, FG + kl æqualis $2Roo$, & FG $- kl$ æqualis $2So^3$. Pro CF, FG + kl
265. kl & FG $- kl$, ſcribantur hi earum valores, & Medii denſitas quæ erat ut $(FG - kl) : CF \times (FG + kl)$, jam fiet ut $S : R\sqrt{(1+QQ)}$. Deducendo igitur Problema unumquodque ad ſeriem convergentem, & hic pro Q, R & S ſcribendo terminos ſeriei ipſis reſpondentes; deinde etiam ponendo reſiſtentiam Medii, in loco quovis G, eſſe ad gravitatem ut $S\sqrt{(1+QQ)}$ ad $2RR$, & velocitatem eſſe illam ipſam, qua cum corpus, de loco C ſecundum rectam CF egrediens, in Parabola, diametrum CB & latus rectum $(1+QQ) : R$ habente, deinceps moveri poſſet, ſolvetur Problema.

Sic in Problemate jam ſolvendo, ſi ſcribantur $\sqrt{(1 + aa : ee)}$ ſeu $n : e$ pro $\sqrt{(1 + QQ)}$; $nn : 2e^3$ pro R, & $ann : 2e^5$ pro S, prodibit Medii denſitas, ut $a : ne$ hoc eſt [ob datam n] ut $a : e$, ſeu OB : BC, id eſt, ut Tangentis longitudo illa CT, quæ ad ſemidiametrum OL ipſi AK normaliter inſiſtentem terminatur; & reſiſtentia erit ad gravitatem ut a ad n, id eſt ut OB ad circuli ſemidiametrum OK; velocitas autem erit ut $\sqrt{2BC}$. Igitur ſi corpus C, certa cum velocitate, ſecundum lineam ipſi OK parallelam, exeat de loco

Conferatur jam ſeries $e - ao : e - nnoo : 2e^3 - anno^3 : 2e^5$ — &c, cum ſerie $P - Qo - Roo - So^3$ — &c. & perinde pro P, Q, R, & S ſcribatur e, $a : e$, $nn : 2e^3$, & $ann : 2e^5$, & pro $\sqrt{(1 + QQ)}$ ſcribatur $\sqrt{(1 + aa : ee)}$, ſeu $n : e$ & prodibit Medii denſitas ut $a : ne$, hoc eſt, [ob datam
n] ut $a : e$, ſeu AC : CH, id eſt, Pag. 256.
ut Tangentis longitudo illa HT, quæ ad ſemidiametrum AF ipſi PQ normaliter inſiſtentem terminatur, & reſiſtentia erit ad gravitatem, ut $3a$ ad $2n$, id eſt, ut $3AC$ ad circuli

loco L, & Medii denſitas in ſingulis locis C ſit ut longitudo tangentis CT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo C ſit ad vim gravitas ut OB ad OK; corpus illud deſcribet circuli quadrantem LCK. *Q. E. I.*

culi ſemidiametrum PQ: velocitas autem erit ut $\sqrt{}$ CH. Quare ſi corpus, juſta cum velocitate, ſecundum lineam ipſi PQ parallelam exeat de loco F, & Medii denſitas in ſingulis locis H ſit ut longitudo tangentis HT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo H ſit ad vim gravitatis ut 3 AC ad PQ. corpus illud deſcribet Circuli quadrantem FHQ. *Q. E. I.*

Pag. 266. At ſi corpus idem de loco A ſecundum lineam ipſi AK perpendicularem egrederetur, ſumenda eſſet OB, ſeu a, ad contrarias partes centri O, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet, & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii denſitas ut $-a:e$. Negativam autem denſitatem [hoc eſt, quæ motus corporum accelerat] Natura non admittit, & propterea naturaliter fieri non poteſt ut corpus, aſcendendo ab A, deſcribat circuli quadrantem AL. Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a reſiſtente impediri.

At ſi corpus idem de loco P, ſecundum lineam ipſi QP perpendicularem egrederetur, & in arcu ſemicirculi PFQ moveri inciperet, ſumenda eſſet AC ſeu a ad contrarias partes centri A, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii denſitas ut $-a:e$. Negativam autem denſitatem, hoc eſt, quæ motus corporum accelerat, Natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non poteſt, ut corpus aſcendendo a P deſcribat circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a reſiſtente impediri.

TAB. XXI. *Fig.* 1. Exempl. II. Sit linea ALCK Parabola axem habens OL horizonti AK perpendicularem, & requiratur Medii denſitas, quæ faciat ut projectile in ipſa moveatur.

Exemplum II. Sit linea PFQ parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur Medii denſitas, quæ faciat ut Projectile in ipſa moveatur.

Ex natura Parabolæ, rectangulum ADK æquale eſt rectangulo ſub ordinata DG & recta aliqua data: hoc eſt, ſi dicantur recta illa, b; AB, a, AK, c; BC, e & BD, o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$, ſeu $ac-aa-2ao+co-oo$

Ex natura Parabolæ, rectangulum PDQ æquale eſt rectangulo ſub ordinata DI & recta aliqua data; hoc eſt, ſi dicantur recta illa b; PC, a; PQ, c; CH, e; & CD, o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$, ſeu $ac-aa-$

oo æquale eſt rectangulo b in DG; adeoque DG æquale $(ac - aa) : b + (c - 2a) o : b - oo : b$. Jam ſcribendus eſſet hujus ſeriei ſecundus terminis $(c - 2a) o : b$ pro Qo & ejus coëfficiens $(c - 2a) : b$ pro Q; tertius item terminus $oo : b$ pro Roo, & ejus coëfficiens $(1 : b)$ pro R. Cum vero plures non ſint termini, debebit quarti termini So^3 coëfficiens S evaneſcere, & propterea quantitas $S : R\sqrt{(1 + QQ)}$, cui Medii denſitas proportionalis eſt, nihil erit. Nulla igitur Medii denſitate, movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonſtravit GALILÆUS. *Q. E. I.*

TAB. XXI. Fig. 4. EXEMPL. III. Sit linea AGK Hyperbola Aſymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur Medii denſitas, quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Fig. 267. Sit MX Aſymptotos altera ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V, & ex natura Hyperbolæ, rectangulum XV in VG dabitur. Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb; & completo parallelogrammo DNXZ, dicatur BN, a; BD, o; NX, c; & ratio data VZ ad ZX, vel DN, ponatur eſſe $m : n$. Et erit DN æqualis $a - o$, VG æqualis $bb : (a - o)$, VZ æqualis $m(a - o) : n$, & GD ſeu NX — VZ — VG æqualis $c - ma : n + mo : n - bb : (a - o)$. Reſolvatur terminus $bb : (a - o)$ in ſeriem convergentem

$- 2ao + co - oo$ æquale eſt rectangulo b in DI, adeoque DI æquale $(ac - aa) : b + (c - 2a) o : b - oo : b$. Jam ſcribendus eſſet hujus ſeriei ſecundus terminus $(c - 2a) o : b$ pro Qo, tertius item terminus $oo : b$ pro Roo. Cum vero plures non ſint termini, debebit quarti coëfficiens S evaneſcere, & propterea quantitas $S : R\sqrt{(1 + QQ)}$, cui Medii denſitas proportionalis eſt, nihil erit. Nulla igitur Medii denſitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonſtravit GALILÆUS. *Q. E. I.* Pag. 257.

EXEMPLUM III. Sit linea AGK Hyperbola, Aſymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem, & quæratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea. TAB. XXI. Fig. 4.

Sit MX Aſymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V, & ex natura Hyperbolæ, rectangulum VX in VG dabitur. Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb; & completo parallelogrammo DNXZ, dicatur BN, a; BD, o; NX, c; & ratio data VZ ad ZX, vel DN, ponatur eſſe $m : n$. Et erit DN æqualis $a - o$, VG æqualis $bb : (a - o)$, VZ æqualis $m(a - o) : n$, & GD, ſeu NX — VZ — VG æqualis $c - ma : n + mo : n - bb : (a - o)$. Reſolvatur terminus $bb : (a - o)$ in ſeriem convergentem $bb : a + bb o :$ aa

gentem $bb : a + bbo : aa + bboo : a^3 + bbo^3 : a^4$, &c. & fiet GD æqualis $c - ma : n - bb : a + mo : n - bbo : aa - bbo^2 : a^3 - bbo^3 : a^4$, &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $mo : n - bbo : aa$, uſurpandus eſt pro Qo, tertius cum ſigno mutato $bbo^2 : a^3$, pro Ro^2; & quartus cum ſigno etiam mutato $bbo^3 : a^4$ pro So^3:, eorumque coëfficientes $m : n - bb :$
Pag. 268. aa, $bb : a^3$, & $bb : a^4$ ſecribendæ ſunt, in Regula ſuperiore, pro *Q R* & *S*. Quo facto, prodit medii denſitas, ut $\frac{bb}{a^4} : \frac{bb}{a^3}\sqrt{(1 - \frac{mm}{nn} - \frac{2mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4})}$ ſeu, $1 : \sqrt{(aa + mmaa : nn - 2mbb : n + b^4 : aa)}$, id eſt, ſi in VZ ſumatur VY æqualis VG, ut 1 : XY. Namque aa & $mmaa : nn - 2mbb : n + b^4 : aa$, ſunt ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad Gravitatem, quam habet XY ad YG, & velocitas ea eſt quacum corpus in Parabola pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $XYq : VG$ habente. Ponatur itaque, quod Medii denſitates, in locis ſingulis G, ſint reciproce ut diſtantiæ XY, quodque reſiſtentia, in loco aliquo G, ſi ad gravitatem, ut XY ad YG; & corpus de loco A, juſta cum velocitate emiſſum, deſcribet Hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*

Exempl. IV. Ponatur indefinite, quod linea AGK Hyperbola ſit, centro X, Aſymptotis MX, NX, ea lege deſcripta, ut conſtructo

$aa + bboo : a^3 + bbo^3 : a^4$ &c. & fiet GD æqualis $c - ma : n - bb : a + mo : n - bbo : aa - bbo^2 : a^3 - bbo^3 : a^4$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus, $mo : n - bbo : a^2$, uſurpandus eſt pro Qo; tertius, cum ſigno mutato $bbo^2 : a^3$ pro Ro^2, & quartus cum ſigno etiam mutato $bbo^3 : a^4$ pro So^3, eorumque coëfficientes $m : n - bb : aa$, $bb : a^3$, & $bb : a^4$ ſcribendæ ſunt in ſuperiore Regula pro *Q*, *R*, & *S*. Quo facto prodit Medii denſitas ut $\frac{bb}{a^4} : \frac{bb}{a^3}\sqrt{(1 + \frac{mm}{nn} - \frac{2mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4})}$, ſeu $1 : \sqrt{(aa + mmaa : nn - 2mbb : n + b^4 : a^2)}$ id eſt, ſi in VZ ſumatur VY æqualis VG, ut 1 : XY. Namque aa & $mmaa : nn - 2mbb : n + b^4 : aa$ ſunt ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet 3XY ad 2YG & velocitas ea eſt qua cum corpus in Parabola pergeret verticem G, diametrum DG & latus rectum $XYq : VG$ habente. Ponatur itaque quod Medii denſitates in locis ſingulis G ſint reciproce ut diſtantiæ XY, quodque reſiſtentia in loco aliquo G ſit ad gravitatem ut 3XY ad 2YG, & corpus de loco A, juſta cum velocitate emiſſum, deſcribet Hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*

Exemplum IV. Ponatur indefinite, quod linea AGK Hyperbola ſit, centro X, aſymptotis MX, NX, ea lege deſcripta, ut conſtructo

tructo rectangulo XZDN, cujus latus ZD ſecet Hyperbolam in G, & Aſymptoton ejus in V, fuerit VG reciproce, ut ipſius ZX, vel DN, dignitas aliqua ND^n, cujus index eſt numerus n: & quæratur Medii denſitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro BN, BD, NX, ſcribantur A, O, C reſpective, ſitque VZ ad ZX vel DN, ut d ad e, & VG æqualis $bb : DN^n$ & erit DN æqualis $A - O$, $VG = bb : (A - O)^n$, $VZ = d(A - O) : e$ & GD ſeu NX − VZ − VG æqualis $C - dA : e + dO : e - bb : (A - O)^n$. Reſolvatur terminus ille $bb : (A - O)^n$ in ſeriem infinitam $bb : A^n + nbbO : A^{n+1} + (mn + n)\, bbO^2 : 2A^{n+2} + (n^3 + 2nn + n)\, bbO^3 : 6A^{n+3}$, &c.
Pag. 269. ac fiet GD æqualis $C - dA : e - bb : A^n + dO : e - nbbO : A^{n+1} - (nn + n)\, bbO^2 : 2A^{n+2} - (n^3 + 3nn + n)\, bbO^3 : 6A^{n+3}$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $dO : e - nbbO : A^{n+1}$, uſurpandus eſt pro Qo; tertius $(nn + n)\, bbO^2 : 2A^{n+2}$ pro Ro^2; quartus $(n^3 + 3nn + n)\, bbO^3 : 6A^{n+3}$ pro So^3. Et inde Medii denſitas $S : R\sqrt{(1 + QQ)}$ in loco quovis G, fit $(n + 2) : 3\sqrt{(A^2 + }$

ddAA:

to rectangulo XZDN cujus latus ZD ſecet Hyperbolam in G & Aſymptoton ejus in V, fuerit VG reciproce ut ipſius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, cujus index eſt numerus n: & quæratur Medii denſitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro BN, BD, NX, ſcribantur A, O, C, reſpective, ſitque VZ ad XZ, vel DN, ut d ad e, & VG æqualis $bb : DN^n$, & erit DN æqualis $A - O$, $VG = bb :$ Pag. 259. $(A - O)^n$, $VZ = d(A - O) : e$ & GD ſeu NX − VZ − VG æqualis $C - dA : e + dO : e - bb : (A - O)^n$. Reſolvatur terminus ille $bb : (A - O)^n$ in ſeriem infinitam $bb : A^n + nbbO : A^{n+1} + (mn + n)\, bbO^2 : 2A^{n+2} + (n^3 + 2nn + n)\, bbO^3 : 6A^{n+3}$ ac fiet GD æqualis $C - dA : e - bb : A^n + dO : e - nbbO : A^{n+1} - (nn + n)\, bbO^2 : 2A^{n+2} - (n^3 + 3nn + n)\, bbO^3 : 6A^{n+3}$. Hujus ſeriei terminus ſecundus $(d : e - nbb : A^{n+1})\, O$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius $(nn + n)\, bbO^2 : 2A^{n+2}$, pro Ro^2, quartus $(n^3 + 3nn + n)\, bbO^3 : 6A^{n+3}$ pro So^3. Et inde Medii denſitas $S : R\sqrt{(1 + QQ)}$ in loco quovis G, fit $(n + 2) : 3\sqrt{(A^2 + ddA^2 : ee - 2dnbbA : eA^n + nnb^4 : A^{2n})}$,

 adeoque

$ddAA : ee - 2dnbbA : eA^n + nnb^4 : A^{2n}$), adeoque ſi in VZ capiatur VY æqualis $n \times$ VG, denſitas illa eſt reciproce ut XY: Sunt enim A^2 & $ddA^2 : ee - 2dnbbA : eA^n + nnb^4 : A^{2n}$ ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem in eodem loco G fit ad Gravitatem, ut $S \times XY : A$ ad $2RR$, id eſt ut XY ad $(3nn + 3n)$ VG : $(n + 2)$. Et velocitas ibidem ea ipſa eſt, qua cum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G, diametrum GD, & Latus rectum $(1 + QQ) : R$ ſeu 2XY *quad* : $(nn + n)$ VG habente. *Q. E. I.*

. . . .

adeoque ſi in VZ capiatur VY æqualis $n \times$ VG, denſitas illa eſt reciproce ut XY. Sunt enim A^2 & $ddA^2 : ee - 2dnbbA : eA^n + nnb^4 : A^{2n}$ ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem in eodem loco G fit ad gravitatem ut $3S \times XY : A$ ad $4RR$, id eſt, ut XY ad $(2nn + 2n)$ VG : $(n + 2)$. Et velocitas ibidem ea ipſa eſt quacum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G, diametrum GD & latus rectum $(1 + QQ) : R$ ſeu 2XYq : $(nn + n)$ VG habente. *Q. E. I.*

SCHOLIUM.

Eadem ratione, qua prodiit denſitas medii, ut $S \times$ AC : $R \times$ HT in Corollario primo; ſi reſiſtentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet V^n, prodibit denſitas medii ut $(S : R^{(4-n):2}) \times (AC : HT)^{n-1}$. Et propterea, ſi curva inveniri poteſt ea lege, ut data fuerit ratio $S : R^{(4-n):2}$ ad $(HT : AC)^{n-1}$, vel $S^2 : R^{4-n}$ ad $(1 + QQ)^{n-1}$; corpus movebitur in hac curva, in uniformi medio cum reſiſtentia quæ ſit ut velocitatis dignitas V^n. Pag. 26

. . . .

Quæ

Quæ

Pag. 273. TAB. XXI. *Fig.* 5. Quæ de Hyperbolis dicta ſunt facile applicantur ad Parabolas. Nam ſi XAGK Parabolam deſignet, quam recta XV tangat in vertice X, ſintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abſciſſarum XI, VX dignitates XI^n, XV^n; agantur XΓ, TG, HA, quarum XT parallela ſit VG, & TG, HA Parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, ſecundum rectam AH productam, juſta cum velocitate projectum, deſcribet hanc Parabolam, ſi modo denſitas Medii, in locis ſingulis G, ſit reciproce ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit, quacum Projectile pergeret in ſpatio non reſiſtente, in Parabola Conica, verticem G, diametrum VG deorſum productam, & latus rectum $\surd$ ($2TGq$: ($nn - n$) VG) habente. Et reſiſtentia in G erit ad vim Gravitatis, ut TG ad ($3nn - 3n$) VG : ($n - 2$). Unde ſi NAK lineam horizontalem deſignet, & manente tum denſitate Medii in A, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX, & inde datur Parabolæ vertex X, poſitio rectæ XI, & ſumendo VG ad IA, ut XV^n ad XI^n, dantur omnia Parabolæ puncta G, per quæ Projectile tranſibit.

Pag. 274.

Pag. 264. TAB. XXI. *Fig.* 5. Quæ de Hyperbolis dicta ſunt facile applicantur ad Parabolas. Nam ſi XAGK Parabolam deſignet quam recta XV tangat in vertice X, ſintque ordinatim applicatæ IA, VG, ut quælibet abſciſſarum XI, XV dignitates XI^n, XV^n; agantur XT, GT, AH, quarum XT parallela ſit VG, & GT, AH Parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, ſecundum rectam AH productam, juſta cum velocitate projectum, deſcribet hanc Parabolam, ſi modo denſitas Medii, in locis ſingulis G, ſit reciproce ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit, quacum Projectile pergeret in ſpatio non reſiſtente, in Parabola Conica verticem G, diametrum VG deorſum productam, & latus rectum $2GTq$: ($nn - n$) VG habente. Et reſiſtentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad ($2nn - 2n$) VG : ($n - 2$). Unde ſi NAK lineam horizontalem deſignet, & manente tum denſitate Medii in A, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX, & inde datur Parabolæ vertex X, & poſitio rectæ XI, & ſumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia Parabolæ puncta G, per quæ Projectile tranſibit.

SECTIO IV.

Lem. III.

Pag. 283. *Sit* P Q R r *ſpiralis quæ ſecet radios omnes* S P, S Q, S R, *&c, in æqualibus angulis. Agatur recta* P T, *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* S Q *in* T; *& ad ſpiralem erectis perpendicularibus* P O, Q O, *concurrentibus in* O, *jungatur* S O. *Dico, quod ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* P S O *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* T Q × P S *ad* P Q *quadr. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis O P Q, O Q R, ſubducantur anguli æquales S P Q, S Q R & manebunt anguli æquales O P S, O Q S. Ergo circulus, qui tranſit per puncta O, S, P, tranſibit etiam per punctum Q. Coeant puncta P & Q & hic circulus in loco coitus P Q tanget ſpiralem, adeoque perpendiculariter ſecabit rectam O P. Fiet igitur O P diameter circuli hujus, & angulus O S P in ſemicirculo rectus. *Q. E. D.*

Ad O P demittantur perpendicula Q D, S E, & linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: T Q ad P D, ut T S, vel P S, ad P E, ſeu P O ad P S. Item P D ad P Q ut P Q ad P O. Et, ex æquo perturbate. T Q ad P Q, ut P Q ad P S. Unde fit P Q*q* æqualis T Q × P S. *Q. E. D.*

Pro-

SECTIO IV.

Lemma III.

Sit P Q R r *ſpiralis, quæ ſecet radios omnes* S P, S Q, S R, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* P T, *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* S Q *in* T, *& ad ſpiralem erectis perpendiculis* P O, Q O, *concurrentibus in* O, *jungatur* S O. *Dico, quod ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* P S O *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* T Q × 2 P S *ad* P Q *quadr. erit ratio æqualitatis.* Pag.

Etenim de angulis rectis O P Q, O Q R, ſubducantur anguli æquales S P Q, S Q R, & manebunt anguli æquales O P S, O Q S. Ergo circulus, qui tranſit per puncta O, S, P tranſibit etiam per punctum Q. Coeant puncta P & Q, & hic circulus in loco coitus P Q tanget ſpiralem, adeoque perpendiculariter ſecabit rectam O P. Fiet igitur O P diameter circuli hujus, & angulus O S P in ſemicirculo rectus. *Q. E. D.*

Ad O P demitantur perpendicula Q D, S E, & linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: T Q ad P D ut T S, vel P S, ad P E ſeu 2 P O ad 2 P S. Item P D ad P Q ut P Q ad 2 P O. Et, ex æquo perturbate, T Q ad P Q ut P Q ad 2 P S. Unde fit P Q*q* æquale T Q × 2 P S. *Q. E. D.*

Pro-

Prop. XV. Theor. XI.

Pag. 284. *Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatis: Dico quod corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.*

TAB. XXI. Fig. 6. Ponantur quæ in ſuperiore Lemmate, & producatur SQ ad V, ut ſit SV æqualis SP. Temporibus æqualibus deſcribat corpus arcus quam minimos PQ & QR, ſintque areæ PSQ, QSr æquales. Et quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P, eſt reciproce ut SP*q*, & [per Lem. X. Lib. I.] lineola TQ, quæ vi illa generatur, eſt in ratione compoſita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus PQ deſcribitur, [Nam reſiſtentiam in hoc caſu, ut infinite minorem quam vis centripeta negligo,] erit TQ × SP*q* [per Lemma noviſſimum] PQ*q* × SP, in ratione duplicata temporis, adeoque tempus eſt ut PQ × √SP, & corporis velocitas, qua arcus PQ illo tempore deſcribitur, ut PQ : PQ × √SP, ſeu 1 : √SP, hoc eſt, in dimidiata ratione ipſius SP reciproce. Et ſimili argumento velocitas, qua arcus QR deſcribitur, eſt in dimidiata ratione ipſius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt, in dimidiata ratione SQ ad SP, ſive ut SQ ad √SP × √SQ; &, ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ,

Propositio XV Theorema XII.

Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatis: dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato. Pag. 275.

Ponantur quæ in ſuperiore Lemmate, & producatur SQ ad V, ut ſit SV æqualis SP. Tempore quovis, in medio reſiſtente, deſcribat corpus arcum quam minimum PQ; & tempore duplo arcum quam minimum PR, & decrementa horum arcuum ex reſiſtentia oriunda, ſive defectus ab arcubus qui in medio non reſiſtente iiſdem temporibus deſcriberentur, erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Et itaque decrementum arcus PQ pars quarta decrementi arcus PR. Unde etiam, ſi areæ PSQ æqualis capiatur area QSr, erit decrementum arcus PQ æquale dimidio lineolæ Rr, adeoque vis reſiſtentiæ & vis centripeta ſunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}$ Rr & TQ quas ſimul generant. Quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P, eſt reciproce ut SP*q*, & [per Lem. X. Lib. I.] lineola TQ, quæ vi illa generatur, eſt in ratione compoſita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus PQ deſcribitur, [nam reſiſtentiam in hoc caſu, ut infinite minorem quam vis centripeta, negligo] erit TQ × SP*q*, id eſt [per Lemma noviſſimum] $\frac{1}{2}$ PQ*q* × SP, in ratione duplicata tempo-

TAB. XXI. Fig. 6.

Pag. 276.

PSQ, QSr, eſt arcus PQ ad arcum Qr, ut SQ ad SP. Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr, ut SQ ad SP — √SP × √SQ, ſeu ½ VQ; nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima SP — √SP × √SQ ad ½ VQ fit æqualitatis. In medio non reſiſtente areæ æquales PSQ, QSr [per Theor. I. Lib. I.] temporibus æqualibus deſcribi deberent. Ex reſiſtentia oritur arearum differentia RSr, & propterea reſiſtentia eſt ut lineolæ Qr decrementum Rr, collatum cum quadrato temporis quo generatur. Nam lineola Rr [per Lem. X. Lib. I.] eſt in duplicata ratione temporis. Eſt igitur reſiſtentia ut Rr : PQq × SP. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad ½ VQ, & inde Rr : PQq × SP fit ut ½ VQ : PQ × SP × SQ, ſive ut ½ OS : OP × SPq. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt; & ob ſimilia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad ½ VQ ut OP ad ½ OS. Eſt igitur OS : OP × SPq ut reſiſtentia, id eſt, in ratione denſitatis Medii in P, & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio 1 : SP, & manebit Medii denſitas in P, ut OS : OP × SP. Detur ſpiralis, & ob datam rationem OS ad OP, denſitas Medii in P erit ut 1 : SP. In Medio igitur, cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia a centro SP, corpus gyrari poteſt in hac ſpirali. *Q. E. D.*

Pag. 285.

Coroll.

poris, adeoque tempus eſt ut PQ × √SP; & corporis velocitas, qua arcus PQ illo tempore deſcribitur, ut PQ : PQ × √SP, ſeu 1 : √SP, hoc eſt, in ſubduplicata ratione ipſius SP reciproce. Et ſimili argumento, velocitas qua arcus QR deſcribitur, eſt in ſubduplicata ratione ipſius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt in ſubduplicata ratione SQ ad SP, ſive ut SQ ad √(SP × SQ) & ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, eſt arcus PQ ad arcum Qr, ut SQ ad SP. Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad SP — √(SP × SQ) ſeu ½ VQ, nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima SP — √(SP × SQ) ad ½ VQ eſt æqualitatis. Quoniam decrementum arcus PQ ex reſiſtentia oriundum, ſive hujus duplum Rr, eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim; erit reſiſtentia ut Rr : PQq × SP. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad ½ VQ & inde Rr : PQq × SP fit ut ½ VQ : PQ × SP × SQ, ſive ut ½ OS : OP × SPq. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & ob ſimilia triangula PVQ, PSO fit PQ ad ½ VQ, ut OP ad ½ OS. Eſt igitur OS : OP × SPq ut reſiſtentia, id eſt, in ratione denſitatis Medii in P & ratione duplicata velocitatis, conjunctim. Auferatur duplicata

Pag.

plicata ratio velocitatis, nempe ratio $1 : SP$, & manebit Medii denſitas in P ut $OS : OP \times SP$. Detur ſpiralis, & ob datam rationem OS ad OP, denſitas Medii in P erit ut $1 : SP$. In Medio igitur, cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia a centro SP, corpus gyrari poteſt in hac ſpirali.

COROL. I. Velocitas in loco quovis P ea ſemper eſt, quacum corpus in Medio non reſiſtente gyrari poteſt in circulo, ad eandem a centro diſtantiam SP.

§. 286. COROL. 2. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP, eſt ut $OS : OP$; ſin diſtantia illa non datur, ut $OS : OP \times SP$. Et inde ſpiralis ad quamlibet Medii denſitatem aptari poteſt.

COROL. 3. Vis reſiſtentiæ in loco quovis P, eſt ad vim centripetam in eodem loco, ut $\frac{1}{2}$ OS ad OP. Nam vires illæ, ſunt ut lineæ Rr & TQ, ſeu ut $\frac{1}{2} VQ \times PQ : SQ$, & $PQq : SP$, quas ſimul generant, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}$ VQ & PQ, ſeu $\frac{1}{2}$ OS & OP. Data igitur ſpirali datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & vice verſa ex data illa proportione datur ſpiralis.

COROL. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac ſpirali, niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ. Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ & ſpiralis conveniet cum linea recta PS, inque hac recta corpus deſcendet ad centrum, dimidia ſemper cum velocitate, qua probavimus in ſuperiori-

COROLL. I. Velocitas, in loco quovis P, ea ſemper eſt, quacum corpus in Medio non reſiſtente gyrari poteſt in circulo, ad eandem a centro diſtantiam SP.

COROLL. II. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP eſt ut $OS : OP$; ſin diſtantia illa non datur, ut $OS : OP \times SP$. Et inde ſpiralis ad quamlibet Medii denſitatem aptari poteſt.

COROLL. III. Vis reſiſtentiæ, in loco quovis P, eſt ad vim centripetam in eodem loco, ut $\frac{1}{2}$ OS ad OP. Nam vires illæ ſunt ad invicem ut $\frac{1}{2} Rr$ & TQ, ſive ut $\frac{1}{4} VQ \times PQ : SQ$ & $\frac{1}{2} PQq : SP$, hoc eſt ut $\frac{1}{2}$ VQ & PQ, ſeu $\frac{1}{2}$ OS & OP. Data igitur ſpirali, datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & vice verſa ex data illa proportione datur ſpiralis.

COROLL. IV. Corpus itaque gyrari nequit in hac ſpirali, niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ. Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ & ſpiralis conveniet cum linea recta PS, inque hac recta corpus deſcendet ad centrum, ea cum velocitate, quæ ſit ad velocitatem,

perioribus in caſu Parabolæ [Theor. X. Lib. I.] deſcenſum in Medio non reſiſtente fieri. Unde tempora deſcenſus hic erunt duplo majora temporibus illis, atque adeo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro diſtantiis velocitas eadem eſt in ſpirali PQR, atque in recta SP, & longitudo ſpiralis ad longitudinem rectæ PS eſt in data ratione, nempe in ratione OP ad OS; tempus deſcenſus in ſpirali erit ad tempus deſcenſus in recta SP in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S, intervallis duobus datis, deſcribantur duo circuli; numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias complere poteſt, eſt ut PS:OS, ſive ut Tangens anguli, quem ſpiralis continet cum radio PS; tempus vero revolutionum earumdem ut OP:OS, id eſt, reciproce ut Medii denſitas.

TAB. XXI. *Fig.* 7. Pag. 287. Corol. 7. Si corpus, in Medio, cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia locorum a centro, revolutionem in Curva quacunque AEB circa centrum illud fecerit, & Radium primum AS in eodem angulo ſecuerit in B, quo prius in A, idque cum velocitate, quæ fuerit

tatem, qua probavimus in ſuperioribus in caſu Parabolæ [Theor. X. Lib. I.] deſcenſum in medio non reſiſtente fieri, in ſubduplicata ratione unitatis ad numerum binarium. Et tempora deſcenſus hic erunt reciproce ut velocitates, atque adeo dantur.

Coroll. V. Et quoniam in æqualibus a centro diſtantiis velocitas eadem eſt in ſpirali PQR atque in recta SP, & longitudo ſpiralis ad longitudinem rectæ PS eſt in data ratione, nempe in ratione OP ad OS, tempus deſcenſus in ſpirali erit ad tempus deſcenſus in recta SP in eadem illa data ratione, proindeque datur. Pag. ?

Coroll. VI. Si centro S, intervallis duobus quibuſcunque datis deſcribantur duo Circuli; & manentibus hiſce Circulis, mutetur utcunque angulus quem ſpiralis continet cum radio PS: numerus revolutionum quas Corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in ſpirali a circumferentia ad circumferentiam, complere poteſt, eſt ut PS:OS, ſive ut Tangens anguli illius quem ſpiralis continet cum radio PS; tempus vero revolutionum earundem ut OP:OS, id eſt, ut ſecans anguli ejuſdem, vel etiam reciproce ut Medii denſitas.

Corol. VII. Si corpus in Medio, cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia locorum a centro, revolutionem in curva quacunque AEB circa centrum illud fecerit, & Radium primum AS in eodem angulo ſecuerit in B quo prius in A, idque cum velocitate quæ fuerit TAB. XXI. *Fig.* 7.

ad

fuerit ad velocitatem ſuam primam in A reciproce in dimidiata ratione diſtantiarum a centro [id eſt ut AS ad mediam proportionalem inter AS & BS :] corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones BFC, CGD, &c. facere, & interſectionibus diſtinguet Radium AS in partes AS, BS, CS, DS, &c. continue proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut Perimetri orbitarum AEB, BFC, CGD &c. directe, & velocitates in principiis A, B, C, inverſe; id eſt ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut ſumma omnium continue proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ pergentium in infinitum ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id eſt, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, & quam proxime ut $\frac{2}{3}$ AS ad AB. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus Corporum in Mediis, quorum denſitas aut uniformis eſt, aut aliam quamcunque legem aſſignatam obſervat. Centro S intervallis continue proportionalibus SA, SB, SC &c. deſcribe circulos quotcun-

Pag. 288.

que, & ſtatue numerum revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in Medio de quo egimus, eſſe ad numerum

ad velocitatem ſuam primam in A reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum a centro [id eſt ut AS ad mediam proportionalem inter AS & BS] corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones BFC, CGD &c. facere, & interſectionibus dictinguet radium AS in partes AS, BS, CS, DS, &c. continue proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut peri-

Pag. 279.

metri orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directe, & velocitates in principiis A, B, C, inverſe, id eſt ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut ſumma omnium continue proportionalium $BS^{\frac{3}{2}}$, $AS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id eſt, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$ ſive ut $\frac{2}{3}$ AS ad AB quam proxime. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. VIII. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum denſitas aut uniformis eſt, aut aliam quamcunque legem aſſignatam obſervat. Centro S, intervallis continue proportionalibus SA, SB, SC, &c. deſcribe circulos quotcunque, & ſtatue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in Medio de quo egimus, eſſe ad tempus revolutionum inter eoſdem

rum revolutionum inter eoſdem in Medio propoſito, ut Medii propoſiti denſitas mediocris inter duos circulos, ad Medii, de quo egimus, denſitatem mediocrem inter eoſdem quam proxime; ſed & in eadem quoque ratione eſſe tangentem anguli quo ſpiralis præfinita, in Medio de quo egimus, ſecat radium A S, ad tangentem anguli quo ſpiralis nova ſecat radium eundem in Medio propoſito: Atque etiam ut ſint eorundem angulorum ſecantes, ita eſſe tempora revolutionum omnium inter circulos eoſdem duos quam proxime. Si hæc fiant paſſim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari poſſimus, quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in ſpiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo ſpiralium illarum ſingulas revolutiones eiſdem ab invicem intervallis diſtare; iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum ſpirali ſuperius deſcripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi ſpiralibus peragantur.

Prop. XVI. Theor. XII.

Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut dignitas aliqua diſtantiæ locorum a centro, ſitque vis centripeta reciproce ut diſtantia in digni-

eoſdem in Medio propoſito, ut Medii propoſiti denſitas mediocris inter hos circulos ad Medii, de quo egimus, denſitatem mediocrem inter eoſdem proxime: ſed & in eadem quoque ratione eſſe ſecantem anguli quo ſpiralis præfinita, in Medio de quo egimus, ſecat radium A S, ad ſecantem anguli quo ſpiralis nova ſecat radium eundem in Medio propoſito: atque etiam ut ſunt eorundem angulorum tangentes ita eſſe numeros revolutionum omnium inter circulos eoſdem duos quam proxime. Si hæc fiant paſſim inter circulos binos continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari poſſimus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Coroll. IX. Et quamvis motus excentrici in ſpiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo ſpiralium illarum ſingulas revolutiones iiſdem ab invicem intervallis diſtare, iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum ſpirali ſuperius deſcripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi ſpiralibus peragantur.

Prop. XVI. Theor. XIII.

Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta reciproce ut dignitas qualibet ejuſdem diſtan- Pag. 3

gnitatem illam ducta: Dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.

B. I. 6. Demonſtratur eadem methodo cum propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in P ſit reciproce ut diſtantiæ SP dignitas quælibet SP^{n+1}, cujus index eſt $n+1$; colligetur ut ſupra, quod tempus, quo corpus deſcribit arcum quemvis PQ,

289. erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & reſiſtentia in P, ut $Rr : PQq \times SP^{n}$, ſive ut $\frac{1}{2}n\,VQ : PQ \times SP^{n} \times SQ$, adeoque ut $\frac{1}{2}n\,OS : OP \times SP^{n+1}$. Et propterea denſitas in P eſt reciproce ut SP^{n}.

diſtantiæ: Dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Demonſtratur eadem methodo, TAB. XXI. Fig. 6. cum propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in P ſit reciproce ut diſtantiæ SP dignitas quælibet SP^{n+1}, cujus index eſt $n+1$; colligetur ut ſupra, quod tempus, quo corpus deſcribit arcum quemvis PQ, erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & reſiſtentia in P, ut $Rr : PQq \times SP^{n}$, ſive ut $(1-\frac{1}{2}n)\,VQ : PQ \times SP^{n} \times SQ$, ideoque ut $(1-\frac{1}{2}n)\,OS : OP \times SP^{n+1}$, hoc eſt, ob datum $(1-\frac{1}{2}n)\,OS : OP$, reciproce ut SP^{n+1}. Et propterea, cum velocitas ſit reciproce ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, denſitas in P erit reciproce ut SP.

Corol. I. Reſiſtentia eſt ad vim centripetam ut $(1-\frac{1}{2}n)$ OS ad OP.

Corol. II. Si vis centripeta ſit reciproce ut SP *cub.* erit $1-\frac{1}{2}n = 0$; ideoque reſiſtentia & denſitas medii nulla erit, ut in Propoſitione nona Libri primi.

Corol. III. Si vis centripeta ſit reciproce ut dignitas aliqua radii, cujus index eſt major numero 3, reſiſtentia affirmativa in negativam mutatur.

N°. LXXXVIII.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De Monſieur BERNOULLI,

Ecrite de Baſle *le* 10 *Janvier* 1711, *touchant la maniere de trouver les forces centrales dans des milieux reſiſtans, en raiſons compoſées de leurs denſités & des puiſſances quelconques des viteſſes du mobile.*

LEMME.

Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences de Paris. 1711 pag. 47. Edit. de Paris. pag. 59. Edit. de Hollande.

UN *Corps pouſſé par une force uniforme (comme la peſanteur) appellée* P, *parcourant un eſpace quelconque* S *en commençant au repos, dans le temps* T : *je dis que ce tems ſera exprimé par* $\sqrt{(2S:P)}$.

DEMONSTRATION.

Soit V la viteſſe acquiſe à la fin du temps T; l'on aura $dS : V = dT$, ou $P\,dS : V = P\,dT = dV$: Et par conſéquent $P\,dS = V\,dV$. Donc $PS = \frac{1}{2} VV$, & $V = \sqrt{2PS}$; ce qui étant ſubſtitué en $dS : V = dT$, donnera $dS : \sqrt{2PS} = dT$, & [en intégrant] $\sqrt{(2S:P)} = T$. *Ce qu'il faloit démontrer.*

PROBLEME.

Trouver la force centrale requiſe, pour que le mobile décrive une Courbe donnée, dans un milieu dont les denſités varient ſelon une loi donnée, & qui reſiſte au mobile en raiſon compoſée des denſités, & des viteſſes élevées à quelque dignité que ce ſoit.

SOLU-

SOLUTION.

Soit A le centre des forces dans la courbe donnée CFK; AC, ou AF $= x$, FB $= dx$, CB $= dy$, CF $= ds$, $v =$ à la viteſſe du mobile en C, $dt =$ au tems pour parcourir CF, la force centrale en C $= f$, le rayon de la développée au point C $= r$, $n =$ à la dignité ou à la puiſſance de la viteſſe, $z =$ à la denſité au point C, $c =$ au nombre de l'unité, c'eſt-à-dire, $lc = 1$: outre cela ſoient p, q, des grandeurs données en x, y, & en conſtantes, leſquelles grandeurs p, q, ſeront déterminées ci-après. TAB. XX. N°. LXXXVIII.

Tout cela étant ainſi, je reſous la force centrale [f] en deux, ſuivant les directions de la tangente EC & de ſa perpendiculaire Ee : la premiere ſe trouve $= fdx : ds$, & la ſeconde $= fdy : ds$. Or ce n'eſt qu'en vertu de celle-ci, que le mobile eſt contraint de quitter la tangente CF, pour ſe trouver au point e de la Courbe : ſi bien que voilà une force, au commencement uniforme, qui fait deſcendre le mobile de la valeur de Ee, du point E en e, dans le temps dt qu'il pourroit parcourir CE, CF, ou Ce; ces trois grandeurs ſont cenſées égales, à cauſe de leurs differences infiniment plus petites qu'elles. Donc, par le Lemme précédent, en ſubſtituant pour S la petite ligne Ee qui eſt $ds^2 : 2r$, & pour P la force $fdy : ds$ ſelon cette perpendiculaire à la courbe, dt pour T; l'on aura ici $\sqrt{(ds^2 : frdy)} = dt = ds : v$; ce qui donne $f = vvds : rdy$.

Cette valeur de f étant ainſi trouvée, ſi on la ſubſtitue dans la précédente force $fdx : ds$, ſuivant la tangente EC, l'on aura cette force $fdx : ds = vvdx : rdy$, à quoi il faut ajoûter ou rabattre [ſelon que le mobile monte en s'éloiguant du centre A, ou deſcend en s'en approchant] la force de la reſiſtance du milieu, laquelle eſt [*hyp.*] zv^n, pour avoir la force abſoluë avec laquelle le mobile eſt retiré en montant, ou pouſſé en deſcendant. Cette force abſoluë ſuivant

vant EC ſera donc $vvdx : rdy \pm zv^{n}$, laquelle étant multipliée par dt ou $ds : v$, produit $vdsdx : rdy \pm zv^{n-1} ds = -dv$ élement de la viteſſe; d'où il réſulte $dv : v + dsdx : rdy \pm v^{n-2} zds = 0$, ou bien [à cauſe que la rélation de dx, dy, ds, r, z, eſt donnée en x, en y, & en conſtantes, ſi l'on prend $p = ds : rdy$ & $qdx = zds$] $dv : v + pdx \pm v^{n-2} qdx = 0$. Il s'agit d'ôter la lettre v de cette derniere équation; ce que je fais de la maniere, dont je me ſuis ſervi dans les *Actes de Leipſic* de 1697. pag. 115,* en ſuppoſant $v = M \times N$, laquelle valeur de v étant introduite avec ſa difference dans la derniere équation précédente, la change en $dM : M + dN : N + pdx \pm M^{n-2} \times N^{n-2} \times qdx = 0$. Pour déterminer préſentement M & N, je fais $dM : M + pdx = 0$, & par conſéquent auſſi $dN : N \pm M^{n-2} \times N^{n-2} \times qdx = 0$: La premiere ſuppoſition donne $lM = -\int pdx \times lc$, d'où réſulte $M = c^{-\int pdx}$; & l'autre après la ſubſtitution de cette valeur de M, donne $N^{1-n} dN = \mp c^{(2-n)\int pdx} qdx$, dont l'intégrale eſt $\frac{1}{2-n} N^{2-n} = \pm \int c^{(2-n)\int pdx} qdx$ laquelle donne $N = \sqrt[2-n]{((\mp 2 \pm n) \int c^{(2-n)\int pdx}) qdx}$. Ainſi en multipliant ces valeurs de M, N, l'une par l'autre, l'on aura $M \times N$; ou $v = c^{-\int pdx} \sqrt[2-n]{((\mp 2 \pm n) \int c^{(2-n)\int pdx} qdx)}$. Donc en ſubſtituant ſon quarré dans l'équation $f = vvds : rdy = pvv$ trouvée ci-deſſus, l'on aura enfin la force centrale cherché $f = pc^{-\int pdx} \times \sqrt[1-\frac{1}{2}n]{((\pm 2 \mp n) \int c^{(2-n)\int pdx} qdx)}$; ſe ſouvenant toûjours que les ſignes ſupérieurs ſont pour le mobile montant, & les inférieurs pour le deſcendant.

* Cy-deſſus. N°. XXXV. pag. 175, 176.

On

On voit qu'il n'entre dans cette expreſſion que des quantités données en x, y, & en conſtantes, ſans la conſideration du temps, que l'on peut préſentement déterminer fort aiſément, puiſque $dt = ds : v$.

REMARQUE.

I. L'utilité qu'on peut retirer de tout cela, c'eſt d'éviter quelques mépriſes qui ſont échappées à Mr. NEWTON, dans l'application qu'il a faite, *pag.* 265 † de ſa Solution du *Probl. III.* *pag.* 260 *, au cercle ACK dans ſes *Princ. Math.* Cette mépriſe conſiſte, en ce qu'après avoir mené du centre O le rayon OC, à volonté, dans le quart de cercle vertical OLCK, & y avoir fait CB perpendiculaire en B ſur le diamètre horizontal AK, Mr. NEWTON dit dans cette *page* 265, † que pour qu'un Corps C, de peſanteur conſtante, pût décrire en l'air le quart de cercle LCK en tombant de L vers K [il ne croit pas que ce Corps le pût décrire en montant,] la réſiſtance de ce milieu devroit être à la peſanteur de ce mobile en chaque point C, comme OB à OK, & que ſa viteſſe en ce point C ſeroit alors en raiſon de $\sqrt{(2 \times BC)}$ ce qui implique une manifeſte contradiction, que je démontre ainſi. TAB. XXI. N°. LXXXVII. *Fig.* 1.

Soit nommée R la réſiſtance du milieu; P, la peſanteur du mobile; & Π, la force que cette peſanteur exerce ſuivant chaque tangente en chaque point C. On ſait que $P : \Pi = OC$, ou $OK : OB$. Si donc, ſelon Mr. NEWTON, $R : P = OB : OK$. L'on auroit [en raiſon ordonnée] $R : \Pi = OB : OB$, c'eſt-à-dire, $R = \Pi$. Par conſéquent la reſiſtance R du milieu ôteroit autant d'accélération au mobile, que la force Π de ſa peſanteur P lui en donneroit : & conſéquemment auſſi la viteſſe de ce mobile ſeroit ici toûjours la même & uniforme, au lieu que Mr. NEWTON la

† Cy-deſſus pag. 481. * pag. 487.

[illegible]ble en raiſon de $\sqrt{(2 \times BC)}$. *Ce qui eſt la con-* [illegible] *je j'avois à démontrer.*

[illegible]médier à ce défaut, je dis qu'il faut ici $R : P =$ [illegible] $2 \times OK$. Car la Solution précedente, où j'ai [illegible]r la viteſſe du mobile en C, r pour le rayon de [illegible]pée en ce point, ds pour l'élement CG de la [illegible]elconque nommée LCK, de l'extrémité G duquel [illegible] $= dy$ perpendiculaire en E ſur $CB = x$; f pour [illegible]r du mobile, & zv^n pour la réſiſtance du milieu: [illegible]nteur, dis-je, avec cette réſiſtance, ayant donné fdx: [illegible] $dx : rdy$ avec $vvdsdx : rdy \pm zv^n ds = -$ [illegible] la premiere deſquelles égalités reſulte $vv = frdy$: [illegible]ſtituée dans la ſeconde, rend $fdx \mp zv^n ds =$ [illegible] & ce cas-ci rendant $f = P$, $r = OC$, $dy : ds$ [illegible] $GC = BC : OC$, & $zv^n = R$; l'on y aura [illegible] $\times OC \times BC : OC = P \times BC = P \times x$, & P [illegible] $ds = - vdv$. Or [à cauſe de P conſtante] [illegible] x donne $vdv = \frac{1}{2} P \times dx$. D'où l'on aura pa- [illegible] ici $P \times dx \pm R \times ds = - \frac{1}{2} P \times dx$, d'où ré- [illegible] $= \mp 2ds : 3dx = \mp 2CG : 3CE = \mp$ [illegible] $OB = \mp 2OK : 3OB$; c'eſt-à-dire, $R : P =$ [illegible] $2 \times OK$. *Ce qu'il faloit encore démontrer.*

[illegible] NEWTON s'eſt encore mépris dans ſa *Prop. XVI.* [illegible] dans laquelle il dit, que ſi un Corps tiré par des [illegible] meut [illegible] out des [illegible] ques n [illegible] les ré- [illegible] es; ce [illegible] le, ou [illegible] t : Je [illegible] n'eſt [illegible] vraye.

vraye que dans le cas de $n = 1$, qui eſt celui de la *Prop. XV.* qui précède celle-ci.

Car en prenant x, pour chacun des rayons de la Spirale ; h, pour la ſécante de ſon angle conſtant, & par tout le même avec chacun de ces rayons ; l'unité, pour le Sinus total ; c, pour le nombre dont le Logarithme eſt l'unité ; f, pour chacune des forces centrales du mobile, tendantes au centre de la Spirale : v, pour la viteſſe de ce mobile ; R, pour la réſiſtance du milieu, & D, pour la denſité qui en fait partie ; ſi l'on ſuppoſe avec Mr. NEWTON $D = 1 : x^n$ & $R = mvv \times D$, on trouvera ſuivant mon Analyſe qu'il faudroit $f = x^{-3} \times c^{\mp 2mhx^{1-n} : (1-n)}$ & non pas $f = 1 : x^{n+1}$ comme Mr. NEWTON le dit, pour faire ici décrire au mobile une Spirale Logarithmique. On verra de là que bien loin que $f = 1 : x^{n+1}$ ſoit la force ici requiſe, cette force ne ſauroit même être égale à aucune puiſſance de x, ſi ce n'eſt dans la ſuppoſition de $n = 1$. Je trouve auſſi que les viteſſes ſeroient ici $v = x^{-1} \times c^{\mp mhx^{1-n} : (1-n)}$ & qu'il y faudroit $R : f = m : x^{n-1}$. Le ſupérieur du double ſigne $\mp$ eſt par tout ici pour le cas d'aſcenſion, & l'inférieur pour celui de deſcente. On peut multiplier l'expreſſion de f par $c^{+2mha^{1-n} : (1-n)}$ & celle de v par $c^{+mha^{1-n} : (1-n)}$.

III. Il eſt encore à remarquer, que la *Prop. XV. pag.* 284 * de Mr. NEWTON, ſouffre une plus grande généralité que ne porte ſon énoncé : Car au lieu de cette reſtriction, [qu'il y fait] *Sitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatis ;* On peut dire, *Sitque vis centripeta, in quacumque multiplicata ratione denſitatis, majore tamen quam triplicata, ſi mobile aſcendit, & minore, ſi deſcendit.* En effet, ſi l'on prend, non pas 2, comme fait Mr. NEWTON, mais en général k pour l'expoſant

† Ci-deſſus, pag. 495.

de la puiſſance de la denſité, & conſéquemment $f = x^{-}$ le reſte demeurant comme ci-deſſus, *Art.* 2. On trouve par mon Analyſe $D = (3-k) : \mp 2mhx$, c'eſt-à-dire non ſeulement que la denſité D doit être ici en raiſon réciproque des diſtances [x] du mobile au centre de la Spirale, mais encore que $(3-k) : \mp 2mh$ doit être un nombre affirmatif, afin que la denſité D ſoit poſſible; C'eſt pourquoi ſi le mobile monte, k doit être plus petit que 3. On trouvera auſſi en général par mon Analyſe la raiſon de la réſiſtance R à la force f, ſavoir $R : f = 3-k : \mp 2h$. Et que la viteſſe v eſt proportionelle à $D^{(k-1):2}$. C'eſt ainſi qu'on verra que Mr. NEWTON n'a point donné aſſez d'étendue à ſa *Prop. XV. pag.* 284. * & qu'il y pourroit dire, *in qualibet multiplicata ratione*, au lieu de dire ſeulement, [comme il fait] *in duplicata ratione*: mais toûjours avec la reſtriction mentionnée de k plus grand ou plus petit que 3.

IV. Il ſuit du précédent *Art.* 3. que ſi $k = 3$, la denſité D [$(3-k) : \mp 2mhx$] feroit nulle, les forces centrales f [x^{-k}] $= x^{-3} = 1 : x^3$. D'où l'on voit que ces forces $f = x^{-k}$, qui dans le précédent *Art.* 3. feroient décrire au mobile une Spirale Logarithmique, malgré la réſiſtance R [$mvvD$] du milieu, la lui feroient encore décrire dans le cas où $3 = k$ rendroit la denſité D [$(3-k) : \mp 2mhx$] nulle, & ces forces $f = x^{-3}$; c'eſt-à-dire, dans un eſpace ſans réſiſtance, tel qu'on ſuppoſe d'ordinaire le vuide, tant que ces forces [f] feroient réciproquement proportionnelles aux cubes [x^3] des diſtances [x] de ce mobile au centre, ou au pole de la Spirale: vérité que nous ſavons d'ailleurs, démontrée même par Mr. NEWTON dans ſes *Princ. Math. pag.* 47. Ce qui doit donner encore un fort grand poids à tous mes raiſonnemens contre lui.

* Cy-deſſus pag. 495.

ADDITION

ADDITION

DE Mr. NICOLAS BERNOULLI,

Neveu de l'Auteur de ce Mémoire-ci.

AYant trouvé par l'application des égalités $vv = frdy : ds$ & $z = (fdx + vdv) : \mp ds$ [de la vérité desquelles je ſuis entiérement convaincu] au cas particulier du demi-cercle rapporté par Mr. NEWTON, *pag.* 263 * de ſes *Princ. Math.* qu'elles n'étoient pas conformes à la Solution de cet Auteur ; & voyant encore l'abſurdité manifeſte qui réſulte quand on ſuppoſe la réſiſtance à la force centrale comme OB : à OK. J'ai jugé qu'il y avoit néceſſairement quelque mépriſe, dans le raiſonnement de Mr. NEWTON; parce que je n'en trouvois aucune dans ſon calcul. J'ai donc été curieux de chercher cette mépriſe; & en examinant avec ſoin ſa Solution générale, j'en ai trouvé l'origine : cette mépriſe eſt dans le *Coroll. III. pag.* 263. à l'endroit où cet Auteur dit *Et hinc ſi curva linea definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam* AB, *&* *ordinatim applicatam* BC; *& valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur.* A cela près, j'ai trouvé cette ſolution de Mr. NEWTON fort exacte.

C'eſt cette méthode de changer les quantités indéterminées & variables en ſuites convergentes, & de prendre les termes de cette ſuite pour leurs différentielles reſpectives, ſavoir le ſecond terme pour leur différentielle du premier degré, le troiſieme terme pour leur differentio-différentielle, le quatrieme terme pour leur differentielle du troiſieme degré, &c. C'eſt, dis-je, cette méthode, qui a conduit Mr. NEWTON à des ſolutions fauſſes, dans l'exemple dont je viens de parler, & dans les ſuivans. Car cette maniere de prendre les différentielles, laquelle eſt preſcrite auſſi par cet Auteur dans le *Scholium* qui eſt à la fin de ſon Traité *De Quadraturis*, n'eſt bonne que pour les differentielles du premier degré. Pour ce qui eſt des différentielles d'un degré plus élevé, elles ne ſont pas exprimées par les termes de ces ſuites convergentes, leſquels ſont ſeulement proportionels & non pas égaux à ces différentielles, comme on le peut voir par l'exemple qu'il donne dans ce *Scholium.*

* Ci-deſſus pag. 484.

Il s'agit dans cet exemple de différentier Z^n. Pour cela Mr. N[illegible]TON dans ce Scholie prend $(z+o)^n$ pour z^n, & change ce bi[illegible] $(z+o)^n$ en cette ſuite $z^n + nz^{n-1}o + \frac{nn-n}{2}z^{n-2}oo + \frac{n^3-3nn}{6}$[illegible] $z^{n-3}o^3$ + &c. dont il prend le ſecond terme $nz^{n-1}o$ pour la d[illegible]rentielle de z^n, le troiſieme $\frac{nn-n}{2}z^{n-2}oo$ pour ſa differentio-diff[illegible]tielle, le quatrieme $\frac{n^3-3nn+2n}{6}z^{n-3}o^3$, pour ſa differentielle du [illegible]ſieme degré, & ainſi de ſuite ; Au lieu qu'en ſuivant ſa propre R[illegible] pour differentier, qu'il a donnée au commencement de ſon même T[illegible]té *De Quadraturis*, & en ſuppoſant o [$\dot{z}$ ou dz] conſtante, il auroit t[illegible]vé que la differentielle du ſecond degré de z^n eſt $(nn-n)z^{n-2}o$[illegible] que celle du troiſiéme eſt $(n^3-3nn+2n)z^{n-3}o^3$, &c.

Ainſi dans notre exemple du demi-cercle de la *page* 263. &c. [illegible] differentiant $\sqrt{(nn-aa)}$, qui eſt la valeur de l'ordonnée BC = [illegible] au lieu de la ſuite $e - ao : e - nnoo : 2e^3 - anno^3 : 2e^5$ — &c. Mr. Newton, on trouvera $e - ao : e - nnoo : e^3 - 3anno^3 :$ [illegible] — &c. D'où l'on tire $Q = a : e$, $R = nn ; e^3$, $S = 3ann :$ [illegible] leſquelles valeurs de Q, R, S, étant ſubſtituées, on trouvera $S\sqrt{(1+QQ}$[illegible] $2RR = \frac{3ann}{e^5}\sqrt{(1+aa:ee)} : \frac{2n^4}{e^5} = \frac{3ann}{e^6}\sqrt{(ee+aa)} : \frac{2n^4}{e^6} =$ $3an^3 . 2n^4 = 3a : 2n = 3 \times OB : 2 \times OK$. C'eſt-à-dire que la r[illegible]ſiſtance eſt à la force centrale comme 3 OB eſt à 2 OK, conformé[illegible] à ce que mon Oncle a trouvé.

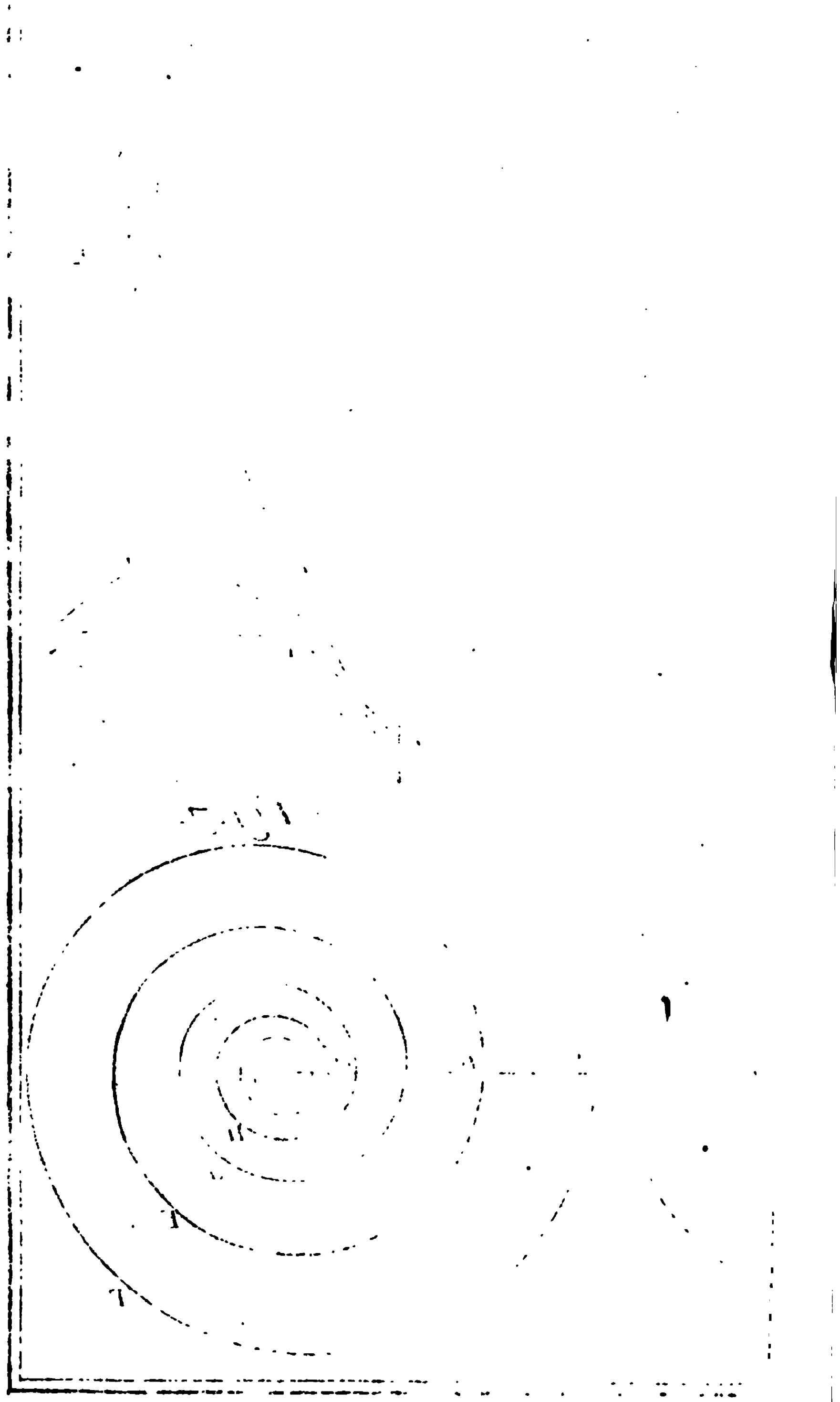
En uſant de la même correction dans les exemples 3 & 4 *pag.* 268, 2[illegible] On trouvera que la réſiſtance eſt à la force centrale dans l'exemple 3,
Tab. XXI. N°. LXXXVII. *Fig.* 4. comme $3 \times XY$ à $2 \times YG$, au lieu de XY à YG ; & dans l'exemple 4, comme XY à $(2nn+2n)VG : (n+2)$, au lieu de XY à $(3nn+3n)VG : (n+2)$. Tout cela ſe trouve auſſi préciſément par les formules $vv = frdy : ds$, & $z = (fdx + vdv) : \mp ds$[illegible]

ANGULO


p. 510.
D
G
g

[illegible]





Nº. LXXXIX.

IGULORUM ARCUUMQUE

CTIO INDEFINITA,

ormulam univerſalem expreſſa, ſine ſerierum auxilio: hinc deducta æquationum angularium promta formatio;

Autore Joh. BERNOULLI.

ctis hiſce Anni 1701. pag. 170. & ſeqq. * tradidi ſum Circuli arcum in partes quotcunque ſecandi, vel aultiplicandi, ope quarundam ſerierum, quæ quidem, nerus diviſionis vel multiplicationis eſt integer & affir- s, abrumpuntur, terminoſque relinquunt plures paucio- pro magnitudine illius numeri; Problema quippe, in ibus, ſemper algebraicum magis minuſve compoſitum : cum vero indefinite conceptum tranſcendens ſit, & mata tranſcendentia per æquationes ex quantitatibus finitis conſtantes, ſolvi non poſſint, niſi ea tantum quæ adraturam hyperbolæ, vel ad logarithmos reducuntur, te quæ admittunt æquationes percurrentes, ſeu, ut magno BNITIO vocantur, exponentiales, quantitatibus ſcilicet s, ſed dimenſionibus indeterminatis conſtantes; hinc prima e impoſſibile videtur, aliter, quam per ſeriem, determi- arcuum angulorumque ſectionem indefinitam; ſiquidem ctio quadraturarum circuli & hyperbolæ ad ſe invicem dum ſit inventa, imo fere a Geometris pro impoſſibili eatur. *Acta Erudit. Lipſ. 1712. Jun. pag. 274.*

Verum conſideret B. Lector, quæ in *Actis* Anni 1703. pag.

31.

* Supra Nº. LXIX. pag. 386.

31. & in *Memorab. Acad. Reg. Scient.* pag. 297. Edit. Pariſ. * a me ſunt oſtenſa de Sectore circuli habendo pro Logarithmo imaginario, poſtquam docuiſſem generalem methodum integrandi differentialium fractiones rationales, vel abſolute, vel ſuppoſita quadratura circuli, hyperbolæ, aut utriuſque. Obſcurum non erit, quomodo ea nunc ad præſentem uſum ſint vocanda, ut nimirum exhibeatur æquatio finita, qamvis *percurrens*, pro angulorum ſectione indefinita. Includet illa quidem quantitates imaginarias, ſeu impoſſibiles; ſed hæ ipſæ, in caſu quolibet particulari, evaneſcunt, & ſic quæ per ſe ſunt impoſſibilia, inſerviunt tamen ad inveniendum quod eſt poſſibile, & ad ſcopum noſtrum facit; idque levi & extemporanea quantitatum ſubſtitutione; ſicuti ex jam dicendis patebit.

Sit radius circuli $= 1$; arcus indeterminatus $= A$; cujus multiplex aut ſubmultiplex quivis $nA = B$; ſitque tangens ipſius A $= x$ & tangens ipſius $B = y$. Notum eſt ex calculo differentiali eſſe $dA = dx : (xx + 1)$ & $dB = dy : (yy + 1)$; cum igitur, per hyp. $nA = B$, erit quoque (ob numerum conſtantem n) $ndA = dB$: hoc eſt $ndx : (xx + 1) = dy : (yy + 1)$ ſeu multiplicando utrumque per $2\sqrt{-1}$ [quod ita facio, ut poſtea reſolvere poſſim in differentiales logarithmorum, licet impoſſibilium] erit $2ndx\sqrt{-1} : (xx + 1) = 2dy\sqrt{-1} : (yy + 1)$; quæ ergo reſoluta, ſicuti docui in locis citatis, dabunt hanc æqualitatem $ndx : (x - \sqrt{-1}) - ndx : (x + \sqrt{-1}) = dy : (y - \sqrt{-1}) - dy : (y + \sqrt{-1})$ in differentialibus logarithmicis expreſſam: ſumtis itaque integralibus prodit æquatio inter logarithmos $nl(x - \sqrt{-1}) - nl(x + \sqrt{-1}) = l(y - \sqrt{-1}) - l(y + \sqrt{-1})$ qui redacti ad numeros, ut moris eſt, fiet $\left(\frac{x - \sqrt{-1}}{x + \sqrt{-1}}\right)^n = \frac{y - \sqrt{-1}}{y + \sqrt{-1}}$, adeoque inſtituta multiplicatione per crucem, $(x - \sqrt{-1})^n (y + \sqrt{-1}) = (x + \sqrt{-1})^n . (y - \sqrt{-1})$;

quæ

* Supra N°. LXX. pag. 400.

quæ eſt æquatio univerſalis, cuilibet arcui multiplicando, vel dividendo, pro lubitu inſerviens; nec obſtat quod $\sqrt{-1}$ quantitas impoſſibilis in illa reperiatur: ea enim in applicatione ad ſpeciale quodlibet exemplum reperietur in ſingulis æquationis terminis, & ideo per diviſionem tolletur.

Hoc interim notari velim, quod, ubi n ſignificat numerum parem, valor ipſius y repertus exprimat tangentem, non ipſius arcus quæſiti B, ſed ejus complementi ad quadrantem: cujus rei ratio manifeſta eſt ex integratione differentialium logarithmorum.

Ceterum ex noſtra univerſali æquatione $(x - \sqrt{-1})^n (y + \sqrt{-1}) = (x + \sqrt{-1})^n (y - \sqrt{-1})$ ſi attente perpendatur, fluit regula generaliſſima pro exprimenda tangente arcus B cujuſcunque multipli ſubmultiplive n ipſius dati A, & quidem mirabili facilitate & ſimplicitate. Regula autem ita habet: *Elevetur* x + 1 *ad poteſtatem* n *& ex terminis alternis, cum ſignis alternatim variantibus, formetur fractio, ita nempe ut numerator conſtet primo, tertio, quinto, &c. denominator vero ſecundo, quarto, ſexto, &c.: fractio quæ inde emergit, exprimet tangentem quæſiti arcus* B, *ſi ſcilicet* n *ſit numerus impar; complementi vero ejuſdem, ſi* n *ſit par.*

EXEMPL. I. Si $n = 4$. Sumatur poteſtas quarta ipſius $x + 1$, & erit $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6xx + 4x + 1$ ex cujus terminis alternatim excerptis, cum variantibus ſignis, formetur fractio in hunc modum $(x^4 - 6xx + 1):(4x^3 - 4x)$; dico ob paritatem numeri n, fore hanc fractionem = tang. complementi arcus B ſeu $4A$: adeoque converſo numeratore in denominatorem, & viciſſim, haberi $(4x^3 - 4x):(x^4 - 6xx + 1)$ pro tangente ipſius arcus B ſeu quadrupli arcus A.

EXEMPL. II. Si $n = 5$. Termini $(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$, diſponantur, uti dictum, in fractionem $(x^5 - 10x^3 + 5x):(5x^4 - 10xx + 1)$; hæcque erit, ob imparem numerum n, tangens ipſius arcus B, ſeu quintupli A.

Exempl. III. Si $n = 6$. Ex terminis $(x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15xx + 6x + 1)$, ſumti pares pro numeratore, & impares pro denominatore, (propter paritatem numeri n) conſtituent fractionem $(6x^5 - 20x^3 + 6x) : (x^6 - 15x^4 + 15xx - 1)$ = tangenti arcus B, ſeu ſextupli A.

Ibid. Jul. pag. 329. Quod ſi ſeriem adhibere lubeat, poterit, nulla facta diſtinctione inter numerum parem & imparem, generaliter exprimi tangens arcus multipli indefiniti n, incipiendo a termino poſtremo binomii $x + 1$ ad poteſtatem n elevati, eumque pro primo habendo: formata namque fractio ex terminis ſecundo, quarto, ſexto, &c. pro numeratore, & ex primo, tertio, quinto, &c. pro denominatore, alternantibus ſemper ſignis, exhibebit valorem tangentis arcus multipli, indiſcriminatim in omni caſu, ſive par ſit, ſive impar numerus n; imo etſi fractus vel ſurdus eſſet; in litteris algebraïcis rem ita explico.

Quia conſtat $(x+1)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n.n-1}{1.2}xx + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}x^4 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}x^5 +$ &c. Dico, ſumta ut ſupra x pro tangente arcus ſimpli A, & n pro numero multiplo quo multiplicandus eſt, fore tangentem arcus multipli $B = \left(nx - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}x^5 - \&c.\right) : \left(1 - \frac{n.n-1}{1.2}x^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}x^4 - \&c.\right)$.

Ex qua formula univerſali hoc præterea utilitatis fluit, quod latera polygonorum circumſcriptorum, adeoque & inſcriptorum, compendioſe determinentur; æquando nempe ipſi zero numeratorem fractionis diviſum per x, erit enim radix æquationis = ſemilateri polygoni circumſcripti, cujus numerus laterum eſt n, & radius circuli 1. Demonſtrationem ejus, ut pote attendenti facile obviam ex præcedentibus, lubens omitto.

DE

N°. X C.

DE MOTU CORPORUM, GRAVIUM,

PENDULORUM, ET PROJECTILIUM

In mediis non reſiſtentibus & reſiſtentibus, ſuppoſita gravitate uniformi & non uniformi, atque ad quodvis datum punctum tendente, & de variis aliis huc ſpectantibus,

DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ;

Autore Joh. BERNOULLI.

I

QUI hanc materiam dudum pertractavit, Vir omni laude major, *Iſaacus* NEWTONUS in Opere ſuo incomparabili *Phil. Natur. Princip. Math.* anſam præbuit de ea ex noſtris Meditationibus communicandi: qua in re non male egiſſe videbor, ubi oſtendero inclytum illum Virum quandoque a veritatis ſcopo aberraſſe; quod diſſimulandum, vel omnino celandum, non ego tantum, ſed quivis intemeratæ veritatis mathematicæ amans, & vel ipſe NEWTONUS, minime arbitrabitur; cum præſertim ea ſit magni hujus Geometræ autoritas, quæ, in argumento hoc nodoſo & difficili, apud quam plurimos aſſentiendi magis quam examinandi animum reperiret. Et ſi interim quæcunque ad rem præſentem ſpectant, accuratius, ut mihi videtur, jam pridem evolverim, quorum analyſin meam alibi communicavi juris publici faciendam †: hoc loco conſtitui ea duntaxat impertire, quæ ad ſyntheticam demonſtrandi rationem revocari poſſunt, viamque ſternunt ad ſolutionem Propoſ. X. Sect. II. Libri *Acta Erud. Lipſ.* 1713. Februar. pag. 77.

 ſecun-

† N°. LXXXVIII

ſecundi, *Phil. Nat. Princ.* qua quæritur corporis gravis, datam curvam in medio reſiſtente deſcribentis, in ſingulis locis velocitas, medii reſiſtentia & denſitas, nec tantum pro uniformi gravitate directe ad horizontem tendente, ſed pro quavis gravitatis continuo variantis & ad datum punctum tendentis lege, ſicuti ex ſequentibus patebit.

II.

THEOREMA I.

Sint A & B duæ diverſæ gravitatis vires, ſed ambæ uniformes; dico velocitates acquiſitas duorum corporum, quorum unum ſollicitatur ab A, alterum a B, per æqualia ſpatia a quiete delapſorum eſſe in ſubduplicata ratione illarum virium, in medio ſcilicet non reſiſtente.

TAB. XXII. *Fig.* 1. DEMONSTR. Deſcendat corpus unum perpendiculariter, vi gravitatis naturali A, incipiens deſcenſum in L, ſecundum verticalem LM; corpus vero alterum inchoet deſcenſum in eodem puncto L, ſed ſuper plano inclinato LN. Quoniam itaque hoc corpus, non plena vi gravitatis urgetur, ſed ea tantum ejus parte, quæ ſe habet ad totam, ut LM ad LN, ſuppoſito angulo LMN recto; ſicuti ex compoſitione & reſolutione virium liquet; tantundem eſt, ac ſi corpus hoc alterum directe urgetur ſecundum rectam LN vi quadam uniformi B minori quam A, ita nempe ut A : B = LN : *LM*. Notum eſt autem dudum, velocitates in M & N eſſe æquales, ut & velocitatem in N eſſe ad velocitatem, in quovis alio puncto O, in ſubduplicata ratione LN ad LO; ſumta itaque LO æquali LM, erit velocitas in N, hoc eſt, velocitas in M, ad velocitatem in O, in ſubduplicata ratione LN ad LM, hoc eſt in ſubduplicata ratione A ad B. *Q. E. D.*

III.

ALITER. Ex demonſtratis *Hugenianis* in *Opuſculis poſthumis* Theorem. de vi centrifuga, quæ brevitatis cauſa hic demonſtra-

monſtrare nolo, conſtat, vim centrifugam alicujus corporis, in circulo horizontali ea velocitate gyrantis, quam acquireret cadendo ex altitudine dimidii radii, æqualem eſſe vi gravitatis; ſed ex iiſdem patet, vires centrifugas duorum mobilium æqualium in circulis æqualibus gyrantium eſſe in duplicata ratione velocitatum; quare ſi concipiamus velocitates illas eſſe acquiſitas cadendo utrobique ex altitudine dimidii radii, per vires uniformes A & B, manifeſtum eſt etiam A & B eſſe in duplicata ratione velocitatum acquiſitarum; proinde ipſas velocitates in ratione dimidiata virium A & B. *Q. E. D.*

IV.

THEOR. II.

Poſitis, ut prius, duabus viribus uniformibus, ſed inæqualibus, A & B; ſint vero & ſpatia emenſa inæqualia; dico velocitates acquiſitas eſſe in ratione compoſita ex ſubduplicata virium, & ſubduplicata ſpatiorum emenſorum.

DEMONSTR. Sit enim iterum LO = LM, capiaturque alia LP, major vel minor quam LO; quia itaque, per præced., velocitas M eſt ad velocitatem in O, ut $\surd$ A ad $\surd$ B, & velocitas in O ad velocitatem in P, ut $\surd$ LO ad $\surd$ LP, ergo, ex æquo & per rationum compoſitionem, velocitas in M ad velocitatem in P ut $\surd A \times \surd LM$ ad $\surd B \times \surd LP$. Idem etiam, ex conſideratione virium centrifugarum colligitur.

V.

THEOR. III.

Sint iterum vires uniformes A & B; dico ſpatia eodem tempore emenſa eſſe ut vires.

DEMONSTR. Ducta MQ normali ad LN; patet ex *Galilæanis*, ſpatia LM & LQ eſſe iſochrona, eſt vero LM : LQ = LN : LM = [per præced.] A : B. *Q. E. D.*

VI

Corollar. I.

Hinc demonſtrari poteſt *pendula, quorum longitudines ſunt ut vires gravitatis a quibus agitantur, eſſe iſochrona.*

Demonstr. Sint enim LPC & *lpc* quadrantes circulorum, vel alii quilibet arcus ſimiles, quos pendula oſcillando deſcribunt, & intelligantur arculi minimi ſimiles ſimiliterque poſiti PQ & *pq*. Ductis jam horizontalibus LE, PF, QG, ut & *le*, *pf*, *qg*; erunt velocitates in P & *p* tantæ, quantæ forent in F & *f* cadendo ex altitudinibus EF & *ef*. Eſt vero, ob ſimilitudinem arcuum [nominatis radiis R & *r*] EF: *ef* = FG: *fg* = PQ: *pq* = R: *r* = A: B; Ergo, per converſ. Theor. III, altitudines EF & *ef*, ut & EG & *eg*, ſunt iſochronæ, proinde tempuſculum per FG = tempuſculo per *fg*; & quia velocitates in F & *f* ſunt æquales velocitatibus in P & *p*, erit tempuſculum per PQ æquale tempuſculo per *pq*; idemque cum valeat de omnibus arculis ſimilibus ſimiliterque poſitis, ex quibus conflantur arcus toti ſimiles LPC & *lpc*; erunt etiam tempora per LPC & *lpc* inter ſe æqualia; hoc eſt, arcus iſti ſunt iſochroni, quos pendula oſcillando deſcribunt, quorum longitudines ſe habent ut vires gravitatis a quibus agitantur. *Q. E. D.*

TAB. XXII. *Fig. 2.*

VII.

Coroll. II.

Patet etiam *pendula æqualia abſolvere oſcillationes ſuas temporibus, quæ ſe habent reciproce in ſubduplicata ratione virium gravitatis, a quibus pendula agitantur.*

Demonstr. Intelligatur enim pendulum aliquod tertium brevius, a vi minori B agitatum, & iſochronum longiori, a vi majori A agitato: ſunt autem, ut dudum conſtat, tempora oſcillationum duorum illorum pendulorum, ab eadem vi B agitatorum, in ſubduplicata ratione reciproca longitudinum; hoc eſt per Coroll. præced. in ſubduplicata ratione reciproca virium.

VIII.

VIII

COROLL. III.

Hinc multitudines vibrationum, eodem tempore peractarum a duobus pendulis æqualibus, ſe habent in dimidiata ratione directa virium pendula agitantium.

IX

SCHOLIUM

Quamquam hæc pleraque apud NEWTONUM, & HUGENIUM, vel jam demonſtrata reperiantur, vel non difficulter ex iis deducantur; cum tamen illorum demonſtrationes nonnihil perplexiores videantur, noſtræ vero vulgaribus tantum principiis innixæ etiam ab illis intelligi poſſint, qui profundiora Geometriæ non penetrarunt; eas hic communicare volui; hac præſertim de cauſa, ne aliunde petere opus haberem ad ſtabiliendas demonſtrationes propoſitionum majoris momenti, quas infra dabo.

X.

Interim annotare hic conveniet modum æſtimandi & inter ſe comparandi vires gravitatis in diverſis Terræ locis diverſarum latitudinum, per comparationem nempe longitudinis pendulorum iſochronorum; quorum obſervationes multis in locis accurate inſtituendæ monſtrarent, quouſque experientia conſpiret cum ratiocinio & regula a NEWTONO tradita in Lib. III. Prop. 20. Sed Gallorum obſervationibus [quas craſſas vocat] videtur ipſe parum fidere, nec immerito; non tam quod ab ipſius computo abludant, quam quod ſibi mutuo contradicere videantur, dum in Terræ regionibus, ab æquatore remotioribus, minorem aſſignant pendulo ſingulis ſecundis oſcillanti longitudinem quam in propinquioribus; atque ita quoque in illis corpora minus gravitarent quam in hiſce; quod ſane eſt contra omnem

nem probabilitatem: cum enim corpora a circumgyratione Terræ acquirant niſum recedendi a centro, adeoque vi gravitati quadantenus contrarium, qui eo major eſt, quo loci parallelus eſt major, minus utique foret reſiduum gravitatis in locis, ſub vel prope æquatorem, quam in aliis ab eodem remotioribus: per conſequens in his pendula iſochrona requirerent majorem longitudinem quam in illis.

X I.

Quando tamen Galli contrarium ſe obſervaſſe aſſeverant: pendulum ſcilicet *Pariſienſe* [cujus longitudo 3 ped. 8. $\frac{1}{2}$ lin.] ſuperare, una tantum linea cum quadrante, pendulum iſochronum in Inſula *Cayenna*, quæ ab æquatore non omnino 5 grad. diſtat; ſed & ab eodem *Pariſienſi* deficere duabus lineis pendulum, quod ipſi iſochronum eſt in Inſula *Gorée*, haud procul a promontorio viridi, quam eandem differentiam a ſe etiam obſervatam aſſerunt in *Guadaloupe*, non obſtante quod ambæ hæ Inſulæ *Guadaloupe* & *Gorée*, utpote 14 vel 15 graduum latitudinem habentes, ab æquatore magis diſtent quam *Cayenna*. Hæc ita conſignata reperio in Collectaneis aſtronomicis & Phyſicis [*Recueil d'Obſervations Aſtronomiques & Phyſiques*] editis *Pariſiis* in fol. Anno 1693, quare miror unde habeat NEWTONUS, quod dicit, pag. 426: *Gallos factis experimentis inveniſſe, quod pendulorum minutis ſecundis ſingulis oſcillantium longitudo* Pariſiis *major ſit quam in Inſula* Goree *parte decima digiti & major quam* Cayennæ *parte octava*; cum potius penduli *Cayennenſis* longitudinem parte decima, *Gorcenſis* vero parte ſexta a longitudine *Pariſienſis* deficere Obſervatores Galli dixerint.

X I I.

Quæ itaque cum conciliari non poſſint cum Theoria de imminutione gravitatis prope æquatorem, malumus ſuſpicari obſervationes non fuiſſe accuratas, quam inæqualitatem illam pendulorum iſochronorum tantum apparentem, non realem pronuncia-

nunciare, cum LA HIRIO; qui ejus rei cauſam rejicit in elongationem metalli menſuram pedis ſibi inſculptam gerentis, quod, in regiones calidas translatum, aliquam rarefactionem paſſum fuerit, unde pendulum collatum cum menſura nonnihil extenſa neceſſario brevius apparuerit. Nollem quidem negare quod huic rarefactioni metalli aliquid adſcribi poſſet; eſt tamen extra controverſiam abbreviationem pendulorum prope æquatorem magna ex parte deberi imminutæ gravitati corporum; quocirca e re eſſet, ut quantum huic ſoli debeatur ſtudioſe inquireretur, quod meo judicio non adeo eſſet difficile.

XIII.

Calefacto ſcilicet aëre in aliquo loco clauſo, in quo experimentum inſtitueretur, ad certum uſque caloris gradum ope thermometri annotandum; tranſlata poſtea eadem regula, ad quam in noſtris regionibus penduli longitudo fuit menſurata, in regionem æquatori vicinam, in cujus loco aliquo itidem clauſo, aër, ope ejuſdem thermometri ad eundem caloris gradum attemperatus, conciliabit utique metallo, quo menſuretur pendulum, eundem rarefactionis gradum, quem obtinuit hic loci; ſi qua differentia deinde ſe proderet in pendulorum utriuſque loci longitudine, eam certe imminutæ gravitatis actioni tunc unice adſcribendam eſſe, nemo, qui hæc intelligit, dubitabit: quod enim HIRIUS ſomniat metalli extenſionem quoque fieri poſſe per vapores & halitus metalla penetrantes, quibus aër in Zona torrida inprimis ſcateat, nulla hoc attentione dignum judico.

XIV.

Illuſtrantur quæ hactenus diximus, de effectu imminutæ gravitatis, per experimenta primo globorum ſuper planis declivibus poſitorum. Cum enim, ex demonſtr. Theor. I & III, vis gravitatis abſoluta ſe habeat ad vim qua mobile deſcenſum molitur ſecundum declivitatem plani, ut ſinus totus ad ſinum declinationis ejus; Sumantur duo pendula, quorum longius TAB. XXII. *Fig.* 1.

 ad

ad brevius ſit ut LM ad LQ; oſcilletur longius in p[lano] verticali, brevius vero ſuper plano declivi, cujus inclinat[ionis] angulus ſit LNM; erunt, per Coroll. I. Theor. III, oſ[cil]lationes utriuſque penduli iſochronæ; quas ita eſſe etiam [ex]perientia docuit: oportet autem planum declive eſſe poliſſimum, ſicut & globum; ne mutua attritio a quantulacunq[ue] ſcabritie oriunda officiat deſcenſui, eumve ullo modo re[ta]retur.

X V.

Deinde non minus curioſa ſunt, minuſve probant noſtra [ra]tiocinia, quæ fiunt experimenta circa pendulorum oſcillatio[nes] in fluidis perfectioribus, in quibus nempe abeſt ſenſibilis [par]tium tenacitas; ita ut oſcillationes minimæ nullam offend[ant] reſiſtentiam. In his fluidis conſtitutorum corporum gravi[tas] [notante id apprime acutiſſimo NEWTONO pag. 284] du[plex] conſiderari poteſt; altera, vera & abſoluta, nempe vis [to]ta qua corpus deorſum tendit, altera, apparens, relativa & [vul]garis, conſiſtens in exceſſu quo corpus magis tendit deorſ[um] quam fluidum ambiens.

X V I.

Sumantur itaque duo pendula æqualia, quorum alterum [in] aëre, alterum in fluido aliquo nullius tenacitatis, oſcillen[tur], quod fluidum tamen & ipſum habeat gravitatem, adeo[que] eam quæ eſt in pendulo imminuat. Quod ſi jam animus [ſit] prædicere, in qua ratione ſe habituri ſint numeri oſcillation[um] in aëre & fluido eodem tempore peragendarum: ſit pendulum, exempli gratia, plumbeum oſcillans in aqua, cujus gravitas ſpecifica ſe habet ad gravitatem ſpecificam plumbi, ut 7 ad 8[0] quam proxime, ita ut plumbum in aqua amittat $\frac{7}{80}$, retinea[t]que $\frac{73}{80}$ ſui ponderis. Eſt ergo vis gravitatis abſolutæ, qua agitatur pendulum in aëre, [quem hic nullius gravitatis ſenſibilis ſupponimus] ad vim gravitatis relativæ, qua ſola pendulum agitatur in aqua, ut 80 ad 73, unde, per Corol. III, Theor. III, numerus oſcillationum in aëre ad numerum oſcillationum in

n aqua eodem tempore peragendarum, ut $\sqrt{80}$ ad $\sqrt{73}$, ſeu ut 120 ad $114\frac{2}{7}$, quam proxime; hoc eſt, pendulum aliquod ſemiſecunda notans, dum in aëre uno horæ minuto vibrationes 120 abſolvit, alterum pendulum plumbeum æqualis longitudinis in aqua perficiet tantum vibrationes $114\frac{2}{7}$. Quod accurate ſatis reſpondet experimentis inſtitutis ab ipſo LA HIRIO, quamquam præter ejus expectationem hunc ſucceſſum habentibus. Vide *Comment Acad. Scient.* pro *Anno* 1703 pag. 289. Edit. Pariſ. † Ubi dicit ſe primo ſumſiſſe globulum plumbeum 2 unciarum, ex quo pendulum confecerit ſemiſecunda notans in aëre; hoc poſtea in aqua agitatum, uno minuto horario peregiſſe 112 oſcillationes; tum vero aſſumto globulo plumbeo 5 unciarum pro ſimili pendulo, ſe numeraſſe 114 oſcillationes uno minuto peractas, quæ differentia duarum oſcillationum haud dubie ex eo venit, quod globulus major, cum minorem habeat ſuperficiem pro ratione molis, patiatur minorem reſiſtentiam a tenacitate aquæ oriundam, quam globulus minor, qui pro ratione molis majorem habet ſuperficiem.

XVII.

Quæ reſiſtentia, ut ut perexigua ſit, ſi excurſiones vibrationum non longæ ſint, [nam breviſſimæ eodem modo & tempore peragerentur ac ſi aqua plane non reſiſteret, quod oſtendit etiam NEWTONUS pag. 308, Coroll. 2 *] poteſt tamen illa magis adhuc inſenſibilis reddi; ſi nimirum, loco globuli, ſumatur corpus lentiforme, terminatum acie tenui ad aërem ſulcandum dum in latus oſcillatur; quo pacto, nihil, vel parum ſuperficiei occurrit fluido; a quo proin, ſi præterea arcus vibrationum ſint parvi, tam imperceptibilis reſiſtentia corpori oſcillanti objicitur, ut jure merito negligi poſſit: hujuſmodi lenticulam ſi in experimento ſuo LA HIRIUS adhibuiſſet, non tantum 112, vel 114, ſed $114\frac{2}{7}$, aut 115 omnino oſcillationes uno minuto numeraturus fuiſſet. Quod autem, eadem

Vvv 2 pag.

† Pag. 349 Edit. Batavæ. * Lib. II. Sect. VI. Prop. XXVII.

pag. 289, ſe attonitum ſtetiſſe fateatur, cum videret pendulum illud, quod credebat vibrationes ſuas peracturum eſſe in aqua minimum ſingulis tantum ſecundis, illas tamen, contra ſuam expectationem, fere æque promptas, vel ejuſdem durationis deprehendiſſe, ac in aëre; oſtendit profecto animum admirationis plenum, qui minus decet Geometram conſummatum, quam hominem in hiſce profundioribus hoſpitem: nihil enim hic contigiſſe video, quod non ante experimentum prædicere potuiſſem. Ne vero hoc gratis dictum ſit, examinet regulam ſequentem, ejuſque periculum faciat in variis corporibus.

XVIII.

Sit ratio gravitatis ſpecificæ corporis alicujus & aquæ, ut c ad a; adeoque ejuſdem corporis gravitatis abſoluta, vel extra aquam, ad gravitatem relativam, vel intra aquam, ut c ad $c - a$: *Dico numeros oſcillationum, extra, & intra aquam, æquali tempore peractarum, fore ut* $\sqrt{c}$ *ad* $\sqrt{(c - a)}$. Ope hujus Regulæ, inveni, ex data ratione gravitatis aquæ & variorum corporum, numerum oſcillationum, quas illorum ſingulorum pendula in aqua conficiunt, uno horæ minuto, dum in aëre [tanquam non gravi conſiderato] abſolvunt 120 vibrationes. Quod calculus ſuggeſſit in ſequentem Tabellam redegi; ex qua videre eſt numerum oſcillationum haud multum differre; etſi corpora ipſa notabiliter diſcrepent ratione gravitatis. Exempli gratia, aurum, licet quinquies fere ſuperet marmor in aëre, & omnino ſexies in aqua, vix tamen decima parte plures in aqua oſcillationes conficit aurum, quam marmor.

Corpo-

Gravitates Corporum	In aëre	In aqua	Oſcillationes in aqua
Auri	400	379	117
Plumbi	240	219	114 $\frac{2}{3}$
Argenti	218	197	114 $\frac{1}{6}$
Cupri	200	179	113 $\frac{5}{7}$
Ferri	168	147	112
Stanni	156	135	111 $\frac{2}{3}$
Marmoris	84	63	104 $\frac{2}{3}$
Aquæ	21	0	0

(Oſcillationibus 120 in aëre reſpondent)

XIX.

Quod ſi eadem corpora oſcillentur in liquore adhuc leviori quam aqua; exempli gratia, in oleo petræ, quod ſe habet ad aquam in gravitate, ut 16 $\frac{2}{5}$ ad 21; diſcrepantia illa oſcillationum erit adhuc minor: aurum nempe perficiet, in hoc liquore, oſcillationes 117 $\frac{3}{5}$, quando marmor æquali tempore abſolvit oſcill. 107 $\frac{3}{5}$; ita ut jam duodecima circiter parte tantum plures ab auro quam a marmore peragantur vibrationes. Unde conjectu facile eſt, in fluidis levioribus tandem evaneſcere omnem retardationem ſenſibilem: ſit quippe, pro fluido, aër ipſe gravis conſideratus, qui nempe in gravitate ſe habet ad aquam, ut 1 ad 800, adeoque ad aurum, ut 1 ad 15238, & ad marmor, ut 1 ad 3200; eſt ergo, ſecundum Regulam, numerus oſcillationum auri in vacuo, ad numerum oſcillationum ejuſdem in aëre, [ſubintellige ab æqualibus pendulis eodem tempore peractarum] ut $\sqrt{15238}$ ad $\sqrt{15237}$, hoc eſt quam proxime ut 30476 ad 30475: marmoris vero oſcillationes in vacuo, hoc eſt in fluido non gravi,] erunt ad oſcillationnes in aëre

 ut

ut $\sqrt{3200}$ ad $\sqrt{3199}$, vel quam proxime ut 6372 ad 6371; ita ut aurum ultra triginta millia, marmor vero pluſquam ſex millia vibrationum in aëre abſolvere poſſint, priuſquam una tantum retardentur.

XX.

Ex quibus liquet reſiſtentiam aëris, a gravitate ejus oriundam, hic tuto negligi; adeoque pendula in aëre, tanquam in vacuo agitata, conſiderari poſſe, modo interim præcaveatur altera ejus reſiſtentia a denſitate & tenacitate ejus proveniens; quæ majoris momenti eſt, quæque dependet partim a velocitate, partim a ſuperficie corporis ad aërem appellente; quare hæc reſiſtentia, ut ſupra jam monui, valde imminuitur & pene inſenſibilis redditur, ſi pendulum habeat figuram lentiformem, & in latus oſcillando deſcribat arcus breviſſimos; ita enim exigua velocitate, ſed magna facilitate penetrat aërem.

XXI.

Cæterum Regula valet etiam de corporibus quæ in fluidis levitant; hoc eſt, quæ demerſa ſurſum tendunt, ob prævalentem ſpecificam gravitatem fluidi: eſt enim levitas nihil aliud quam gravitatis inverſa, taleque corpus exhibebit pendulum inverſum, capite fili ad fundum vaſis alligato, dum lenticula ipſa oſcillando deſcribit arcus verticales ſupra centrum: quia vero exceſſus gravitatis ſpecificæ jam eſt penes aquam, faciendum eſt ut $\sqrt{c}$ ad $\sqrt{(a-c)}$, ita vibrationum numerus extra aquam ad numerum earum intra eandem: unde hoc emergit paradoxum, quod quo ex leviori materia ſunt pendula, eo promptiores ſunt in fluido oſcillationes inverſæ, adeo ut etiam quemcunque promptitudinis gradum aſſequantur, modo a ad c magnam ſatis habeat rationem: abſtrahimus hic ſemper a reſiſtentia tenacitatis fluidi. Si, exempli gratia, pro pendulo aſſumatur corpus ex materia duplo ſpecifice leviore quam aqua, hoc eſt, ſi a ſit $= 2c$; faciet hoc pendulum oſcillationes utrobique & extra

xtra & intra aquam æquales numero; quod ſi vero illud fiat x materia quintuplo leviori quam aqua, oſcillabitur duplo romptius in aqua quam in aëre; in illa nempe binas abſolvit ſcillationes, dum ſingulas perficit in hoc: & ita de aliis.

XXII.

Ex hiſce ſpeculationibus ut fructum aliquem percipiamus, non abs re alienum erit, ſi communicetur ſequens

Modus explorandi ſolidorum & liquidorum Gravitates ſpecificas ope pendulorum.

Hic ſcilicet peragitur, citra adminiculum conſueti illius inſtrumenti hydroſtatmici, alteriuſve cujuſdam machinæ; mediantibus ſcilicet duobus pendulis, quorum alterum, oſcillaturum intra liquorem, ſit ex materia non multo graviori quam ipſe liquor ponderandus; ſic enim differentia pendulorum duorum, in aëre & liquore oſcillationes iſochronas facientium, ſenſibilior erit, quam ſi materia illa valde ponderoſa eſſet. In hunc finem, ſupponamus lenticulam penduli in liquore agitandi [alterum enim, ex quacunque ſit materia, modo non nimis levi, ne aëris reſiſtentia officiat, nihil refert] eſſe ex ſtanno paratam; quo facto, rationem gravitatis inveſtigaturus trium horum liquorum, ex. gr. aquæ communis, olei petræ & olei tartari per deliquium, & ſingula tam inter ſe, quam cum ſtanno comparaturus, pendulum ſuſpenſum in aëre, longitudinis pro arbitrio aſſumtæ, agitabo, & dein ſtatim alterum, cujus lenticula ad modicam tantum profunditatem liquoris demerſa oſcillationes perbreves deſcribere debet, elongabo, vel contraham, donec iſochronum evadat priori in aëre oſcillanti: collata poſtea longitudine penduli, in ſingulis tribus liquoribus ſucceſſive agitandi, ope ſcalæ alicujus accuratiſſimæ, cum longitudine penduli in aëre iſochroni; obſervabo rationem earum ut ſequitur

Longi-

Longitudines pendulorum iſochronorum in	Aëre	conſtant particulis in ſcala ſumtis	1000
	Aqua		865
	Oleo petr.		895
	Oleo tart.		833

Cum igitur per Coroll. I. Theor. III, in eadem quoque ratio-ne ſe habeant gravitates ſtanni relativæ in aëre, aqua, oleo petræ, & oleo tartari, deſignabunt tres differentiæ inter 1000 & tres reliquos numeros, cum 1000 comparatæ; quantum ponderis ſtannum amittat in uno quoque liquore demerſum, adeoque & ipſam proportionem gravitatis ſpecificæ ſtanni, horumque trium liquorum, nimirum

Gravitas ſpecifica	Stanni	ſe habet ut	1000—0	=	1000	vel proxime ut [illegible]
	Aquæ		1000—865		135	[illegible]
	Olei petræ		1000—895		105	[illegible]
	Olei tart.		1000—833		167	[illegible]

Simili modo procedendum eſt in aliis. Rem ipſam vero perficiendam & ad commodam praxin deducendam, aliis relinquo, quibus vacat & volupe eſt.

XXIII.

Occaſio iſta opportune invitaret, ad materiam hanc de oſcillationibus provehendam, atque alium non ignobilem uſum indicandum, in quem incidi: detecto nempe fundamento genuino & unico, ex quo naturaliſſime fluit determinatio centri oſcillationis in pendulis compoſitis, citra precarias illas hypotheſes ab aliis aſſumtas, nec dum ſatis ſtabilitas. Quæ methodus præterea, etiam in hoc aliis antecellit, quod pari facilitate doceat invenire centrum oſcillationis, ſi penduli compoſiti partes, ex varia materia & in liquore homogeneo, vel quod eodem venit, ſi partes penduli ex materia homogenea, ſed in diverſis liquoribus oſcillentur; nec refert, ſi utriuſque partes & penduli & liquoris ſint heterogeneæ, ad alterutrum enim caſuum duorum

rum priorum reduci poteſt: de qua pendulorum ſpecie, eorumque centro oſcillationis definiendo, nemo hactenus cogitavit. Noſtram regulam, cum ipſo fundamento ex quo eruta eſt, differimus in tempus commodius, quo plus otii nobis fuerit; hoc interim monuiſſe convenit conſiderationem vectis, [per quam Frater meus b. m. aliquando rem eandem tantavit, etſi non prorſus infeliciter] huic rei ſolam non ſufficere, ſed quod palmarium eſt, recurrendum eſſe ad effectum corporum diverſa gravitatis ſpecie deorſum tendentium, atque ad eorundem in ſe mutuo agentium efficaciam.

XXIV.

Hactenus ad fluidorum, in quibus corpora moventur, reſiſtentiam non attendimus; per reſiſtentiam hic intelligimus vim quamcunque, quæ motui corporis contraria eſt, & propter quam corpus motum ſuum, niſi aliunde continuo inſtauretur, paulatim amittit, & tandem aliquando ad quietem redigitur. Unde vero dependeat reſiſtentia illa in fluidis, quamve cauſam phyſicam agnoſcat, hujus loci non eſt anxiei inquirere; ſive enim veniat a quadam partium tenacitate in fluido, ob quam particulæ fluidi non ſtatim ad appulſum corporis a ſe mutuo ſeparantur; ſive a quadam attritione ex ſcabritie, quæ non tantum in ſuperficie corporis, ſed & in particulis minimis fluidum componentibus adeſſe poteſt; ſive demum oriatur illa ex ipſa fluiditatis imperfectione, qua nimirum fit ut, cum fluidum actu non ſit diviſum in infinitum, hoc eſt, in particulas data quavis minores, ſed conflatum ex moleculis ſolidis determinatæ magnitudinis, fit, inquam, ut in tali fluido corpus motum, ſingulis momentis, certam fluidi quantitatem ante ſe pellere & amoliri debeat, quod citra ſui motus imminutionem continuam peragere non poteſt, etſi alias nulla eſſet tenacitas, nullaque ſcabrities in partibus fluidi: quæcunque ergo vera ſit cauſa reſiſtentiæ fluidorum, ſive una ſola ex tribus dictis, ſive, quod veroſimilius, omnes ſimul con-

currant, ſive alia quædam locum obtineat; eam nunc ſupponimus, non explicamus; neque etiam quam rationem habeat [quæ utique eſſet compoſita ex duplicata velocitatis, & ſimplici medii, vel fluidi denſitatis, ſi tertia a nobis indicata reſiſtentiæ cauſa admitteretur] pro certo definire volumus. Legantur quæ de ea conſcripſit *Illuſtr.* LEIBNITIUS in *Actis Lipſ.* A. 1689, pag. 39 & ſeqq. ubi de mediorum reſiſtentiis acutiſſime, pro more ſuo, diſſeruit: Ego vero propoſitum meum mathematice proſecuturus, reſiſtentiam ejuſque rationem in abſtracto conſiderabo.

XXV.

THEOR. IV.

TAB. XXII Fig. 1. *Eſto curva quacunque* LCK, *quam corpus, vi gravitatis uniformis, libere deſcribit, id medio quocunque reſiſtente: Vis quam exerit gravitas ſecundum normalem ad curvam* [*quam ideo vocabo* vim gravitatis normalem] *erit ut ſinus anguli* GCS, *quem recta curvam contingens* CS *conſtituit cum directione gravitatis* CG: *Vis autem, quam exerit ſecundum tangentem* [*quam idem vocabo* vim gravitatis tangentialem] *eſt ut ſinus ejuſdem anguli complementi* GCO.

DEMONSTR. Sit CZ directio & quantitas gravitatis, qua corpus urgetur, dum eſt in C. Ex puncto Z agatur perpendicularis ZX in rectam CO normalem ad curvam. Ex reſolutione virium patet, vim gravitatis CZ, quam ubique datam ſeu conſtantem ſuppono, reſolvi in duas collaterales CX & XZ, quarum illa exprimit ejus *vim normalem*, hæc vero ejus *tangentialem*: ſumta itaque CZ pro ſinu toto, erit CX ſinus anguli CZX ſeu ZCS; & ZX erit ſinus anguli ZCX, qui ejuſdem eſt complementum: ſunt ergo vires illæ in ratione horum ſinuum. *Q. E. D.*

COROLL. Si Gravitas non ſit data, ſeu non uniformis, erunt *vires* gravitatis *normales*, ut & *tangentiales*, in ratione compoſita illorum ſinuum & quantitatis abſolutæ, quam gra-

vitas

ritas in ſingulis curvæ punctis obtinet; hoc eſt, ſi CZ exprimat vim abſolutam gravitatis, dum corpus exiſtit in C, exprimetur *vis normalis* per CZ × ſin. anguli SCZ, & *tangentialis* per CZ × ſin. ang. ZCX.

XXVI.

Theor. V.

Poſitis quæ prius, velocitas, in quovis puncto C, erit in ratione dimidiata coradii *circuli oſculantis: Voco autem* Coradium *partem CG lineæ directionis gravitatis, quæ a perpendiculari ex centro O circuli oſculantis in eam educta reſecatur.*

Demonstr. Liquet utique projectile ea velocitate moveri debere, per quam acquirat vim centrifugam æqualem vi contrariæ normali gravitatis: Corpus enim, quod libere aliquam curvam deſcribit in medio quolibet, non alia de cauſa curvam non deſerit, quam quod, in ſingulis curvæ punctis, tanta vi trahitur verſus centrum circuli oſculantis, quanta vi centrifuga ab eodem retrahitur, ut hoc pacto ſervetur æquilibrium. Vis autem, qua mobile trahitur verſus centrum, eſt ipſa vis gravitatis normalis, quæ nempe exeritur a gravitate ſecundum normalem ad curvam, & quæ oſtenſa eſt proportionalis ſinui inclinationis curvæ ad directionem gravitatis, hoc eſt, anguli GCS, ſeu ipſi æqualis COG: In hac ratione ergo ſe habebit etiam vis centrifuga a velocitate partim, partim a curvedine oriunda. Eſt autem, ut conſtat ex *Hugenianis*, vis centrifuga in ratione compoſita ex duplicata velocitatis directe & ex ſimplici ſemidiametri inverſe; concipienda quippe eſt particula minima curvæ C*c* tanquam arculus circuli cujus centrum O, & radius OC, & in cujus circumferentia mobile circularetur celeritate uniformi, & æquali ei quam in curvæ puncto C adquirit: Erit itaque CG : CO, id eſt, ſinus anguli COG, cui proportionalis eſt vis normalis gravitatis, ut Quadr. velocitatis diviſum per CO, cui proportionalis eſt vis centrifuga in puncto C: unde quadratum velocitatis ut CG; & ipſa ve-

 locitas,

locitas, ut $\surd CG$, hoc eſt, in dimidiata ratione co[...]
Q. E. D.

XXVII.

Coroll. I. Si vis gravitatis non ſit uniformis, ſimili [...]gumento probabitur velocitatem V fore in ratione compo[...] ex dimidiata coradii & dimidiata gravitatis, ſeu ut $\surd CG$ $\surd CZ$, hoc eſt, ut medium proportionale inter CG & C[...]

XXVIII.

TAB. XXII. *Fig.* 4. Coroll. II. Sit curva LCK arcus circuli, cujus cen[...]trum O, tendatque vis gravitatis ad horizontem OK, qui caſus eſt ex Newtono *pag.* 263 †, erit O, pro quovis puncto C, in eodem ſemper horizonte OK; unde velocitates, quæ ſunt ut $\surd CG$, ſe habebunt in ſubduplicata ratione diſtantiarum ab horizonte per centrum circuli tranſeunte; prorſus quidem ut aſſerit Celeb. Newtonus., *pag.* 265 *, tametſi in definienda reſiſtentia a vero aberret, quemadmodum ex demonſtratione ſequentis propoſitionis patebit.

XXIX.

Theor. VI.

Ut Corpus in medio reſiſtente agitatum deſcribat circulum LCK, *ſuppoſita vi uniformi gravitatis, qua directe ad horizontem tendit: dico reſiſtentiam fore, in ſingulis punctis* C, *ad gravitatem ut* 3 OG *ad* 2 OK.

Demonstr. Super axe OL, & vertice O, deſcripta intelligatur parabola ONE cujuſcunque parametri; fiatque ſuper eodem axe prolongato OP, eodemque vertice O, parabola alia OVQ, cujus parameter prioris ſit dupla: Dein ad punctum L, & quodlibet aliud punctum R, applicentur ordinatæ LE, RC, RN, horizontales, iſtiſque proximæ *rc*, *rn*; atque ex punctis E, N, *n*, agantur verticales EQ, NV, *nu*, ſecan-

† Supra, pag. 485. * pag. 487.

ſecantes parabolam O V Q in punctis Q, V, *u*; ex quibus applicentur ad axem O P, horizontales Q P, V T, *u t*. Ex Coroll. II, Theor. præced. manifeſtum eſt, ſi L E deſignet velocitatem, quam corpus habet in ſupremo circuli puncto L, quod R N deſignabit velocitatem corporis, cum fuerit in puncto C. Sed quia parameter parabolæ O Q eſt dupla parametri parabolæ O E, liquet O L eſſe $= 2$ O P, & quamlibet aliam O R $= 2$ O T; unde quoque R *r* $= 2$ T *t*. Et quoniam velocitas L E ea eſt, quæ requiritur ut vis centrifuga corporis in L æqualis ſit ejus gravitati, erit illa velocitas, [ut HUGENIUS monſtravit] tanta quanta acquireretur ſi grave in vacuo, hoc eſt, in medio non reſiſtente, deſcenderet per altitudinem æqualem radio dimidio circuli: adeoque P O erit altitudo, per quam grave cum celeritate initiali E L, vel Q P, in vacuo aſcendere poteſt, & ſic quælibet alia applicata V T exprimit velocitatem, quacum grave, ſurſum projectum in vacuo, emetietur altitudinem T O. Hiſce præmiſſis, concipiamus corpus aliquod grave cum celeritate Q P, in medio non reſiſtente, ſurſum projici ex P verſus O, aliudque perveniſſe ad T, quando alterum in medio reſiſtente pervenit ad C; ita ut eo momento habeant ambo corpora æquales velocitates N R, & V T, paſſuras decrementa æqualia, tempuſculis inæqualibus, ſe habentibus in ratione ſpatiolorum percurrendorum C *c* & T *t*. Jam vero vires, quibus duo corpora æqualia & æquivelocia retardantur, ſunt directe ut decrementa velocitatum eodem tempuſculo producta, vel, quod idem eſt, reciproce ut tempuſcula quibus fiunt æqualia decrementa velocitatum: Vis itaque gravitatis, qua corpus in vacuo aſcendens retardatur in T, eſt ad vim qua alterum corpus in medio reſiſtente deſcendens retardatur in C, viciſſim ut C *c* ad T *t*. Hæc autem vis poſterior æſtimanda eſt per exceſſum, quo reſiſtentia medii, in puncto C, ſuperat vim tangentialem gravitatis, quam nempe exercet gravitas ſecundum tangentem C S, & quæ, per Theor. IV, ad ipſam gravitatem ſe habet ut O G ad O C. Unde ſi gravitas vocetur G, & reſiſtentia R, erit $G : R - \frac{OG}{OC} G = Cc : Tt$

$= 2 Cc : Rr$ [Cb] $= 2 OC : OG$, ſeu, æquando extremorum & mediorum facta, $OG \times G = 2 OC \times R - 2 OG \times G$, adeoque $3 OG \times G = 2 OC \times R$, quæ in analogiam converſa dant $R : G = 3 OG : 2 OC$ [$2 OK$], hoc eſt, reſiſtentia ad gravitatem ſe habet ut $3 OG$ ad $2 OK$. *Q. E. D.*

XXX.

Coroll. I. Quia $3 OG \times G = 2 OC \times R$, adeoque $R = 3 OG \times G : 2 OC$, erunt, ob datas G & OC, reſiſtentiæ in diverſis locis ad ſe invicem, ut reſpectivæ OG.

XXXI.

Coroll. II. Quod ſi vero ſupponatur Reſiſtentia ut medii denſitas, & quadratum velocitatis conjunctim, erit [nominando Denſitatem D] $D \times CG$ [$= R$] $= 3 OG \times G : 2 OK$, & proinde $D = 3 OG \times G : 2 OK \times CG$, hoc eſt, denſitates ſunt, ob datas G & OK, ut $OG : CG$; ſeu ut tangentis longitudo CM, prorſus quoque ſicuti Newtonus.

XXXII.

Scholium.

Ratio a nobis aſſignata inter Reſiſtentiam & Gravitatem, ut $3 OG$ ad $2 OK$ diſcrepat utique a *Newtoniana*, ut pote quam ponit ut OG ad OK, adeoque ſeſquialtera ratione minorem, quam quæ noſtra eſt. Ne quis vero, qui hæc accuratius examinare nequit, ſuſpicetur perperam forte a nobis redargui, quæ a Viro acutiſſimo, tanta cum induſtria, fuere enucleata; demonſtrabo hic rationem illam *Newtonianam* ad manifeſtam contradictionem deducere: Nam ſi reſiſtentia ad gravitatem ſe haberet ut OG ad OK, ut vult Newtonus; ipſa vero Gravitas cum ſe habeat ad vim tangentialem, ut OC, ſeu OK, ad OG; eſſet, ex æquo, reſiſtentia ad vim tangentialem ſeu motri-

notricem, ut O G ad O G: foret ergo reſiſtentia huic vi motrici æqualis, adeoque velocitas, in omnibus punctis C, uniformis; quam tamen eſſe ut $\sqrt{CG}$ & proinde non uniformem ſupra monſtravimus, conſentiente quidem & ipſo NEWTONO.

XXXIII.

Error iſte, qui tanto Viro excidit, non quidem in ipſa ejus ſolutione latet, quam juſtam eſſe, & ab omni paralogiſmi vitio immunem deprehendi, quanquam non parum detortam & intellectu difficilem; ſed quærendus ille eſt in ipſo applicandi modo, qui in eo laborat, quod pag. 263 * in ſerie quæ exprimit DG [vid. Fig. ibid.] terminum quemlibet ſumat pro aliqua indeterminatæ DG differentiali, ſeu, ut ipſe vocat, fluxione tanti gradus, quantæ dimenſionis exiſtit littera o in ipſo termino; quod in primo & ſecundo verum eſſe poteſt, in reliquis vero minime: ſit enim, exempli gratia, DG ut ſimplex poteſtas aliqua p ipſius OB, ſeu a; ita ut DG ponenda ſit $=$ $(a+o)^p$ quæ itaque, more *Newtoniano*, in ſeriem conjecta dabit $DG = a^p + \frac{p}{1} a^{p-1} o + \frac{p.(p-1)}{1.2} a^{p-2} o^2 + \frac{p.(p-1).(p-2)}{1.2.3} a^{p-3} o^3 + \&c.$ cujus termini, ex opinione NEWTONI, exprimerent ſucceſſive differentiales omnium in eodem ordine graduum ipſius DG; interim, excepto primo & ſecundo termino, reliquos omnes a veris differentialibus abludere, communis differentiandi regula docebit; ſumpta enim a pro indeterminata, cujus differentialis da ſupponitur conſtans, & differentiata ſucceſſive poteſtate a^p, invenietur pro differentiali prima $pa^{p-1} da$; pro ſecunda $p.(p-1) a^{p-2} da^2$; pro tertia $p.(p-1).(p-2) a^{p-3} da^3$; pro quarta $p.(p-1).(p-2).(p-3) a^{p-4} da^4$; &c. Unde hæc emergit ſeries, ſubſtituendo pro da litteram o, & ponendo ipſam a^p, tanquam differentialem gradus

* Supra pag. 485.

gradus infimi, ſeu nullius, pro primo termino, $a^p + p a^{p-1}$ $+ p.(p-1) a^{p-2} oo + p.(p-1).(p-2) a^{p-3} o^3 +$ $(p-1).(p-2).(p-3\ a^{p-4} o^4$ &c. = ſummæ omnium differentialium; hæc autem ut patet, diverſa eſt ab illa alte[ra] $a^p + \frac{p}{1} a^{p-1} o + \frac{p.(p-1)}{1.2} a^{p-2} o^2 + \frac{p.(p-1).(p-2)}{1.2.3} a^{p-3}$ o^3 + &c = DG; duo enim tantum priores termini utroque conveniunt, cœteri diſcrepant omnes in multiplicitate coefficientium.

XXXIV.

Non ſatis capio qua rationis ſpecie inductus fuerit Vir ſagaciſſimus, ut crederet terminos ſerierum harum, per extractionem radicis prodeuntium, eoſdem eſſe cum terminis per differentiationis continuationem collectis; cum præſertim differentiandi differentialia, vel fluxiones ex fluxionibus capiendi Regula, ei vix latere potuerit: quod moneo ne quis plus, quam par eſt, tribuat radicum extractioni per ſeries, in ſolutione problematum, quæ pendent a curvatura curvarum, quæque & commodius & verius ex differentiationis fonte obtinentur. Judicet itaque æquus Lector, quid tenendum ſit, de uſu hujus Regulæ, quem deprædicat Author pag. 264, in ſolvendis iſtius modi problematibus; quandoquidem uſus tam facile in abuſum degeneret. Vacillant certe omnia, quæ in ſequentibus ex illa deducit, pro determinanda ratione reſiſtentiæ ad gravitatem; ſicuti enim pro Circulo, pag. 265, ita etiam pro hyperbolis pag. 268 & 269, ut & pro parabolis pag. 274 rationem reſiſtentiæ ad gravitatem ubique juſto minorem facit, & quidem iterum in ratione ſeſquialtera, quod ut evidentius pateat, dabo ſolutionem problematis *Newtoniani* pag. 26[illegible] Prop. X. generaliter concepti in hunc modum.

XXXV.

XXXV.

PROBLEMA I.

Tendat vis uniformis directe ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim; requiritur tum medii denſitas, in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iiſdem locis, tum & ratio reſiſtentiæ ad gravitatem. *Acta Erud. Lipſ. 1713. Mart. pag. 115.*

SOLUTIO. Sit LC curva data quæcunque; LR ejus axis; IO evoluta, ex cujus nempe evolutione deſcribitur curva LC; CO, radius evolutæ pertinens ad punctum C; ejus coradius CG, & *ſubradius* OG; hoc nomine voco perpendicularem ex centro circuli oſculantis ductam ad lineam directionis gravitatis, & quæ coradium terminat: Sit quoque EN curva velocitatum, cujus nempe ordinata NR exprimit velocitatem projectilis in C; ſicuti EL exprimit velocitatem initialem, quacum illud exit ex puncto L ſecundum directionem horizontalem; etſi forte curva hanc directionem nuſquam habeat; inſervit enim hæc ſuppoſitio pro omnibus directionibus: Sit porro curva PQV Parabola ſuper communi axe continuato PT deſcripta, cujus applicata quælibet VT exprimat velocitatem quam grave acquireret, ſi ex altitudine PT ſola vi gravitatis deſcenderet in medio non reſiſtente. TAB. XXII. *Fig.* 3.

XXXVI.

Hiſce ita præparatis, conſideremus qua cauſa fiat, ut projectile in motu ſuo haud deſerat curvam LC, ſed ei ſemper inhæreat, quaſi alligatum eſſet extremitati C fili CO, quod ab initio curvæ OI circumplicatum, & ad L uſque protenſum eſſet, poſtea evolveretur, & hoc motu corpus curvam LC deſcriberet, ut pote quod a filo continue retineretur, ne in quolibet puncto C evaderet ſecundum tangentem CS; id quod, ſubito ſoluto filo, neceſſario contingeret, niſi gravitas & medii reſiſtentia hoc impediret. Jam vero cum, ut videtur, libere

bere moveatur projectile in curva, aliquid aliud adeſſe debe quod fili retinentis vices ſubeat, quodque in quolibet puncto tantam vim activam exerat ad trahendum corpus ſecundum di rectionem CO, quantam alias reſiſtentiam paſſivam præbe filum impediendo tantum ne elaberetur corpus ſecundum ta gentem; quæ reſiſtentia, ut patet, æqualis eſt vi centrifug qua illud naturaliter conatur recedere a centro, dum contin affectat directionem ſuam naturalem, ſecundum rectam tange tem in puncto C, in quo verſatur.

XXXVII.

Retinetur itaque projectile in curva LC, quia in ſingu lis hujus punctis urgetur duabus viribus oppoſitis & æqualibus una nimirum extrorſum ſecundum directionem OC, ex gyra tione circa O acquiſita, altera introrſum ſecundum directione CO priori oppoſitam, quæ producitur ab actione gravitatis normaliter ad curvam derivatæ. Vis prior, ex natura corpo rum gyrantium, ſe habet conjunctim ut quadratum velocitatis directe, & longitudo radii CO inverſe: poſterior vero, quæ a gravitate exercetur ſecundum normalem ad curvam, ſe ha bet ad ipſam gravitatem abſolutam, ut coradius CG ad ra dium CO, per compoſitionem virium. Erit igitur ubique $NR^2 : CO$, ut $CG. G : CO$ [per G intelligo gravitatem abſolutam] hoc eſt, ob datam G, ut $CG : CO$; adeoque NR ut $\sqrt{CG}$; ex quo patet velocitatem mobilis, in quolibet puncto C, ſe habere in dimidiata ratione coradii, hoc eſt $NR : EL = \sqrt{CG} : \sqrt{LI}$. *Quod erat inveniendum pro velocitate.*

XXXVIII.

Reſiſtentia determinatur hoc pacto; Corpus grave, vertica liter deſcendens in medio non reſiſtente, dum percurrit *Tt* ve locitate acquiſita VT, acquirit incrementum velocitatis *iu* æ quale incremento *hn*, quod acquirit projectile ſimili velocita te NR percurrendo *Cc*: ſunt autem corporum æquivelocium ſpatio-

ſpatiola percurſa Tt, Cc, ut tempuſcula, quibus percurruntur: tempuſcula vero ſunt reciproce ut vires incrementa æqualia velocitatum producentes: Ergo etiam hæ vires ſunt reciproce ut ſpatiola percurſa, hoc eſt $G : \frac{OG.G}{CO} \pm R = Cc : Tt$ [per R intelligo vim Reſiſtentiæ, quæ ad vim gravitatis normalem & per $OG.G : CO$ expreſſam addenda eſt in aſcenſu, & ſubtrahenda in deſcenſu, ad habendam vim retardatricem, vel acceleratricem $\frac{OG.G}{CO} \pm R$; notandum itaque in ambiguitate ſignorum, ſuperius pro aſcenſu, inferius pro deſcenſu valere.] Porro cum velocitas in L tanta ſit, quantam acquireret, ſi grave in vacuo, hoc eſt, in medio non reſiſtente neque gravitatem imminuente, quale hic ſub *non reſiſtente* ſemper ſubintelligitur, deſcenderet per altitudinem æqualem ſemiradio evolutæ, ſicuti HUGENIUS monſtravit de corpore circulariter gyrante; nam vis centrifuga in quolibet curvæ puncto, tanta cenſetur, quanta foret, ſi mobile eadem celeritate gyraret in circulo curvam in eo puncto oſculante, quia linea curva & circulus oſculator eandem habent curvaturæ quantitatem in puncto oſculi. Erit ergo $PD = \frac{1}{2} LI$; & ob $\sqrt{PT} : \sqrt{PD} =$ [per naturam parabolæ] $VT : QD = NR : EL = \sqrt{CG} : \sqrt{LI}$, erit $PT : PD = CG : LI$, unde $PT = \frac{1}{2} CG$, earumque elementa dPT, ſeu $Tt = \frac{1}{2} dCG$. In ſuperiori itaque analogia $G : \frac{OG.G}{CO} \pm R = Cc : Tt$ pro $\frac{OG}{CO}$ ſubſtituatur æquivalens $\frac{Cb}{Cc}$, & pro Tt ſcribatur $\frac{1}{2} dCG$, prodibit $G : \frac{Cb.G}{Cc} \pm R = Cc : \frac{1}{2} dCG$, unde $R = G.(2Cb - dCG) : \mp 2Cc$, vel $R : G = 2Cb - dCG : \mp 2Cc$; hoc eſt, Reſiſtentia ſe habet ad Gravitatem, ut duplum elementi abſciſſæ, demto elemento coradii, ad duplum elementi curvæ propoſitæ. Quod ſi vero elementum coradii ſit negativum, vel quod idem eſt, ſi creſcentibus abſciſſis LR, deſcreſcant coradii CG; ſicuti fit, ſi curva LC eſt, exempli gratia, circulus; habebit ſe

Reſiſtentia ad Gravitatem, ut duplum elementi abſciſſæ, aucto elemento coradii affirmative ſumto, ad duplum elementi cu propoſitæ. *Quod erat inveniendum pro reſiſtentia.*

XXXIX.

Hinc liquet eandem proportionem obſervari, tam in aſcenſu quam in deſcenſu projectilium per curvam; hoc tantum diſcrimine, quod reſiſtentia in aſcenſu negativa ſit, ſi ea quæ in deſcenſu eſt affirmativa, & viciſſim. Reſiſtentia autem negativa hoc eſt, talis quæ motum juvet, phyſice eſt impoſſibilis; unde manifeſtum eſt, duo media poſitive reſiſtentia excogitari non poſſe, in quorum uno aſcendens projectile eandem curvam deſcribat, quam deſcribit in altero deſcendens. *

XL.

Neque igitur in uno medio, utcunque variante ratione denſitatis, mobile deſcribere poteſt curvam, quæ habeat circa axem duas partes ſimiles, vel eaſdem; adeoque parabolæ omnes cujuſcunque gradus [excepta parabola conica, quæ ſola in medio non reſiſtente, vel ſaltem in medio denſitatis infinite parvæ deſcribi poteſt,] & ejuſmodi aliæ curvæ, quæ, circa axem verticalem, ab utraque parte, deorſum verſus, extenduntur in ramos ſibi mutuo ſimiles, in natura rerum admitti non poſſunt, etſi vel maxime mediorum denſitates pro arbitrio moderari in noſtra poteſtate eſſet. Ubi enim reſiſtentia in aſcenſu eſt poſitiva, eoque nomine phyſice poſſibilis; eo ipſo fit negativa in deſcenſu, & ideo impoſſibilis; vel vice verſa, ſi poſſibilis eſt deſcendendo, fit pro aſcenſu impoſſibilis, utpote negativa.

XLI.

Utrum vero linea aliqua aſcenſu, an deſcenſu deſcriptibilis ſit, cognoſcitur ex ipſa noſtra formula $R = G. (2Cb - dCG) : \mp 2Cc$, in qua ſi dCG ſuperat $2Cb$, aſcenſus eſt poſſibilis;

* Vide ad calcem hujuſce Numeri.

is; ſecus vero deſcenſus: contrarium accidit cum $2\,Cb$ majus eſt quam dCG. Ergo, ubi neutrum neutro majus eſt, ſeu cum $2\,Cb = dCG$, id quod fit in parabola communi; hoc ſolo caſu, aſcenſus & deſcenſus eſt poſſibilis, reſiſtentia quippe tunc nulla eſt.

XLII.

Quod ſi vero linea data LC ejus ſit conditionis, ut, creſcentibus abſciſſis LR, decreſcant coradii CG, & ideo etiam velocitates NR, ſicuti fit in circulo; erunt elementa dCG negativa, atque ideo R ad G, ſeu reſiſtentia ad gravitatem, ut $2\,Cb + dCG$ ad $\mp 2\,Cc$; ſeu, quemadmodum jam monuimus, ut duplum elementi abſciſſæ, auctum elemento coradii poſitive ſumto, ad duplum elementi curvæ ipſius propoſitæ; cujus rationis exponens, cum ſemper ſit negans in aſcenſu, & ſemper affirmans in deſcenſu patet omnes ejuſmodi lineas curvas in univerſum ſumtas pro ſolo deſcenſu, inſervire poſſe; quod in circulo quidem obſervavit ſummus NEWTONUS, *pag.* 266, ſed in aliis inobſervatum præteriit. Verum & hoc inſuper patet, quod obiter tango, pro circulo in ſpecie, in quo elementum coradii poſitive ſumtum, elemento ipſius abſciſſæ æquale eſt, haberi $R : G = 3\,Cb : 2\,Cc =$ [vid. Fig. *Newt.* pro circulo] $3\,OG : 2\,OK$; quod jam ſupra oſtenſum confirmat. TAB. XXI. *Fig.* 1.

XLIII.

Cum igitur, pro determinatione reſiſtentiæ in qualibet curva, requiratur cognitio Coradii evolutæ, vel circuli oſculatoris; non alienum erit, ſi commodam hic pro eo exhibeam formulam. In *Actis Lipſ.* ann. 1701 *pag.* 137 †, dedi modum univerſalem exprimendi, in differentialibus tantum primis, radium oſculi, ſeu evolutæ; quippe quem oſtendi æqualem eſſe $dt^3 : dudy^2$, [per u intelligo quantitatem ex x, y & conſtantibus utcunque compoſitam, in æquatione differentiali ad curvam $dx = u\,dy$; ad talem enim omnes reduci poſſunt:] quoniam igitur radius evolu-

† Supra N°. LXVIII.

evolutæ eſt ad ſuum coradium ſemper, ut elementum curv
ſeu dt, ad elementum applicatæ ſeu ad dy, invenietur corad
$= dt^2 : du\,dy$.

X L I V.

Inventis hoc modo celeritate & reſiſtentia, ſupereſt ut m
dii denſitas D quoque determinetur. Hæc autem ex illis fiu
independenter a natura curvæ; nam deducenda eſt ex ſola h
potheſi, ſive ſit arbitraria, ſive naturalis. Sic ſi R hic ponat
$= VVD$; hoc eſt, ſi reſiſtentia ſit in ratione compoſita e
duplicata velocitatis & ex ſimplici denſitatis, erit $D = R : VV$
ſeu denſitas erit conjunctim ut reſiſtentia directe & quadratu
velocitatis inverſe; ita ut nihilo alio opus ſit quam ſupra inve
tum valorem ipſius R dividere per quadratum velocitatis, ſi
per coradium C G.

X L V.

Si quis hanc regulam ſequatur, comperiet, quod ſupra di
xi, ſimilem nempe lapſum identidem commiſſum circa hyper
bolam in Opere *Newton.* pag. 268 *, ubi Vir Inclytus inveni
Tab. XXI. Fig. 4. Reſiſtentiam ad Gravitatem ut X Y ad Y G [vid. ipſius fig.
pro quo ſcribendum eſt ut 3 X Y ad 2 Y G; ſicuti etiam pag
ſequ. 269 †, qua agitur de hyperbola gradus indefiniti n, pro
aſſignata ratione reſiſtentiæ ad gravitatem ut X Y ad $(3nn + 3n)$
$VG : (n + 2)$, ſubſtitui oportet hanc alteram ut X Y ad
$(2nn + 2n) VG : (n + 2)$. Nec non pag. 274 †† [ſerperet
enim error per omnia quotquot fierent exempla] ubi applicatio
inſtituitur ad parabolam indefiniti pariter gradus n, concluditur-
que reſiſtentia ad gravitatem, ut [vid. Fig. Autoris] T G
Tab. XXI. Fig. 5. ad $(3nn - 3n) VG : (n - 2)$, ſed rectius ut T G ad
$(2nn - 2n) VG : (n - 2)$, & quidem pro deſcenſu, nam
pro aſcenſu ponendum eſt ut T G ad $(2nn - 2n) VG : (2 - n)$;
ita ut aſcenſus hic, non quolibet caſu, ſit in natura poſſibilis,
ſed tunc tantum quando n ſimul major eſt unitate & minor bi-
nario; ſecus enim, ſi extra hos limites cadit, parabola nonniſi
pro

* Supra, pag. 490. † pag. 492. †† pag. 493.

o deſcenſu inſerviet, hoc eſt grave cum debita velocitate ex . projectum ſecundum tangentem, deſcribere quidem poteſt cum AX deſcendendo, ſed non arcum AG aſcendendo; uod ipſe ſagaciſſimus NEWTONUS animadvertiſſe non videur. Sed pergo ad ſolutionem problematis quod *Newtoniano* nulto eſt generalius.

XLVI.

PROBLEMA II.

Tendat vis gravitatis non uniformis, ſed quacunque data lege variabilis, ad punctum aliquod datum, tanquam ad centrum virium; ſitque reſiſtentia utcunque ex ratione denſitatis & velocitatis compoſita. Quæruntur velocitas, reſiſtentia, & denſitas in locis ſingulis, quæ faciant. ut corpus in data quavis linea moveatur.

SOLUTIO. Eſto itaque LC curva quævis data; centrum virium X, per quod ducta recta LX pro axe habeatur, & quævis alia CX pro linea directionis; ſit item evoluta IO; radius ejus CO pertinens ad quodvis punctum C; coradius CG & ſubradius OG, angulum rectum facientes ad G. Centro X, radioque XC, deſcripto arcu CR, & eidem proximo *cr*; ad puncta R, *r*, intelligantur applicatæ RN, *rn*, quæ deſignent velocitates mobilis in C, *c*; ita ut N, *n*, ſint in curva velocitatum EN*n*. TAB. XXIII. *Fig.* 5.

XLVII.

Concipiatur nunc, ſuper axe PD in LX prolongato, parabola PQ, cujus applicata quælibet QD exprimat velocitatem, quam in medio non reſiſtente corpus aliquod acquireret, ſi ex altitudine PD deſcenderet, vi uniformis gravitatis æqualis ei quam habet projectile in L. Concipiatur præterea, ſuper eodem axe, alia parabola PV, cujus quævis applicata VT ſimiliter deſignet velocitatem, quam mobile aliquod acquireret, ſi in medio non reſiſtente caderet ex altitudine PT, vi uniformis gravitatis æqualis ei quam projectile habet in diſtantia RX, vel in loco C.

XLVIII.

XLVIII.

Quod ſi jam velocitatem in C, hoc eſt, applicatam N
determinare lubeat; ſimili argumento, quo ſupra §. XXX
factum eſt, concludam, ob æqualitatem vis centrifugæ &
oppoſitæ retractionis a gravitate oriundæ, $NR^2 : CO$
habere ut CG. G: CO [per G jam intelligo gravitatem,
vim centralem data lege variabilem] adeoque NR^2 ut C
G, & NR ut $\sqrt{CG.} \sqrt{G}$: hinc ſequitur velocitatem p
jectilis, in quovis puncto C, eſſe in ratione compoſita ex
duplicata coradii & ſubduplicata vis gravitatis, ſeu NR: E
$= \sqrt{(CG.G)} : \sqrt{(LI.g)}$; per g intelligo vim gravita
in diſtantia XL, vel in ipſo loco L.

XLIX.

Reſiſtentiam venabimur hac ratione: Ex punctis E & N d
tæ concipiantur duæ rectæ parallelæ axi LX, ſecantes parab
las PQ & PV in punctis Q & V, ex quibus applicen
QD & VT: Quoniam itaque altitudines PD & PT ſ
ponuntur ſpatia percurſa, in medio non reſiſtente, a duo
corporibus, quorum unum a vi gravitatis uniformis g,
terum a vi gravitatis uniformis G urgetur, erunt, per The
II, celeritates acquiſitæ conjunctim in ſubduplicata ratione
virium quam ſpatiorum emenſorum; hoc eſt, $\sqrt{(PT.}$
$\sqrt{(PD.g)} = VT : QD = NR : EL = \sqrt{(CG.}$
$\sqrt{(LI.g)}$; adeoque $PT : PD = CG : LI$. Eſt vero
Hugenianis ſupra citatis, $PD = \frac{1}{2} LI$; ergo, etiam PT
$\frac{1}{2}$ CG. Quare ſi ducta intelligatur rectæ NV parallela
& applicata tu, ut habeatur particula Tt, quam dum
pus, per gravitatis vim G, velocitate VT percurrit, pro
tile vero, æquali velocitate NR percurrit particulam cu
Cc, utrumque acquirit æquale velocitatis incrementum,
nempe iu, hoc hn: unde ſimili ratione, ut ſupra §. XXX
factum, elicio $G : \frac{OG.G}{CO} \pm R = Cc : Tt$, vel etiam G:
$\pm R = Cc : Tt$.

L.

Ut vero innoteſcat quid hic ſit Tt, advertendum eſt, ob variabilitatem gravitatis G, etiam parabolam PV eſſe variabilem; quare huic proxima intelligitur parabola PW, cujus nempe, applicata quælibet $W\theta$ exprimat velocitatem acquiſitam, in medio non reſiſtente, pro altitudine $P\theta$, a vi gravitatis uniformis, & æqualis ei quam projectile habet in c, vel in diſtantia Xr, hoc eſt, quæ ſit $G + dG$. Sit itaque $W\theta$ applicata ex puncto W, in quo parabola illa ſecat rectam nu. Jam vero, ex eo quod PT ſit ſemper $= \frac{1}{2}$ CG: adeoque & $P\theta =$ ſemicoradio ad punctum c pertinenti, erunt & differentiæ inter ſe æquales, ſeu $T\theta = \frac{1}{2} dCG$. Verum, ob θW & tu æquales, quæ velocitates denotant in θ & t, a gravitatibus uniformibus $G + dG$ & G generatis, erunt quoque producta ſpatiorum percurſorum per reſpectivas gravitates æqualia, utpote quæ quadratis iſtarum velocitatum proportionentur, per Theor. II. Hoc eſt $P\theta \times (G + dG) = Pt \times G = (P\theta + \theta t) \times G$, & demtis æqualibus, remanebit $\theta t \times G = P\theta \times dG =$ [ob differentiam inaſſignabilem inter PT & $P\theta$] $PT \times dG$; ideoque $\theta t = PT \times dG : G$; aggregando itaque $T\theta$ & θt, habebitur $Tt = \frac{1}{2} dCG + PT \times dG : G =$ [ob $PT = \frac{1}{2} CG$] $\frac{1}{2} dCG + CG.\, dG : 2G = (G.\, dCG + CG \times dG) : 2G = d(CG.\, G) : 2G$. Suffecto hoc valore ipſius Tt in analogia ſuperiori, prodit $G : \frac{Cb}{Cc} G \pm R = Cc : \frac{d(CG.\, G)}{2G}$; ex qua habetur $R = (2Cb.\, G - d(CG.\, G)) : \mp 2Cc$.

L I.

Quod ut ſymbolice exprimatur [poſitis Rr vel Cb, dx; bc, dy; Cc, $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$] velocitas, quæ ſupra inventa eſt proportionalis ipſi $\sqrt{(CG \times G)}$ vocetur v, adeoque vv pro $CG \times G$ & $2vdv$ pro $d(CG \times G)$ ſcribi poteſt; quo facto Reſiſtentia R erit $= (Gdx - vdv) : \mp dt$.

LII.

Nota interim, quod cum Rr, vel Cb, vel dx, conſiderari poſſit tanquam differentiale ipſius XC vel XR; æque ac ipſius LR; cum qua creſcente, & ipſa vis gravitatis G, & velocitas v, ut creſcentes ſupponuntur, dum in ſchemate parabola PW major quam parabola PV, & recta rn major quam recta RN repræſentantur; hinc quoque in applicatione Regulæ ad exempla, dx & dG contrariis ſignis ſunt afficiendæ, ſi XC vel XR vocetur x; quia tunc x & G contraria ratione creſcere ſupponit figura; adeoque manente dG & dv cum ſigno ſuo, pro $+dx$ ſcribendum eſt $-dx$, & $+dx$ pro $-dx$; ſed ſi LR dicatur x, nihil in ſignis mutandum erit: quod majoris cautelæ gratia monuiſſe ſufficiat.

LIII.

Denſitas medii, poſt velocitatis & reſiſtentiæ inventionem, ex qualibet hypotheſi aſſumta, nunc ſponte fluit, ut ſupra jam vidimus. Exempli gratia, ſit $R = vv\,D$, hoc eſt, ſi reſiſtentia ſupponatur in ratione compoſita ex ſimplici denſitatis & duplicata velocitatis; habebitur viciſſim denſitas ut reſiſtentia directe & quadratum velocitatis inverſe, adeoque $D = R : vv = (Gdx - vdv) : \mp vvdt$. Et in univerſum, ſi ſupponatur $R = v^n D$ [per n intelligo exponentem cujuſvis poteſtatis] erit utique $D = R : v^n = (Gdx - vdv) : \mp v^n\,dt$.

LIV.

Ad exempla non deſcendo, cum præſertim hanc materiam, alio modo & via analytica, jam olim pertractaverim, cujus quoddam ſpecimen, ante aliquot annos, Illuſtr. Academiæ Scient. Reg. Gall. exhibui, * commentariis ſuis annuis, ſi dignum deprehenderit, publicandum; quod quidem jam factum per-

* Supra N°. LXXXVI.

percipio in Tomo ad An. 1710 qui nuper demum prodiit. Unici tamen exempli loco, quod inſtar omnium ſit, ſumamus ſpiralem logarithmicam, quæ radios omnes ex centro virium ductos interſecat ad angulos datos.

L V.

Eſto igitur LC talis ſpiralis, centrum virium X, ex quo ducta quælibet XC, faciat cum curva angulum datum XCc, cujus ſecans ſit ad ſinum totum ut m ad 1. Ponatur vis gravitatis, vel vis centripeta, reciproce ut dignitas quælibet n data diſtantiæ locorum, aut quod perinde eſt ponatur $G = 1 : XC^n = XC^{-n}$, ut & $R = vvD$. Nunc, quoniam in hac curva puncta G & X coincidunt, ſive $GC = XC$, erit $v\ [= \surd(CG \times G)] = XC^{(1-n):2}$, $R\ [= (G\,dx - v\,dv) : \mp dt] = \frac{3-n}{\mp 2m} XC^{-n}$, & $D\ [= R : vv] = \frac{3-n}{\mp 2m} XC^{-1}$; hoc eſt, velocitas in ſingulis locis C eſt ut dignitas diſtantiæ locorum, cujus index eſt $(1-n) : 2$, Reſiſtentia ut ejuſdem alia dignitas, cujus exponens eſt $-n$, multiplicata per coëfficientem $(3-n) : \mp 2m$, vel, quia hic invariabilis eſt, ſimpliciter ut diſtantiæ dignitas exponentis $-n$, niſi ſit $n = 3$, quo caſu, evaneſcente iſto coëfficiente, & ipſa reſiſtentia evaneſceret, ſeu evaderet nulla. Denſitas demum eſt, ut diſtantiæ dignitas, cujus index eſt -1, ducta etiam in coëfficientem $(3-n) : \mp 2m$, vel ſimpliciter, reciproce ut diſtantia locorum: niſi ſit pariter $n = 3$; nam & denſitas hoc caſu evaneſceret; quod quidem ex reſiſtentia evaneſcente ſtatim manifeſtum erat. Ex quibus omnibus varia fluunt conſectaria.

L V I.

Consectarium I.

Si n major ſit quam 3, ſpiralis per aſcenſum; ſin minor, per deſcenſum deſcribitur; ſi vero $n = 3$, poterit illa per aſcenſum & per deſcenſum deſcribi; tunc enim tam denſitas quam reſiſtentia nulla eſt: unde patet ſpiralem logarithmicam deſcribi in medio non reſiſtente, cum vis gravitatis, ſeu vis centripeta, eſt reciproce ut cubus diſtantiæ a centro virium, quod in ipſo centro curvæ exiſtit; prorſus ut Newtonus invenit pag. 47, licet vox *reciproce* ibi ſit omiſſa, lapſu, ut credo, typothetæ.

L V I I.

Consectar. II.

Sequitur ex noſtra demonſtratione, Virum ſæpe laudatum Propoſitioni ſuæ XV, pag. 284 * non omnem dediſſe amplitudinem, quam dare potuiſſet, quando dicit, *Si medii denſitas, in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum, ſitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatum;* quod *corpus gyrari poteſt in ſpirali, qua radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato:* Si enim dixiſſet *in quacunque multiplicata ratione denſitatum*, propoſitio in hoc ampliori ſenſu ſumta non minus vera fuiſſet: quovis quippe numero pro n admiſſo in dignitatem diſtantiæ locorum, exurgit medii denſitas reciproce ut ipſa diſtantia; excepto, ſi vis, caſu quo $n = 3$, qui denſitatem facit nullam, vel potius infinite parvam; ita ut aliquo ſenſu etiam ſit reciproce ut diſtantia locorum; cum nihil obſtet, quominus infinite parva inter ſe comparentur, non minus quam finita.

L V I I I.

Consect. III.

Quandoquidem igitur ſuppoſita vis centripeta in quacunque ratione

* Supra pag. 495.

ratione multiplicata diſtantiæ, ſive directa, ſive reciproca, ſemper requirit, pro ſpirali logarithmica deſcribenda, medii denſitatem reciproce ut diſtantiam ſimplicem, revidendam commendamus Illuſtri NEWTONO demonſtrationem ſuam Prop. XVI. pag. 288 *, qua aſſerit *medii denſitatem poſſe eſſe reciproce, ut quævis dignitas diſtantiæ locorum; dummodo vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia in dignitatem illam ducta.*

LIX.

CONSECT. IV.

Cum ſupra, §. XLIX, inventa ſit $PT = \frac{1}{2} CG$, ſequitur corpus in medio non reſiſtente gyrari poſſe in circulo, cujus radius $= CG$, quando eadem vi gravitatis ad centrum urgetur & eadem celeritate gyratur, quas habet mobile in curvæ puncto C: fiunt enim hoc pacto vis centripeta & vis centrifuga æquales. Unde, in ſpeciali exemplo logarithmicæ ſpiralis, ubi punctum G cadit in X, velocitas in loco quovis C, ea ſemper eſt, quacum corpus in medio non reſiſtente gyrari poteſt in circulo ad eandem a centro diſtantiam XC: quod idem invenit Vir ſummus, quanquam pro ſua tantum hypotheſi nimis reſtricta de vi centripeta in duplicata ratione denſitatis. Vid. Coroll. I. pag. 285. †

LX.

CONSECTAR. V.

Mutetur jam ſpiralis obliquitas, ita ut anguli XCc ſecans ſit ad ſinum totum, ut p ad 1; erit jam denſitas ad denſitatem in priore ut $\frac{3 - n}{+ 2p} XC^{-1}$ ad $\frac{3 - n}{+ 2m} XC^{-1}$, hoc eſt, ſi datur diſtantia XC, ut $1 : p$ ad $1 : m$; adeoque denſitas proportionalis eſt $Cb : Cc$, ſive $OG : OC$; ſi vero diſtantia illa non datur, erit denſitas ut $OG : OC . XC$. Quod con-

* Supra pag. 500, 501. † pag. 497.

congruit Corollario 2°. *Newtoniano*, pag. 285 & 286 †, quamvis ex particulari hypotheſi deducto.

L X I.

Consect. VI.

Vis reſiſtentiæ $\frac{3-n}{2m} XC^{-n}$ poſitive ſumta eſt ad vim centripetam XC^{-n} ut $(3-n) : 2$ ad m; in hypotheſi vero particulari, ubi $n = 2$, erit ut $\frac{1}{2}$ ad m; hoc eſt ut $\frac{1}{2}$ Cb ad Cc, ſive ut $\frac{1}{2}$ OG ad OC. Sic igitur tertium Coroll. *Newton.* pag. 286 † in hoc tantum caſu valet. Idem etiam de Coroll. ſequenti quarto dici poteſt: Nam licet, in caſu iſto, corpus nequeat gyrari in ſpirali logarithmica, niſi cum vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ, poteſt tamen gyrari, in quacunque ſint alia ratione duæ illæ vires, ſi tantum n debito modo major minorve ſupponatur quam 2. Si, exempli gratia, $n = 1$, hoc eſt, ſi vis centripeta ſit ut ipſa medii denſitas, vel reciproce ut diſtantia locorum; erit vis reſiſtentiæ ad vim centripetam ut 1 ad m; nempe ubique ut Cb ad Cc, ſeu ut CG ad OC; unde patet corpus in hac ſpirali gyrari poſſe, modo vis reſiſtentiæ minor ſit quam tota vis centripeta. Et quod ſingulare eſt in hoc caſu, velocitas ubique eſt uniformis; ſit enim $v \,[= XC^{(1-n):2}] = XC^{0:2} = 1$.

L X I I.

Consect. VII.

Liquet porro, cum in velocitatis expreſſione $v = XC^{(1-n):2}$ non ingrediatur littera m, fore velocitatem, in diſtantiis a centro æqualibus, in omnibus hiſce ſpiralibus æqualem; adeoque tempora aſcenſus vel deſcenſus eſſe ut ipſas longitudines ſpiralium, & quidem in generali hypotheſi, ſicuti Newtonus pag.

† Supra pag. 497.

pag. 286 †. Coroll. 5, idem indicat pro caſu particulari $n=2$. Sed multa alia prætereo, atque Lectori, ut quouſque noſtra cum *Newtonianis* conveniant ipſe examinare poſſit, lubens relinquo.

LXIII.

Quod ſupereſt, non neceſſe duco, ut multis moneam, Regulam noſtram generalem, de motu projectilium in mediis reſiſtentibus, comprehendere etiam caſus omnes, qui formari poſſunt de mediis non reſiſtentibus. Velocitas quippe, quæ independenter a reſiſtentia ſe habet ut $\surd(CG.\,G)$, ſi ducitur in tempuſculum quo percurritur lineola Cc, & quod tempuſculum, in medio non reſiſtente, proportionale eſſe areæ circa centrum virium deſcriptæ, hoc eſt, triangulo CXc vel ejus duplo $CX.\,bc$ eleganter demonſtravit NEWTONUS pag. 37, provenit ipſa lineola percurſa Cc, ut productum, nempe ut $CX.\,bc \times \surd(CG.\,G)$; [eſt enim ſpatium uniformi velocitate percurſum in ratione compoſita ex velocitate & tempore]; ſumtiſque quadratis erit Cc^2 ut $CX^2.\,bc^2 \times CG.\,G$; unde G ſe habebit ut $Cc^2 : CX^2.\,bc^2.\,CG$; ſeu [quia ducta perpendiculari XS ad tangentem, $Cc : bc = CX : SX$, & ob ſimilia triangula OCG & XCS, $CG.\,CX = OC.\,SX$] ut $CX : OC.\,SX^3$, quod ipſiſſimum eſt Theorema pro lege virium invenienda ex natura curvæ datæ, mihi olim, ſed ſine demonſtratione, tranſmiſſum a pereximio Geometra *Abrahamo* MOYVRÆO, a me poſtea cum demonſtratione, quamvis ex alio fundamento petita, remiſſum. Eo itaque inſtar formulæ uti licebit, ad determinandam vim centripetam ex natura curvæ datæ; ſive etiam hanc ex illa, & ex utravis celeritatem ac tempus periodicum.

LXIV.

Hoc vero magni diſcriminis obſervandum eſt inter utrumque, quod prius, ubi, data curva, quæritur vis centripeta, peragitur per methodum differentialium directam, adhibendo nudam

† Supra pag. 498.

nudam tantum & ſimplicem terminorum differentiationem. Sed poſterius, quo nempe, ex data lege virium, quærenda eſt curva, paulo pluſculum laboris requirit in quibuſdam exemplis; in quibuſdam aliis ne quidem in poteſtate adhuc eſt, conceſſis licet figurarum quadraturis; nam tunc conſulenda venit methodus integralium, quæ prioris eſt inverſa, ſed nondum ad optatam perfectionem evecta.

L X V.

Interim, quod non eſt ſilentio prætereundum, ſæpe per hanc methodum, ut fieri ſolet, plures diverſi generis curvæ eidem quæſito ſatisfaciunt. Sic, exempli gratia, ſi quæratur curva, quam mobile, in medio non reſiſtente, deſcribit, ſuppoſita vi centripeta in ratione reciproca cuborum diſtantiarum; cui quæſito ſupra, cum Celeb. NEWTONO, diximus reſpondere ſpiralem logarithmicam; præterea aliam alius generis ſpiralem ſatisfacere dudum obſervavi, quæ hanc habet naturam, ut ducta recta ex umbilico ad quodvis in curva punctum ſit reciproce proportionalis angulo, quem eadem recta cum alia poſitione data

TAB. XXIII. *Fig.* 6. conſtituit: vel, quod eodem recidit, ſit X centrum circuli ABH & ſimul umbilicus ſpiralis CDE, hac proprietate gaudentis, ut ad ejus quodvis punctum C ducta recta XC ſe habeat reciproce ut arcus AB, initium ſumens a puncto quodam fixo A; ſeu, ſi mavis, ut rectangulum $XC \times AB$ ſit dato æquale; ita ut non incongrue hæc ſpiralis vocari poſſit *Hyperbolica*, vel etiam *Archimedea inverſa*; utpote, quæ cum *Archimedea ordinaria* hoc commune habet, quod in utraque diſtantiæ punctorum ab umbilico ſint proportionales circulationibus emenſis, in *Archimedea* vulgari *directe*, in noſtra vero *inverſe*.

L X V I.

Ut itaque hæc noſtra ſpiralis hyperbolica CDE (quæ aſymtoton habet LM parallelam rectæ XA, & ab ea diſtantem intervallo æquali arcui AF, vel cuicunque alii arcui concentrico

trico G C inter axem X A prolongatum, & curvam ipſam intercepto, omnes namque iſti arcus ſunt inter ſe æquales, ut, inquam, hæc ſpiralis deſcribi poſſit, in medio non reſiſtente; dico, requiri vim centripetam quæ ſit in triplicata ratione reciproca diſtantiarum. Hoc ita ſe habere non ſecus ac in ſpirali logarithmica, facile quivis per regulam noſtram comperiet.

L X V I I.

Neque hoc ſatis eſt; dico præterea, non tantum infinitas eſſe curvas, quæ reciprocam rationem triplicatam diſtantiarum pro lege virium admittant, ſed & ex utraque curvarum claſſe, vel potius ex earum duobus ſummis generibus, nempe tam algebraïcarum quam tranſcendentium, ſuppetere quaſdam ſpecies, quamvis diverſiſſimas. Sunt enim quædam, ad quarum conſtructionem requiritur comparatio linearum circularis & rectæ; quædam aliæ, quæ ſupponunt comparationem arearum circuli & hyperbolæ; quædam etiam, ubi arcus circulares ſecum invicem comparandi veniunt; atque inter has, quod mireris, innumeræ dantur prorſus algebraïcæ, magis minuſque compoſitæ, & ad quemvis dimenſionis gradum aſcendentes: cui aſſerto ut fidem faciam, docebo hic naturam harum curvarum, pro quibus legem virium centripetarum, ope Theorematis *Moyvræani* ſupra demonſtrati, quilibet facile inveniet, ac videbit eam eodem modo ſe habere ut in duabus ſpiralibus logarithmica & hyperbolica. Quomodo vero ad ipſarum curvarum cognitionem me perduxerint calculi integralis certa compendia mihi uſitata, non eſt hujus loci ut explicem.

L X V I I I.

Ecce interim curvarum illarum ex arcuum comparatione univerſalem conſtructionem: Per centrum virium, quod ſit in X, ductæ rectæ pro axe inſervienti X A agatur, intervallo arbitrario, parallela Z G; dein centro X deſcriptis arcubus TAB. XXII. *Fig.* 7.

concentricis AM, BN, CO &c. qui ſinguli ad partem ſuam a parallela ZG terminatam, habeant datam aliquam rationem conſtantem, nimirum ut ſit $a : b$ = AG : AM = BH : BN = CI : CO = &c. orietur curva MNOP, quæ algebraïca eſt, ſi ratio data a ad b ſit numeri ad numerum, quamvis pro rationis illius diverſitate diverſæ quoque dimenſionis curva exiſtat; ſecus vero, ſi a & b ſint incommenſurabiles, erit curva tranſcendens. Utcunque autem ſe habeat ea ratio a ad b, & qualiſcunque inde emergat curva, ſive algebraïca, ſive tranſcendens; dico fore hanc curvam ſemper ejus naturæ ut ad ipſam deſcribendam corpus requirat vim centripetam tendentem ad punctum X, atque cubis diſtantiarum reciproce proportionalem; hoc eſt, ut vis in loco M ſit ad vim in loco quovis alio N, ut viciſſim XN^3 vel XB^3 ad XM^3 vel XA^3. Curva hæc raris affectionibus gaudet; habet enim primo duas aſymtotos a centro virium X æqualiter remotas, nempe diſtantia quæ eſt quarta proportionalis ad a, b, & perpendicularem XZ, atque una ex illis aſymtotis parallela eſt axi XA, atque altera cum eadem angulum facit qui ſe habet ad angulum rectum ut $2b$ ad a. Quod inſuper animadverſione dignum eſt, ſi b aliquoties ſuperat $2a$, curva priuſquam deſinat in aſymtotos, tot gyros integros circa centrum X conficit, quot ſunt unitates in $b : 2a$. Et in ſpecie quidem, ſi $b = 2a$, curva ſemel tantum circa centrum circulatur, ab una nimirum extremitate infinita procedens & in alteram deſinens: ita ut jam ambæ aſymtoti ſint axi parallelæ & ab eodem diſtantes intervallo, quod duplum eſt intervalli parallelæ ZG, hoc eſt duplum perpendicularis XZ. Si b minor quam a, curvæ MNOP erit convexa verſus axem XA, eamque tunc deſcribere poteſt mobile ſi vis centripeta ſit negativa, hoc eſt, ſi mutetur in vim centrifugam, proportionalem tamen reciproce cubis diſtantiarum a centro X. Sed nimium hiſce immoror, pergo ad alia.

LXIX.

LXIX.

Quemadmodum igitur ex eo, quod pro gyratione corporis in ſpirali logarithmica, requiritur vis centripeta in reciproca triplicata ratione diſtantiarum, male quis concluderet hujus propoſitionis converſam, aſſerendo nempe *quod ergo viciſſim, poſita hac lege vis centripeta, neceſſe ſit, ut curva exiſtat ſpiralis logarithmica;* ſi quidem altera ſpiralis hyperbolica, & aliæ multæ curvæ, tam algebraïcæ quam tranſcendentes, eadem virium lege gaudeant: Ita quoque ex eo quod demonſtratur corpus gyrans in ſectione conica, centro virium exiſtente in foco, requirere vim centripetam reciproce proportionalem quadratis diſtantiarum, non ſine aliqua paralogiſmi ſpecie colligitur, ſuppoſita iſta virium centripetarum proportione, curvam motu corporis deſcribendam fore Sectionem Conicam, tametſi NEWTONUS ipſe in eundem lapidem impegerit, Vid. pag. 55. Coroll. II, ut & in ſimili caſu pag. 49. Coroll. I; niſi prius demonſtretur, hic ſe rem aliter habere, quam in hypotheſi virium cubis diſtantiarum reciproce proportionalium, quam diverſis curvis convenire poſſe oſtendimus; atque ſectiones conicas ſolas eſſe, quæ admittant vires in duplicata reciproca ratione diſtantiarum.

LXX.

Hanc autem converſam primus ego, quod ſciam, inveni ac demonſtratam dedi prælaudatæ Acad. Reg. Scient. Gall. quam poſtea, me monente, ſua quoque Demonſtratione munivit Celeb. noſter HERMANNUS; ita ut nunc de Orbitis Planetarum, veram Ellipſium conicarum formam habentibus, dubitare amplius non liceat; conceſſa ſcilicet eorum attractione verſus Solem quadratis diſtantiarum reciproce proportionata: de qua veritate antea certi eſſe non poteramus. Quid ſi enim plures curvæ diverſi generis eidem huic virium centralium legi reſpondiſſent, ut alteri iſti reciproce triplicatæ reſpondere vidimus? Sane non video, cur Ellipſes potius quam alias

curvas, quæ æque ſatisfacerent, Planetarum Orbitis attribueremus.

L X X I.

Atque hactenus prolata ſunt quædam tantum ex Obſervationibus jam olim mihi ſubnatis ex lectione operis *Newtoniani;* ea vero nunc demum cum publico communicare volui, quia intelligo alteram hujus Operis Editionem parari, quæ hoc adhuc Menſe, quo hæc ſcribo, prælum ſit evaſura, multis annotationibus, correctionibus, noviſque inventis aucta & exornata; inter quas correctiones eam quoque conſpectum iri audio, quam ſupra §. XXXII. inſerui, de non recte definita ratione reſiſtentiæ ad gravitatem in Opere NEWTONI pag. *265*, quamque Vir incomparabilis ab Agnato meo *Nicolao* BERNOULLIO, ſtudiorum noſtrorum Cultore ſolertiſſimo, nuper in Anglia degente, ante abſolutam impreſſionem novæ Editionis, opportune monitus, ſingulari ſcheda libro ſuo inſerere non fuit dedignatus.

L X X I I.

Hanc vero materiam præ cæteris enucleandam duxi, quod ea, fatente Viro ſummo, pag. *290*, perplexæ eſſet diſquiſitionis atque adeo explanationem & dilucidationem imprimis requireret; num vero ſcopum attigerim, judicium ſit penes Lectorem: hoc mihi ſaltem ſuffecerit, ubi videro ipſum NEWTONUM hæc mea qualiacunque approbaturum; ſi mihi præſertim tam felici eſſe contingeret, ut quæ Vir laudatiſſimus de hoc argumento ediderit correctiora [ſecundæ quippe curæ emendant priores] ea cum hiſce meis eſſent, ſi non prorſus eadem, ſaltem, quod ſpero, non diſſentanea.

L X X I I I.

Cæterum agnoſcet, opinor, Incomparabilis NEWTONUS, me hic aliud nihil intendiſſe, quam quod ipſe petit a Lectore ſuo

ſuo in fine Præfationis ; abſuit nimirum longiſſime animus reprehendendi lapſus in materia tam difficili ; quin potius eos candide corrigere, defectus quoſdam [quorum pauci ſunt in tam vaſto opere] benigne ſupplere, atque veritatem novis conatibus inveſtigare, fuit id quod ubique mihi propoſui.

Additio ad §. XXXVIII.

Ut analogia inter reſiſtentiam & gravitatem, quæ hic uniformis ſupponitur [$R : G = 2\,Cb - dCG : \mp 2\,Cc$,] exponi poſſit per quantitates ordinarias & finitas, pro univerſali formula: Concipiantur coradius cg, & ſubradius og, priori coradio & ſubradio proximi, quorum ille ſecet OG in puncto F. Sitque OH radius evolutæ ſecundæ, per cujus nempe evolutionem generatur evoluta prima IO. Sit pariter evolutæ ſecundæ coradius OM, & ſubradius HM. Hinc quia per naturam Evolutarum $CO : OH = Cc : Oo$, & $OH : HM$ [$= CO : CG$] $= Oo : Fg$, erit ex æquo $CO : HM = Cc : Fg$, unde $Fg = HM.\,Cc : CO$; adeoque dCG, hoc eſt $cg - CG$, vel $Fg - Cb = HM.\,Cc : CO - Cb$, & $2\,Cb - dCG = 3\,Cb - HM.\,Cc : CO$; quo ſubſtituto in analogia noſtra $R : G = 2\,Cb - dCG : \mp 2\,Cc$, mutatur in hanc $R : G = 3\,Cb - \frac{HM.\,Cc}{CO} : \mp 2\,Cc$; in qua ſi porro ſubrogentur, pro Cb & Cc, earum proportionales OG & CO, prodibit hæc nova $R : G = 3\,OG - HM : \mp 2\,CO$; Hoc eſt reſiſtentia ſe habebit ad gravitatem ut triplum ſubradii evolutæ primæ multatum ſubradio evolutæ ſecundæ, ad duplum radii ipſius evolutæ primæ. Ex quo ſtatim judicare licet de poſſibilitate phyſica aſcenſus vel deſcenſus per curvam. Si enim $3\,OG - HM$ ſit quantitas negativa, vel, quod idem eſt, ſi ſubradius evolutæ ſecundæ major ſit triplo ſubradii evolutæ primæ, aſcenſum pronunciabimus poſſibilem; ſin ille minor ſit triplo hujus, hoc deſcenſum phyſice poſſibilem arguet. Si vero æqualis ſit, quod fit in parabola ordinaria, natura utrumque admittet, nam reſiſ-

TAB. XXI. Fig. 3.

[illegible] *MOTU PENDULORUM* &c.

[illegible] Quod attinet ad formulam §. L., qua [illegible] $= (2\,CB.G - d\,(CG.G)) : \mp 2Cc$, [illegible]itatis variabilis, pro diverſa ratione diſ[illegible]um, poſſet illæ quoque univerſaliter ex[illegible]ſitas, ſi tempus & locus id permitteret: [illegible]ſtro faciendum relinquimus.



INDEX NUMERORUM

Quos TOMUS PRIMUS *complectitur.*

NUM. I. Diſſertatio de Effervefcentia & Fermentatione, nova hypotheſi fundata, *pag.* 1
Appendix, De Mobili perpetuo artificiali, 41
II. *Novum Theorema, pro Doctrina Sectionum conicarum,* 45
III. *Inventio Curvæ geometricæ, quæ ſpirali æquatione algebraïca expreſſæ ſit æqualis,* 46
IV. Solutio Problematis Funicularii, 48
V. *Curvæ ſui evolutione ſe ipſas deſcribentes,* 52
VI. Solutio Curvæ cauſticæ, per vulgarem Geometriam *Carteſianam,* ibid.
De Curva quam perpetuo tangit recta data inter anguli recti crura gliſcens, deque curva per ejus evolutionem deſcripta, 57
De Evolutis & Cauſticis, methodo *Carteſiana* determinandis, 58
VII. Solution du Probléme de la Courbure que fait une voile enflée par le vent, 59
VIII. *De Lineis Cycloidalibus,* 61
IX. Solution du Probléme que Mr. DE BEAUNE propoſa autrefois à Mr. DESCARTES, 62
X. Solution du Probléme où l'on demande le jour du plus petit crepuſcule, 64
XI. Solutio Problematis CARTESIO propoſiti a D. DE BEAUNE, 65
Problema ab Eruditis ſolvendum, 66
XII *Avis aux Géomètres,* ou *Probléme propoſé ſur la réſolution des égalités,* ibid.
XIII. Solution du Probléme propoſé ſur la réſolution des égalités, 67
XIV. *Réponſe,* ou *Difficultés contre cette méthode,* 70
XV. Réponſe à l'Objection contre la méthode pour la réſolution des égalités, 72

XVI. Re-

NUM. XVI. *Remarques ſur cette Réponſe*, ou *Nouvelles inſtances co[illegible] la méthode*, pag. [illegible]

XVII. Poſitiones Logicæ, De Propoſitionibus, [illegible]
Adnexa Miſcellanea, [illegible]

XVIII. Diſſertatio, De Motu Muſculorum, [illegible]

XIX. Conſtructio facilis curvæ receſſus æquabilis a puncto dato, [illegible] rectificationem curvæ algebraïcæ, [illegible]

XX. Modus generalis conſtruendi omnes æquationes differentiales p[illegible] gradus, [illegible]

XXI. Additamentum effectionis omnium quadraturarum & rectifica[illegible]num curvarum per ſeriem quandam generaliſſimam, [illegible]

XXII. *Solutio Problematis de Curva æquilibrationis, per* March. HOSPITALIUM, [illegible]

XXIII. Animadverſio in præcedentem Solutionem, [illegible]
Demonſtratio identitatis curvæ æquilibrationis cum Cycloïde d[illegible]cripta ex circumvolutione rotæ ſuper rota æquali, [illegible]
Conſtructio generalis ejuſdem curvæ per communem Geometri[illegible], [illegible]
Animadverſio in CRAIGII Methodum quadraturarum, [illegible]
De Iſochronis paracentricis, [illegible]
Solutio Problematis cujuſdam Fraterni, [illegible]

XXIV. G. G. LEIBNITII, *Notatiuncula ad conſtructionem Curvæ æq[illegible]librationis*, 139

XXV. March. HOSPITALII *Addenda Solutioni Problematis de C[illegible] æquilibrationis*, 140
Additio, Problematis novi Propoſitio, 141

XXVI. Meditatio de Dimenſione linearum curvarum per circulares, 142

XXVII. Demonſtratio analytica & ſynthetica ſuæ conſtructionis Curvæ *Beauniana*, vice reſponſionis ad NIEWENTIITIUM, 145

XXVIII. D. TSCHIRNHAUSEN *Nova & ſingularis Geometriæ pro[illegible]tio, circa dimenſionem quantitatum Curvarum*, 149

XXIX. G. G. LEIBNITII *De novo uſu centri gravitatis ad dimen[illegible]nes, & ſpeciatim pro areis inter curvas parallelas deſcriptis, u[illegible] de parallelis in univerſum*, 153

XXX. Supplementum defectus Geometriæ *Carteſianæ* circa inventionem locorum, 155
Annotata quædam in Schediaſmata *Leibnitianum* & *Tſchirnhauſianum*, 158
De complanatione ſuperficierum conoidearum & ſphæroidearum, 160
Problema propoſitum, De linea celerrimi deſcenſus, 161

XXXI. Tetragoniſmus univerſalis figurarum curvilinearum, per conſtructionem geometricam continue appropinquantem, 162

XXXII. Pr[illegible]

NUM. XXXII. *Prorogatio Termini conceſſi ad ſolutionem Problematis de Linea celerrimi deſcenſus*, *pag.* 165
XXXIII. Programma, ſeu Propoſitio duorum Problematum, 166
Problema Mechanico-Geometricum, de Linea celerrimi deſcenſus, 167
Problema alterum pure geometricum, 169
XXXIV. DE TSCHIRNHAUSEN *Reſponſio ad Obſervationes* Bernoullianas *in Schediaſma ſuum*, 170
XXXV. De Conoidibus & Sphæroidibus quædam, 174
Solutio Analytica æquationis differentialis a Fratre propoſitæ, 175
Notatiunculæ in Reſponſionem a Nob. DE TSCHIRNHAUSEN nuper editam, 176
XXXVI. Principia calculi exponentialium, ſive percurrentium, 179
XXXVII. Curvatura radii in Diaphanis non uniformibus, Solutioque Problematis de invenienda Linea Brachyſtochrona, id eſt, celerrimi deſcenſus, & de Curva Synchrona, ſeu radiorum unda conſtruenda, 187
XXXVIII. Lettre ſur le Probléme des Iſopérimètres, 194
XXXIX. Problémes à reſoudre, 204
XL. Lettre ſur le Probléme des Iſopérimètres, qui contient la Solution de ce Probléme, 206
XLI. *Avis* [*de Mr.* Jaq. BERNOULLI] *ſur cette Solution*, 214
XLII. Réponſe à cet Avis, 215
XLIII. *Avis* [*de Mr.* Jaq. BERNOULLI] *ſur la Réponſe de ſon Frère*, 220
XLIV. Réponſe à ce ſecond Avis, 221
XLV. *Examen de la Solution du Probléme des Iſopérimètres, par Mr.* Jaq. BERNOULLI, 222
XLVI. *Avis* [du même] *ſur la ſeconde Réponſe de ſon Frère*, 230
XLVII. Extrait de Lettre pour ſervir de Réponſe aux précédentes, 231
XLVIII. *Extrait d'une Propoſition de la* Méchanique *de Mr.* DE LA HIRE, *ſur l'Iſochroniſme de la Cycloide*, 240
XLIX. Inveſtigatio algebraica arcuum parabolicorum aſſignatam inter ſe rationem habentium, 242
Detectio erroris Dni. DE LA HIRE, & Demonſtratio Iſochroniſmi deſcenſuum in Cycloide, 247
L. Theorema univerſale rectificationi Linearum curvarum inſerviens, 249
Nova Parabolarum proprietas, 250
Parabolæ cubicalis primariæ arcuum menſura, 252
LI. Jac. BERNOULLI, *Demonſtratio ſynthetica Problematis de infinitis Cycloidibus*, 253
Conſtructio aliorum Problematum huic affinium, 255
Solutio ſex Problematum fraternorum [N°. XXXIX.] *propoſitorum*, 256

Problematis fraterni, de Curva infinitas Logarithmicas ad ... ... ectos ſecante, pag. 259
... ta in ſolutiones fraternas Problematum quorundam ſuorum, 262
Problematum a Fratre propoſitorum de Trajectoriis ortho... ... bus, 270
... atio Medico-Phyſica de Nutritione, 273
... Problematis de Solido minimæ reſiſtentiæ, 307
... HOSPITALII, *Facilis & expedita Methodus inveniendi ſo... rotundum, in quod ſecundum axem motum minima fiat a refide reſiſtentia,* 311
... lido minimæ reſiſtentiæ, addenda iis quæ de eadem materia ... tur N°. LIV. 315
... ctio generalis æquationis differentialis, in qua alterutra in... minata deficit, 320
... onſtratio Theorematis *Leibnitiani*, Vires vivas eſſe in duplicata ... ne celeritatum, 321
... cloidis primariæ ſegmenta innumera quadraturam recipientia, ... umque ejuſdem ſpatiorum quadrabilium determinatio, 322
... BERNOULLI, *Quadratura zonarum cycloidalium demonſtra...* 328
... vas ſpatiorum cycloidalium quadraturas Augmentum, & de ... o gravitatis quædam, 330
... BERNOULLI *Quadratura zonarum cycloidalium promota. ... ema item Centri gravitatis ſectoris ſolidi Cycloidici ſolutum,* 336
... uvelle maniere de rendre les Baromètres lumineux, 337
... uveau Phoſphore, 349
... ttre de Mr. BERNOULLI touchant ſon nouveau Phoſphore, 357
... quiſitio Catoptrico-Dioptrica, exhibens Reflexionis & Refrac... ... s naturam, nova & genuina ratione ex æquilibrii fundamen... ... eductam & ſtabilitam., 369
... trait d'une Lettre ſur le Probléme des Iſopérimètres, 377
... ac. BERNOULLI *Nova Methodus expedite determinandi ra... oſculi, ſeu curvaturæ, in curvis quibuſvis algebraicis,* 379
... Nova ratio pr... te conſtruendi radios oſculi, ſeu curvaturæ, ... 381
... cis, per ... 383
... ali exhi... ... n qua... 386

... LXX.

NUM. LXX. Solution d'un Probléme concernant le Calcul integral, avec quelques abregez par rapport à ce Calcul, *pag.* 398
LXXI. Perfectio Regulæ pro determinando valore fractionis, cujus Numerator & Denominator certo caſu evaneſcunt, 401
LXXII. Probléme à reſoudre, Transformer une Courbe algébraïque en une infinité d'autres égales, 406
LXXIII. Craigii *Solutio Problematis, de Transformatione Curvarum,* ibid.
LXXIV. Motus reptorius, ejuſque uſus in addendis & ſubtrahendis Curvis, atque hinc deducta Problematis de Transformatione Curvarum genuina Solutio, 408
LXXV. Solution & Démonſtration du Probléme des Iſopérimètres, 424
De la courbure d'un linge chargé de liqueur, 432
LXXVI. *Sur la lumiere des Corps frottez,* 435
LXXVII. Inventa de appropinquationibus promtis ad metiendas figuras per motus repentis conſiderationem exhibitis, 437
LXXVIII. *Excerptum ex Epiſtola* Leibnitiana, *de eodem argumento,* 444
LXXIX. Excerptum ex Reſponſione *Bernoulliana,* de eodem argumento, 445
LXXX. Theorema pro peripheria elliptica ad circularem reducenda, 447
LXXXI. Craigii *De linearum curvarum longitudine,* 449
LXXXII. De *Craigiana* Solutione erronea Problematis de Transformatione Curvarum, 451
LXXXIII. Craigii *Recantatio,* 452
LXXXIV. Lettre ſur les Jeux de Hazard, 453
LXXXV. *Extrait d'une Lettre de Mr.* Herman, *ſur le Probléme inverſe des forces centrales,* 469
LXXXVI. Solution du Probléme inverſe des Forces centrales, 470
LXXXVII. *Excerptum ex* Newtoni Phil. Nat. Princ. Mat. *De Viribus centralibus in medio reſiſtente,* 481
LXXXVIII. Sur les Forces centrales, dans des milieux reſiſtans en raiſon compoſée de leurs denſitez & des puiſſances quelconques des viteſſes du Mobile, 502
Addition de Mr. Nicolas Bernoulli, 509
LXXXIX. Angulorum arcuumque Sectio indefinita per formulam univerſalem expreſſa, ſine ſerierum auxilio. Et hinc deducta æquationum angularium promta formatio, 511
XC. De Motu Corporum, gravium, pendulorum & projectilium, in mediis non reſiſtentibus & reſiſtentibus, ſuppoſita gravitate uniformi & non uniformi, atque ad quodvis datum punctum tendente, & de variis aliis huc ſpectantibus, Demonſtrationes geometricæ, 514

FINIS TOMI PRIMI.